TWO RESULTS ON CURVES IN $\mathbb{P}^3$

楫　元

0. 序

初めて研究集会で講演発表した内容について簡単に説明したい. 当時の講演題目をそのまま本講演および本稿の題目とした. それは研究集会「AMS Summer Research Institute, Bowdoin 1985」のでのことで, その内容は以下の論文として発表した:

[NB] On the normal bundles of rational space curves. Math. Ann. **273** (1985), no. 1, 163–176.
[TDG] On the tangentially degenerate curves. J. London Math. Soc. (2) **33** (1986), no. 3, 430–440.

本稿ではそれぞれの結果の内容とその当時の若干の思い入れを述べ (§§1–2), 最後に, AMS Summer Research Institute に参加することとなったきっかけから, なぜこのような具体的内容の分からないタイトルになってしまったか, その経緯についても説明したい (§3). 普通の報告集原稿とは趣が若干異なるが暦が一巡したこともありお許しいただければと思う.

以下, 任意標数 $p \geq 0$ の代数閉体 k を基礎体とする.

1. 空間有理曲線の法束 [NB]

1.1. 空間曲線の法束に関する論文で, 安定性や豊富性などベクトル束としての性質に注目したものが 1970 年代後半から多く発表された. それらを読み漁るうちに有理曲線については, 次数が標数で割りきれる場合, および, 標数 $p = 2$ である場合には, 法束の直和分解の型が知られていないことわかった (後者については, 出版されていた論文に見落としを見つけただけだけれど). そこで, 一般任意標数での空間有理曲線の法束について調べて書いたのがこの論文 [NB]. D1 (1984) の夏休みのことだった.

1.2. $X \subseteq \mathbb{P}^3$ を代数閉体 k 上定義された射影曲線とし, その次数を $d := \deg X$ とする. $\widetilde{X} \to X$ を X の正規化として, 以下のベクトル束の可換図式を考える:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \iota^*(\Omega^1_{\mathbb{P}^3} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) & \to & H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}} & \to & \iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) & \to & 0 \\
 & & d\iota \otimes 1_{\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)} \downarrow & & a^1 \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & \Omega^1_{\widetilde{X}} \otimes \iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) & \to & P^1_{\widetilde{X}}(\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) & \to & \iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) & \to & 0
\end{array}$$

ただし, 上の行は $\mathbb{P}^3$ 上のオイラー完全列の ι による引き戻し, 下は $\widetilde{X}$ 上の直線束 $\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ の (1 位の) 主要部分のベクトル束に付随した標準的短完全列, 縦の矢印は ι から引き起こされる標準的射である.

この § では, $\widetilde{X} = \mathbb{P}^1$ と仮定し, $\iota : \widetilde{X} \to \mathbb{P}^3$ は不分岐とする. すなわち, X は非特異または nodal 有理曲線とする. ι が不分岐ゆえ $d\iota$ は全射となるので a^1 も全射となる. ゆえに核 $\ker a^1$ は局所自由である.

$$N_{\widetilde{X}} := (\ker d\iota)^\vee = (\ker a^1)^\vee \otimes \iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$$

とおくと次の短完全列を得る:

$$0 \to N^\vee_{\widetilde{X}}(1) \to H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}} \xrightarrow{a^1} P^1_{\widetilde{X}}(\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \to 0. \tag{1.1}$$

都の西北 代数幾何学シンポジウム (2019 年 11 月 28 日@早稲田大学西早稲田キャンパス).

$N_{\widetilde{X}}$ を $X \subseteq \mathbb{P}^3$ の**法束**と呼ぶことにする．実際, ι が埋め込みのときは $N_{\widetilde{X}}$ は通常の意味での $X/\mathbb{P}^3$ の法束, $T_{\mathbb{P}^3}|_X/T_X$ と同型である．Grothendieck の定理により, ベクトル束 $N_{\widetilde{X}}$ は $\widetilde{X} \simeq \mathbb{P}^1$ 上の直線束の直和に分解し, 容易に解るように $\deg N_{\widetilde{X}} = 4d-2$ となることから,

$$N_{\widetilde{X}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2d-1-\rho) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2d-1+\rho) \tag{1.2}$$

となる非負整数 $\rho \geq 0$ が定まる．$\rho = h^0(N_{\widetilde{X}}(-2))$ である．

1.3. この ρ の取りうる値を調べることが本研究の目的である．その直接の動機となった先行研究としては以下の二つがある:

定理 1.1 (Eisenbud-Van de Ven (1981) [4])**.** 基礎体は $k = \mathbb{C}$ とする．整数 $d \geq 4$ に対して以下は同値:

(1) 非負 $\rho \in \mathbb{Z}$ に対して次数 d の非特異有理曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^3$ が存在して以下が成り立つ:

$$N_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2d-1-\rho) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2d-1+\rho);$$

(2) $0 \leq \rho \leq d-4$.

定理 1.2 (Ghione-Sacchiero (1980) [6])**.** 基礎体 k の標数は $p \neq 2$ とする．

(a) $X \subseteq \mathbb{P}^3$ が次数 $d \geq 4$ の非特異または nodal 有理曲線とするとき, d が標数 p で割り切れないならば $0 \leq \rho \leq d-3$ となる ρ により $N_{\widetilde{X}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2d-1-\rho) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2d-1+\rho)$ が成り立つ．

(b) さらに, $\rho = d-3$ ならば X は特異点を持つ．すなわち, X が非特異ならば $0 \leq \rho \leq d-4$ となる．

著者の主定理の一つは, 次数 d に関する仮定「d が標数 p で割り切れない」を外した以下の命題である:

定理 1.3 ([NB])**.** 基礎体 k の標数は $p \neq 2$ とする．

(a) $X \subseteq \mathbb{P}^3$ が次数 $d \geq 4$ の非特異または nodal 有理曲線とするとき, $0 \leq \rho \leq d-3$ となる ρ により $N_{\widetilde{X}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2d-1-\rho) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2d-1+\rho)$ が成り立つ．

(b) さらに, $\rho = d-3$ ならば X は特異点を持つ．すなわち, X が非特異ならば $0 \leq \rho \leq d-4$ となる．

もう一つの主定理は標数 $p = 2$ の場合の次の命題である:

定理 1.4 ([NB])**.** 標数は $p = 2$ とする．

(a) 整数 $d \geq 4$ に対して以下は同値:
   (1) 非負 $\rho \in \mathbb{Z}$ に対して, 次数 d の非特異または nodal 有理曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^3$ が存在して以下が成り立つ:

$$N_{\widetilde{X}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2d-1-\rho) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2d-1+\rho);$$

   (2) $0 \leq \rho \leq d-3$ かつ $\rho \equiv d-1 \pmod 2$.

(b) さらに任意の $d \geq 4$ に対して $\rho = d-3$ となる非特異有理曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^3$ が存在する．

1.4. この結果を得た当時は ρ のもつ偶奇性を不思議に感じたが, 後に取り組むようになったガウス写像の研究結果からすれば, これは実に当然のことと気づいた．というのは, 全射,

$$a^1 : H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}} \to P^1_{\widetilde{X}}(\iota^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$$

から引き起こされる $\widetilde{X}$ からグラスマン多様体 $\mathbb{G} := \mathbb{G}(H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)), 2)$ への射,

$$\gamma : \widetilde{X} \to \mathbb{G}$$

を X のガウス写像と呼ぶ．ただし, $\mathbb{G}$ は $H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$ の 2 次元商空間のなすグラスマン多様体である．$\mathcal{S}$, $\mathcal{Q}$ をそれぞれ $\mathbb{G}$ の普遍部分ベクトル束, 普遍商ベクトル束として, $\mathbb{G}$ 上の標準的短完全列を

$$0 \to \mathcal{S} \to H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \to \mathcal{Q} \to 0$$

とすれば, その γ による引き戻しは γ の定義により (1.1) と一致する. 特に, 同型写像,

$$\gamma^*\mathcal{S} \simeq N_{\widetilde{X}}^{\vee}(1)$$

がある. ガウス写像に関する研究 [8] より, ここで標数 $p=2$ の場合は γ (が定める関数体の拡大 $K(\widetilde{X})/K(\gamma\widetilde{X})$) は非分離的となり, 必ず純非分離 ($p=2$ 次) 拡大を含むことが示される. ゆえに直和分解, $N_{\widetilde{X}}(-1) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-1-\rho) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-1+\rho)$ においては必ず $d-1\pm\rho \equiv 0 \pmod 2$ となる.

1.5. 上記の主定理の証明における鍵は次である:

補題 1.5. 完全列 (1.1) において, 以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} p\nmid d \quad &\Rightarrow \quad P^1_{\widetilde{X}}(\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-1))^{\oplus 2}, & a^1(X_i) &= \left(\frac{\partial F_i}{\partial s}, \frac{\partial F_i}{\partial t}\right), \\ p|d \quad &\Rightarrow \quad P^1_{\widetilde{X}}(\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-2)), & a^1(X_i) &= \left(F_i, \frac{1}{s}\frac{\partial F_i}{\partial t}\right), \end{aligned}$$

ただし, $H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) = \langle X_0, \ldots, X_3\rangle_k$ とし $\iota^*X_i = F_i \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) = k[s,t]_d$ $(i = 0, \ldots, 3)$ とする.

この $p|d$ の主張は一見非対称で奇妙に見えるが, オイラーの公式 $s\frac{\partial F_i}{\partial s} + t\frac{\partial F_i}{\partial t} = dF_i = 0$ から $p|d$ ならば $\frac{1}{s}\frac{\partial F_i}{\partial t} = -\frac{1}{t}\frac{\partial F_i}{\partial s}$ が成り立つことに注意する.

証明は, $\iota : \widetilde{X} \to \mathbb{P}^3$ から自然に引き起こされる射 $a^1 : H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to P^1_{\widetilde{X}}(\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ と $P^1_{\widetilde{X}}(\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ とをチェックコホモロジーを用いて具体的に計算すれば得られる.

1.6. いくつか例などを挙げてこの § を終える:

例 1.6 ([NB], Cf. [7])**.** 非特異 4 次空間有理曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^3$ に対しては,

$$N_X = \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(7) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(7), & p \neq 2, \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(8) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(6), & p = 2. \end{cases}$$

例 1.7 ([NB])**.** 埋め込み,

$$\iota : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3; (s:t) \mapsto (s^d : s^{d-1}t : st^{d-1} : t^d)$$

により定まる非特異 d 次空間有理曲線 $X := \iota\mathbb{P}^1$ $(d \geq 3)$ に対しては,

$$N_X = \begin{cases} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2d) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2d-2), & p|d-2, \\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2d-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2d-1), & \text{otherwise}. \end{cases}$$

例 1.8 ([NB])**.** 標数を $p=2$ とし, $2\nmid d$, かつ $2|k$ $(0 \leq k \leq d-1)$ とする. このとき

$$\iota : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3; (s:t) \mapsto (s^d : s^k(s+t)^{d-k} : t^k(s+t)^{d-k} : t^d)$$

により定まる空間有理曲線 $X := \iota\mathbb{P}^1$ は, nodal または非特異で, 法束 $N_{\widetilde{X}}$ の直和分解 (1.2) において $\rho = d-k-1$ となる. さらに $(k,d) = 1$ のときは X は非特異となり, とくに $k=2$ のとき X は $\rho = d-3$ となる非特異空間有理曲線の例となる.

例 1.9 ([NB])**.** 標数を $p=2$ とし, $2|d$, かつ $2|k$ $(0 \leq k \leq d-1)$ とする. このとき

$$\iota : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3; (s:t) \mapsto (s^d + \omega s^{d-1}t : s^k(s+t)^{d-k} : t^k(s+t)^{d-k} : st^{d-1} + \omega t^d),$$

により定まる空間有理曲線 $X := \iota\mathbb{P}^1$ は, nodal または非特異で, 法束 $N_{\widetilde{X}}$ の直和分解 (1.2) において $\rho = d-k-1$ となる. ただし, $\omega \in k \setminus \mathbb{F}_2$ とする. さらに $(k, d-1) = 1$ のときは X は非特異となり, とくに $k=2$ のとき X は $\rho = d-3$ となる非特異空間有理曲線の例となる.

命題 1.10 ([NB])**.** $v_d : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^d$ $(d \geq 2)$ を d 次ヴェロネーゼ埋め込みとするとき, 任意の標数 $p \geq 0$ において次が成り立つ:

$$N_{v_d\mathbb{P}^1/\mathbb{P}^d} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d+2)^{\oplus d-1}.$$

2. 接的退化曲線 Tangentially Degenerate Curves [TDG]

2.1. 1983 年前後修士課程の学生だった頃, 以下の問題を思い付いた:

問題 2.1 ([TDG])**.** 射影曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^3$ が退化していない (すなわち, 超平面に含まれない) ならば, 接的退化しないか?

ただし,

定義 2.2 ([TDG])**.** 射影曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^3$ が**接的退化 (tangentially degenerate)** しているとは, 一般の点 $P \in X$ における射影接線 T_P が P 以外で再び X と交点を持つこと:

$$T_P X \cap X \neq \{P\}.$$

とする. ここで射影接線 $T_P X$ とは, $t_P L = t_P X \subseteq t_P \mathbb{P}^3$ を満たす射影直線 $L \subseteq \mathbb{P}^3$ のことである. ただし, $t_P *$ は P における $*$ のザリスキー接空間を表す.

2.2. これは, 学部 3 年後期から M1 前期までセミナーで読んでいたテキスト, R. Hartshorne: "Algebraic Geometry" (Springer GTM52) [7] の練習問題, Chapter IV, Exercise 6.7 を解こうとしていたことがきっかけで, この主張を肯定的に示せばよいというところに辿り着いた. 当初は自力で挑戦していたが全然解けない. (少なくとも基礎体の標数が零ならば) 成り立って当然な主張だし教科書の練習問題に必要なのだろうから, どうせ過去の文献のどれかに証明が書いてあるんだろう, なんて思いつつ取り組んでいたが, どこか本気になれない部分があった (これは, 言い訳ですね). 結局 give up して, 証明や文献を人に教わることにした. しかし, 藤田隆夫先生を初めとする特に古典的代数幾何というか射影代数幾何に強そうな方々にいろいろ質問して回ったが, 自分の調べた限りでは, 答 (証明を知っている人, すぐに証明を出来る人, 証明が載っている文献) を見つけることができなかった. そうこうしているうちにだんだん, 成り立つことは信じられてはいるけれど実はまだ, どこにもちゃんとした証明はないのではないか, と思い始め, 本気で証明してやろう, という気になった.

いろいろ紆余曲折はあったが D1 のころ, なんとか証明が完成し論文 [TDG] にまとめることができた.

2.3. 1985 年 7 月 19 日に, Bowdoin 大学での AMS Summer Research Institute において, 空間有理曲線の法束の結果とともに講演発表したところ, 講演後 C.Ciliberto から, 「あなたが提起したという問題は, A.Terracini が 1932 年の論文 [14] の脚注において最初に提起した問題である.」と指摘された ([MR0850959 (87i:14027)] 参照). それ以来未解決問題であったとのことである.

論文 [14] において扱われている問題は, 複素射影曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^r$ に対して, 点 $P \in X$ における X への接触超平面を $S_P \subseteq \mathbb{P}^r$ と表し $S := \{S_P \cap X\}_{P \in X} \subseteq X \times X$ により定まる X における対応 (correspondence) を考えるとき S が可約となる X を調べることにある. さらに一般的な設定においては S_P の次元は h と書かれている.

下に抜粋を引用するが, 彼の論文の最後の 143 頁の脚注 27 の冒頭に

> 27) Non so se siano stati dati esempi di curve *algebriche* relative al caso $r = 3$, $h = 1$, vale a dire di curve algebriche sghembe dello spazio ordinario le cui rette tangenti siano tutte ulteriormente secanti.

とある. google 翻訳 (`http://translate.google.com/`) に掛けてみると

> 27) I don't know if have been given examples of *algebraic* curves related to the case $r = 3$, $h = 1$, that is to say of skew algebraic curves of the ordinary space whose tangent lines are further all secant.

となる. 確かに, 「接線がさらに割線になっている $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ 内の非退化代数曲線の例を知らない」とある. さらにそれに続いて Terracini は $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ 内の解析曲線の例を挙げている.

例 2.3 (Terracini (1932) [14])**.** 次の射を考える:

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3; t \mapsto (e^{at}, e^{bt}, e^{ct}), \quad (a, b, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

このとき $k \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi(t+k)-\varphi(t) &= (e^{a(t+k)}-e^{at}, e^{b(t+k)}-e^{bt}, e^{c(t+k)}-e^{ct}) \\ &= ((e^{ak}-1)e^{at}, (e^{bk}-1)e^{bt}, (e^{ck}-1)e^{ct}), \\ \dot{\varphi}(t) &= (ae^{at}, be^{bt}, ce^{ct}), \quad (\dot{\varphi}=d\varphi/dt).\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって φ の像を $X := \varphi(\mathbb{A}^1) \subseteq \mathbb{A}^3$ とおけば

$$\begin{aligned}\varphi(t+k) \in T_{\varphi(t)} \cap X \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi(t+k)-\varphi(t) \parallel \dot{\varphi}(t) \\ &\Leftrightarrow \quad (\star) \quad \frac{e^{ak}-1}{a} = \frac{e^{bk}-1}{b} = \frac{e^{ck}-1}{c}\end{aligned}$$

となるので, $k \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して $(\star)$ をみたす相異なる $a,b,c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ が取れれば X は非退化かつ接的退化していることがわかる.

$(\star)$ をみたす $a,b,c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ については, 複素函数 $f(z) = \dfrac{e^{kz}-1}{z}$ にピカールの小定理を用いると, 一般の $K \in \mathbb{C}$ に対して, $f(z)=K$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ が無限個存在することがわかる. そこで相異なる $a,b,c \in f^{-1}(K)$ を取ればよい.[1]

2.4. 正標数の基礎体 k の場合には, 非退化かつ接的退化している空間曲線の例がいろいろと知られることとなった. 多くは無限に多くの多重接線をもつ非退化曲線の例である:

- 有理曲線: [TDG], Levcovitz (1991) [11], Rathmann (1987) [12].
- 通常楕円曲線: [8].

なお, 超特異楕円曲線および種数 2 以上の場合, 非特異空間曲線の多重接線の数は有限であることが知られている ([8], [9]).

異なるアイディアによるものとしては, 次の例がある:

例 2.4 (Garcia-Voloch (1991) [5]). 標数は $p>2$ とし, $X \subseteq \mathbb{P}^3$ を以下の方程式系でさだまる完全交差曲線とする:

$$\begin{cases} x^{q+1}+y^{q+1}=1, \\ x^{q+1}+z^{q+1}=2, \end{cases} .$$

すると一般の点 $P \in X$ における射影接線 T_P は, P において重複度 q で X と接し, $F(P) \in T_P \cap X$ となることが解る:

$$X \cap T_P = q \cdot P + F(P),$$

ただし, F は X の次数 q^2 のフロベニウス射である. したがって X は接的退化している. 実際, $P=(a,b,c) \in X$ における射影接線 T_P は線形方程式系 $\begin{cases} a^q x + b^q y = 1 \\ a^q x + c^q z = 2 \end{cases}$ により定まり, $F(P) = (a^{q^2}, b^{q^2}, c^{q^2}) \in T_P$ となる.

一般の点 $P \in X$ における位数列 (定義は後述) は $\{0,1,\underline{q},2q\}$ となることわかり, とくに X は再帰的 (reflexive) ではないことがわかる.

以上に挙げた曲線は, どれも再帰的 (reflexive) ではないという点において正標数の典型的な性質を持つ.

次は, その点全く異なる例となっており画期的な例であるといえよう:

例 2.5 (Esteves-Homma (1994) [3]). 次の射を考える:

$$\varphi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^3; t \mapsto (t, t^2-t^p, t^3+2t^p-3t^{p+1}),$$

---

[1] **問**: $X \subseteq \mathbb{A}^3$ の閉包 $\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^3$ を考えるとき, 境界 $\overline{X} \setminus X$ はどのような集合か?

ただし標数は $p > 3$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
\varphi(t+1) - \varphi(t) &= \big(t+1, (t+1)^2 - (t^p+1), (t+1)^3 + 2(t^p+1) - 3(t^p+1)(t+1)\big) \\
&\qquad - (t, t^2 - t^p, t^3 + 2t^p - 3t^{p+1}) \\
&= \big(t+1, t^2 + 2t - t^p, t^3 + 3t^2 + 3t + 2t^p - 3t^{p+1} - 3t^p - 3t\big) \\
&\qquad - (t, t^2 - t^p, t^3 + 2t^p - 3t^{p+1}), \\
\dot\varphi(t) &= (1, 2t, 3t^2 - 3t^p).
\end{aligned}$$

となるので, 任意の $t \in \mathbb{A}^1$ に対して, $\varphi(t+1) - \varphi(t) = \dot\varphi(t)$ が成り立ち,

$$X \cap T_{\varphi(t)} = 2 \cdot \varphi(t) + \varphi(t+1)$$

となっている．φ の像の閉包を $X := \overline{\varphi(\mathbb{A}^1)} \subseteq \mathbb{P}^3$ とおくと, 容易に X が非退化かつ非特異であることがわかり, 上の計算から X は接的には退化していることがわかる．

さらに X の位数列は, $P \neq \infty$ においては $\{0, 1, \underline{2}, 3\}$ となっており, とくに X は再帰的である! 一方 $P = \infty$ においては $\{0, 1, \underline{p}, p+1\}$ となっており, 位数列の観点からするとこのただ一点に正標数特有の現象が顕れている．

アファイン部分で接的退化している点, そして, $P = \infty$ において通常とは異なる現象がおきている点, それら二点に着目すると, Terracini の例と Esteves-Homma の例とは非常に似通っているようにも思われる．Esteves-Homma の例は, Terracini の例において $k = 1$ の場合を正標数で‘実現’している, ともいえる．またいずれの例においても, アファイン部分での接的退化の‘しわ寄せ’が無限遠点に凝縮しているように思われる．

2.5. 著者の主定理は次の通り:

定理 2.6 ([TDG])**.** 標数 $p = 0$ の非特異または nodal 射影曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^3$ に対しては, 退化していない (すなわち, 超平面に含まれない) ならば, 接的退化しない．

<u>証明の大まかな方針</u>: 標数は零とし非退化 X が接的退化していると仮定して矛盾を導く．

X の変曲点 P をひとつ取り, P の近傍でアフィン座標を級数展開し, X の適当な被覆曲線 $\widetilde{D}$ により P と $Q \in T_P X \cap X \setminus \{P\}$ を同時にパラメトライズする射について考察し, 接的退化しているという条件をある種の連立代数方程式の共通解の存在に言い換える．そのとき多項式の根の大きさを評価する「掛谷の定理」を用いることにより共通根の存在が否定され, 矛盾を得る． □

共通解の存在に言い換える議論については, 有馬研究室の先輩, 小山陽一さん (金沢工業大学) と日高文夫さん (専修大学北海道短期大学) のアドバイスが不可欠だった．また, 早稲田大学着任直後の初々しい橋本喜一朗先生からは, 高木貞治の “代数学講義” [13] に載っている「掛谷の定理」をご教示いただいた．以上の有難い寄与について論文 [TDG] の謝辞に明確に書きそびれてしまい今でも心残りである．

2.6. 主定理の証明. X が特異点を持つ場合も含めた一般的設定で考察する． X の正規化を $\iota : C \to X$ と書くことにする．

<u>**Step 1**</u>: まず “接的退化” を言い換える: そのために以下の可換図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] \arrow[dd, bend right=60, "\text{isom}"'] & X \arrow[d, hook] \\
T_C \arrow[r, two heads, "\eta"] \arrow[d, "\pi"] & \operatorname{Tan} X \arrow[d, hook] \\
C \arrow[r, "\iota"] & \mathbb{P}^3
\end{tikzcd}$$

ただし $T_C := \coprod_{P \in C} T_P \subseteq C \times \mathbb{P}^3$ を射影接線束, $\pi : T_C \to C$ を標準的射影, $\operatorname{Tan} X := \bigcup_{P \in C} T_P \subseteq \mathbb{P}^3$ を射影接線曲面, $\eta : T_C \twoheadrightarrow \operatorname{Tan} X$ を自然な射影, $C_0 \subseteq T_C$ を射影接線における接点の跡のな

す π の切断とする．このとき, $\overline{\eta^{-1}X \setminus C_0}$ は明らかに π のファイバーを含まないに注意する．さらに, X が接的に退化しているとは, 逆像 $\eta^{-1}X \subseteq T_C$ が底曲線 C を支配する 1 次元既約成分を C_0 以外に持つことである:

$$X \text{ tangentially degenerate} \Leftrightarrow \eta^{-1}X \setminus C_0 \text{ dominates } C \text{ via } \pi$$

主定理を背理法で示す: 非退化射影曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^3$ が接的退化していると仮定する．したがって $\overline{\eta^{-1}X \setminus C_0}$ は (π のファイバーではない) 1 次元既約成分を持つので, その一つに被約構造を与えたものを $D \neq \emptyset$ とする．

Step 2: D の正規化を $\nu : \widetilde{D} \to D$ とする．X の接点 P とある点 $Q \in T_P X \cap X \setminus \{P\}$ を同時にパラメトライズする射を以下の通り構成する: まず合成を

$$\widetilde{\pi} := \pi\nu : \widetilde{D} \to C$$

とおく．次に合成 $\eta\nu : \widetilde{D} \to X$ を考えると, $\widetilde{D}$ は正規かつ C は X の正規化なので, 射 $\eta\nu$ は C を経由する．したがってある射 $\widetilde{\eta} : \widetilde{D} \to C$ が存在して,

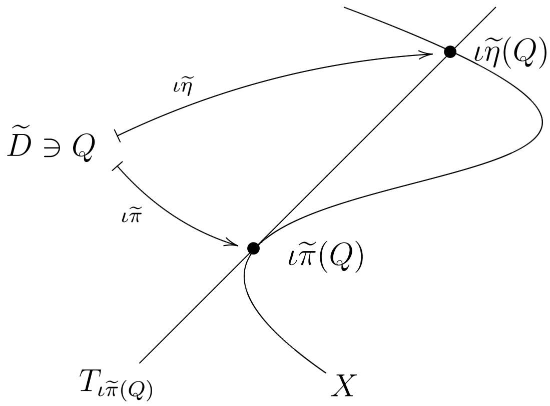
$$\eta\nu = \iota\widetilde{\eta}$$

と分解する．このとき, $\iota\widetilde{\pi}$, $\iota\widetilde{\eta}$ が求める射である．つまり, 射の構成から各点 $Q \in \widetilde{D}$ に対して,

$$\iota\widetilde{\eta}(Q) \in T_{\iota\widetilde{\pi}(Q)}$$

となっている:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{D} \arrow[r, "\nu"] \arrow[rrddd, bend right, "\widetilde{\eta}"] \arrow[rrddd, bend right=60, "\widetilde{\pi}"'] & D \arrow[rrd, bend left, "\eta|_D"] \arrow[rdd] \arrow[rddd, bend right, "\pi|_D"'] & & \\
& & C_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, hook] \\
& & T_C \arrow[r, two heads, "\eta"] \arrow[d, "\pi"] & \operatorname{Tan} X \arrow[d, hook] \\
& & C \arrow[r, "\iota"] \arrow[ruu] & \mathbb{P}^3
\end{tikzcd}$$



というのは, $\widetilde{\pi}$ の定義から $\pi\nu(Q) = \widetilde{\pi}(Q)$ より $\nu(Q) \in \pi^{-1}\widetilde{\pi}(Q)$．$\eta$ で写すと $\iota\widetilde{\eta} = \nu\eta$ より $\iota\widetilde{\eta}(Q) = \eta\nu(Q) \in \eta\pi^{-1}\widetilde{\pi}(Q) = T_{\iota\widetilde{\pi}(Q)}$ となる． $\square$

Step 3: 次に $D \cap C_0 \neq \emptyset$, すなわち, 変曲点 (inflection pt) が存在することを示す．直線束 $\mathcal{O}_C(1) := \iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ の (1 位の) 主要部分のベクトル束を $P^1_C(\mathcal{O}_C(1))$ とし,

$$H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \otimes \mathcal{O}_C \xrightarrow{a^1} P^1_C(\mathcal{O}_C(1)) \overset{\epsilon}{\twoheadrightarrow} \mathcal{O}_C(1)$$

を標準的準同型射とする．これらの射影化, $* \mapsto \mathbb{P}_C(*)$, が以下の埋め込みたちを与える:

$$\mathbb{P}^3 \times C \hookleftarrow \mathbb{P}(P^1_C(\mathcal{O}_C(1))) \simeq T_C \hookleftarrow C_0,$$

ここで $\iota : C \to \mathbb{P}^3$ が不分岐なので射 a^1 が全射であることに注意する．

さて, もし $D \cap C_0 = \emptyset$ と仮定する (背理法). $\widetilde{D}$ で $T_C \to C$ を底変換すると, $\mathbb{P}^1$-束, $(T_C)_{\widetilde{D}} \to C_{\widetilde{D}}$ は, 切断 $(C_0)_{\widetilde{D}}$ と交わらない切断 $(D)_{\widetilde{D}}$ をもつ．したがって全射 $\epsilon : P^1_C(\mathcal{O}_C(1)) \to \mathcal{O}_C(1)$ は, $\widetilde{D}$ へ引き戻すと分裂する．標数 $p = 0$ の仮定から D/C は分離的なので ϵ はもとより分裂している．一方, 標準的完全列,

$$0 \to \Omega^1_C \otimes \mathcal{O}_C(1) \to P^1_C(\mathcal{O}_C(1)) \overset{\epsilon}{\twoheadrightarrow} \mathcal{O}_C(1) \to 0$$

の拡大類 $(\epsilon) \in \operatorname{Ext}^1_C(\mathcal{O}_C(1), \Omega^1_C \otimes \mathcal{O}_C(1))$ は, 同型 $\operatorname{Ext}^1_C(\mathcal{O}_C(1), \Omega^1_C \otimes \mathcal{O}_C(1)) \simeq H^1(C, \Omega^1_C) \simeq k \cdot 1_k$ のもとで

$$(\epsilon) = \deg X \cdot 1_k = \deg \mathcal{O}_C(1) \cdot 1_k$$

を満たす. よって, 再び標数 $p=0$ ゆえ $(\epsilon)\neq 0$ となるので, ϵ は分裂しない. これは矛盾である. 以上より, $D\cap C_0\neq\emptyset$ である. $\square$

<u>**Step 4**</u>: 変曲点 $P_0\in C_0\cap D$ を一つ取り固定する. アフィン座標系を取って

$$\iota : C \dashrightarrow \mathbb{A}^3\subseteq\mathbb{P}^3$$

は P_0 の近傍で局所的に正則関数 $x_1,x_2,x_3\in\mathcal{O}_{P_0,C}$ を用いて, ベクトル $\mathrm{x}:=(x_1,x_2,x_3)$ により与えられているとしてよい. さらに適当な射影座標変換により, X が非退化であることに注意すると正整数 $0<a<b<c$ を用いて, 完備化, $\widehat{\mathcal{O}_{C,P_0}}\simeq k[[t]]$ において

$$\begin{cases} x_1 &=& t^a+\cdots \\ x_2 &=& t^b+\cdots \\ x_3 &=& t^c+\cdots \end{cases}$$

とかけるとしてよい. ただし, $t\in\mathcal{O}_{C,P_0}$ は P_0 における C のある一意化元である. 正整数列 $\{0<a<b<c\}$ は, $\iota : C\to\mathbb{P}^3$ (または, 線形系 $\iota^*H^0(\mathbb{P}^3,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))(\subseteq H^0(C,\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))))$ の P_0 における<u>位数</u> (<u>orders</u>) または<u>位数列</u> (<u>order sequene</u>) と呼ばれる不変量である.[2] 基本的事実としては

$$a=1\Leftrightarrow \iota \text{ が } P_0 \text{ において不分岐}$$

が成り立つ (また, 話は前後するが, $p\nmid b\Leftrightarrow X$ は再帰的, が成り立つ).

次に, 変曲点 $\widetilde{\pi}(Q_0)=\widetilde{\eta}(Q_0)=P_0$ に写される点 $Q_0\in\widetilde{D}$ をとる. このとき, 合成,

$$\iota\widetilde{\pi},\iota\widetilde{\eta} : \widetilde{D}\dashrightarrow\mathbb{A}^3$$

は Q_0 の近傍でそれぞれ, $\widetilde{\pi}^*\mathrm{x}=(\widetilde{\pi}^*x_1,\widetilde{\pi}^*x_2,\widetilde{\pi}^*x_3)$, $\widetilde{\eta}^*\mathrm{x}=(\widetilde{\eta}^*x_1,\widetilde{\eta}^*x_2,\widetilde{\eta}^*x_3)$ により与えられる. さらに

$$\begin{aligned} \iota\widetilde{\eta}(Q)\in T_{\iota\circ\widetilde{\pi}(Q)}\quad(\forall Q\in\widetilde{D}) \quad&\Leftrightarrow\quad \widetilde{\pi}^*\dot{\mathrm{x}}\parallel\widetilde{\eta}^*\mathrm{x}-\widetilde{\pi}^*\mathrm{x}\ (\text{as vectors in } \mathbb{A}^3) \\ &\Leftrightarrow\quad \mathrm{rk}[\widetilde{\pi}^*\dot{\mathrm{x}},\widetilde{\eta}^*\mathrm{x}-\widetilde{\pi}^*\mathrm{x}]<2 \end{aligned}$$

となる. ただし, $\dot{\mathrm{x}}:=(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3)$, $\dot{x}_i:=dx_i/dt$ とおいた. これは次の条件と同値である:

$$(*)\qquad \begin{vmatrix} \widetilde{\pi}^*\dot{x}_1 & \widetilde{\eta}^*x_1-\widetilde{\pi}^*x_1 \\ \widetilde{\pi}^*\dot{x}_2 & \widetilde{\eta}^*x_2-\widetilde{\pi}^*x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \widetilde{\pi}^*\dot{x}_1 & \widetilde{\eta}^*x_1-\widetilde{\pi}^*x_1 \\ \widetilde{\pi}^*\dot{x}_3 & \widetilde{\eta}^*x_3-\widetilde{\pi}^*x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

<u>**Step 5**</u>: Q_0 における $u\in\mathcal{O}_{\widetilde{D},Q_0}$ を取ると, ある $m\geq 1$ により

$$\widetilde{\pi}^*t=u^m+\cdots\in\widehat{\mathcal{O}_{\widetilde{D},Q_0}}\simeq k[[u]]]$$

と書ける. このとき同じ m を用いて, ある $\xi\in k$ により

$$\widetilde{\eta}^*t=\xi u^m+\cdots$$

と書けることがわかる. 上記の小行列式の条件 $(*)$ の u に関する先頭項をみると,

$$F_{ab}(x):=\begin{vmatrix} a & x^a-1 \\ b & x^b-1 \end{vmatrix}\in\mathbb{Q}[x]$$

とおくとき, $\xi\in k$ は連立代数方程式

$$(**)\qquad F_{ab}(\xi)=F_{ac}(\xi)=0,\quad (0<a<b<c)$$

を満たすことがわかる.

(*), (**) をそれぞれ, $\widetilde{\eta}^*t,\xi$ に関する連立方程式とみなすと, T_C の因子として $\eta^*X=\underline{2}C_0+D+\cdots$ と書けるので, (*) は C_0 に対応する重複度 2 の自明な解 $\widetilde{\eta}^*t=\widetilde{\pi}^*t$ をもつ. ゆえに, (**) はそれ対応して重複度 2 の自明な解 $\xi=1$ をもつ. さらに D に対応する ($\xi_D=1$ かもしれないが別の) 解 $\xi_D\in k$ が存在するはずである.

[2] 通常は, 最初の "0" も含める. これは線形系が底点自由 (base-point-free) であることに対応している. 一般的定義を書けば, 代数曲線 C 上の直線束 $\mathcal{L}$ の線形系 $V\subseteq H^0(C,\mathcal{L})(\subseteq K(C))$ に対して, $\{b_0<\cdots<b_n\}:=\{\mathrm{ord}_{P_0}(f)|f\in V\setminus\{0\}\}$ を, 非特異点 $P_0\in C$ における V の<u>order sequence</u>という.

仮定「ι は不分岐」を用いると $a = 1$ である.

$$F_{1b}(x) = \begin{vmatrix} 1 & x^1 - 1 \\ b & x^b - 1 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x^{b-2} + \cdots + (b-2)x + (b-1))$$

となるので

$$f_b(x) := x^{b-2} + 2x^{b-3} \cdots + (b-2)x + (b-1) \in \mathbb{Q}[x]$$

とおくと, $b \geq 3$ で, 連立代数方程式

(***) $$f_b(x) = f_c(x) = 0, \quad (3 \leq b < c)$$

は解を持つはずである. ここで $\xi \in \mathbb{C}$ に対して,

$$f_b(\xi) = f_c(\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_b(\xi) = (f_c - x^{c-b} f_b)(\xi) = 0,$$

ただし,

$$(f_c - x^{c-b} f_b)(x) = bx^{c-b-1} + (b+1)x^{c-b-2} + \cdots + (c-2)x + (c-1)$$

である. しかし,

事実 2.7 (掛矢の定理 [13]). 実係数多項式

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}[x]$$

の係数 a_i が全て正のとき, $f(\xi) = 0$ $(\xi \in \mathbb{C})$ とすれば次が成り立つ:

$$\min\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}, \ldots, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_1}\right\} \leq |\xi| \leq \max\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}, \ldots, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_1}\right\}.$$

によると, $f_b(\xi) = (f_c - x^{c-b} f_b)(\zeta) = 0$ をみたす $\xi, \zeta \in \mathbb{C}$ は

$$\frac{c-1}{c-2} \leq |\zeta| \leq \frac{b+1}{b} < \frac{b-1}{b-2} \leq |\xi| \leq \frac{2}{1}.$$

となるので $\xi = \zeta$ とはならない. つまり, (***) は共通解を持ち得ない. よって矛盾である. □

2.7. 微分積分学で扱うロールの定理から初等的に導かれる, しかし非常に重要な結果,

補題 2.8 (Bolognesi-Pirola (2011) [1]). 非負整数 a, b, c に対して, $(a, b, c) = 1$ ならば $\mathbb{Q}[x]$ において $\langle F_{ab}(x), F_{ac}(x)\rangle = \langle (x-1)^2 \rangle$ となる.

を, 掛矢の定理のかわりに用いると, 上記と同様の議論により次が示される:

定理 2.9 ([10]). 標数 $p = 0$ の非退化射影曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^3$ に対して, X の正規化の一般の点 P における位数列 $\{0 < b_1(P) < b_2(P) < b_3(P)\}$ が

$$(b_1(P), b_2(P), b_3(P)) = 1$$

を満たすならば, X は接的非退化である.

2.8. Esteves-Homma の例から以下の予想が立てられる:

予想 2.10. 任意標数 $p \geq 0$ の非退化射影曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^3$ に対して, X の正規化の任意の点 P における位数列 $\{0 < b_1(P) < b_2(P) < b_3(P)\}$ のどの $b_i(P)$ $(1 \leq i \leq 3)$ も標数 p で割り切れないならば, X は接的非退化である.

特に標数 $p = 0$ の場合は,

予想 2.11. 標数 $p = 0$ の非退化射影曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^3$ は接的非退化である.

3. 補遺: 当時なぜこのような講演演題になったのか?

3.1. 1985年4月の初めに, 先輩の日高さんがフラっと有馬研究室[3]にやって来て, AMS Summer Research Insititute 1985 のアナウンスメントを見せてくださり, 「カジ君, 夏にこういうのあるんだけど, 行ってみない?」とおっしゃった. ろくに考えもせずにとにかく行ってみることにして, 即座に「はい, 行きます」と答えた. で, せっかく行くなら自分の結果 [NB], [TDG] を発表してみたいと思い立ち, アナウンスメントに記載のあった curve seimnar の世話人, D. Eisenbud 先生に講演したいと手紙[4]を書いた. しかし, 「研究集会が始まってから考えよう」という程度の返事しかもらえなかった. 今思えば極東のどこの馬の骨かわからない東洋人がいきなり手紙を送りつけてきて, ほぼ10年に一度の AMS の代数幾何の大きなイベントで講演発表をさせてくれ, と書いてみてもそもそも「本当に来るのかね?」と思われても仕方ない.

3.2. でも講演発表してみたかったので, 講演の機会の確約は事前にもらえなかったが, とにかく研究集会に押しかけることにした. 渡米の費用は広中平祐先生が代表をされていた「数理科学振興会」に援助していただいた. どのような経緯でそうなったのか誰かに紹介していただいたとは思うが記憶が定かではない. 有馬先生には推薦状など書いていただいたと思うが, とにかく業績なども何も無い見ず知らずの学生に, いくらだったか正確には忘れたけれど, たしか20万円くらい, ポンと出してくれたのには, すごく驚きすごく不思議な感じがした. 数理科学振興会の事務局に求められて「出張計画書」のような書類を提出したのだが, 当時何せ全くの世間知らずで (今でも大差はない) 当初, 「ニューヨークから入国し3週間の研究集会終了後, 2ヶ月間アメリカを観光旅行してサンフランシスコから出国する」と正直に書いて提出したら, 半蔵門か麹町あたりにあった事務所に呼びだされて, 事務局の人に怒られはしなかったが「それでは補助できないから書き直して欲しい」と言われた (当たり前ですね). 冷静に見えたけど実は非常に憤慨していたか, その前に呆れ果ててしまったのだと思う. ニューヨーク往復よりも距離が短くなるから国鉄 (いまは JR) 運賃のように航空券も安くなるだろう, これは補助する側にとっともされる側にとっても双方にとってなかなかいい話じゃないかな, とアホなことも考えていた. 結局, 日程的には大差なく, 研究集会の2ヶ月後にニューヨークから帰国, ということになった. 2ヶ月間何をしていたかは, やはりこれも記憶が定かでない (ウソだけど). ただ, ニューヨークでコロンビア大学の構内を物見胡散でフラフラしていたら, 森重文先生にばったり出会ってびっくりしたことだけはよく覚えている. そういえば, 国際線往路の機内でも同じ便に森先生が搭乗されていることに気づき驚いた. しかも真剣に何か原稿のチェックをされている様子で, すごく偉い先生なのにギリギリまで準備を怠らない感じが新鮮だった.

3.3. これが生まれて初めての飛行機利用なので[5]まず, 航空券の買い方が分からなかった. 今なら楽天トラベルとかいろいろあるが, そもそもインターネットすらない. で, 日高さんにどうやって買うのか訊いてみたら当たり前だけど「旅行代理店に行けば買えます.」と教わった. でも「旅行代理店」というのもよく知らない. 結局, 日高さんご用達の渋谷の雑居ビル内にある「エスポワール」という旅行代理店を教わって, そこに行って買うことにした. Bowdoin 大学へのアクセスは, アナウンスメントで見たのか, ニューヨーク乗り換えで Portland という空港にいってそれからは陸路, ということはわかっていた.

その旅行代理店に行って, 「成田 $\leftrightarrow$ ニューヨーク」と「ニューヨーク $\leftrightarrow$ Portland」の往復航空券が欲しいと言うと, オレゴン州の Portland か?と聞かれたが, メイン州 Brunswick にある Bowdoin 大学の近くのはずだから, それは違う. それで担当の方と共に大きな地図帳で探すことになった. もちろん Google map など存在しない. 何とか航空券を発券してもらい「round trip open ticket (75日間有効)」という航空券を手に入れた. 学会などがなければ外国人は決してわざわざ訪れるところではないらしい.

---

[3] 当時有馬先生は研究室を院生や学部生に開放していて, 学生たちはそこで研究室にある本で調べ物をしたりパソコンを使ったりしており, 要するに学生の “溜り場” となっていた. 先生はといえば, よく部屋の奥に置かれたソファーに座られていた. また昼時は, 連絡事務室に ‘避難’ して持参されたお弁当を召し上がっていたらしい.

[4] 手紙の英作文には, 有馬先生の一番上の娘さんにとても助けてもらった.

[5] そもそも新幹線すらろくに乗ったことがなかった.

3.4. 成田からニューヨークに飛び, 日本から予約できたホテルに一泊してから, Portland へ飛んだ. ニューヨークでは, Times Square の近くのホテルに泊まった. かなり古そうだっけれどきちんとしたホテルだった. 夜になって何か食べようと外に出ると, 何を食べて良いのか, どの店に入って良いのか, 全然分からなかった. 前もってホテル近くのレストランを調べるとか, 何もせずに行ってしまったのだ. Times Square というかあの 42 丁目あたりをうろうろしていると, わかりやすそうな感じの多分 fast-food の, なぜかピザ屋さんが目に留まったので入ってみることにした. ただ注文できる最小単位が「これ何人分だよ!?」って感じで, ものすごく大きく, びっくりした. 店にインド人の客がいてなぜか非常に印象に残った. 翌日その人にまた道で出会ったので「おまえ, 昨日ピザ屋で会ったろ?」って訊いてみると, とても変な表情をしていたので, 人違いだったらしい. 誰かの本で, 地球上のインド人 (男性) は見かけ上, 実は 3 人しかいない, と読んだことがあったけれど, 至極納得した.

3.5. Portland から Bowdoin 大学までの足は, 結局は, 乗合タクシーのようなものだった. 行く前に早稲田セミナーの先輩の人たちに訊いたら, 「空港に着けば数学者だらけだから, その人たちにくっ付いて行けば大丈夫」と聞いてそれを鵜呑みにして行ったのだが, Portland の空港には数学者らしき人は全然いなかった. こういう連中の言うことは未来永劫絶対に信用してはいけない, と深く心に刻み込んだ. 待ち合わせをしたはずの有馬研先輩の渡辺雅之さんとは行き違ってしまったようで会えなかった. どうしてよいかわからず途方に暮れてしまい, それで, 空港警察に行って訊いてみることにした. 自分はここに行きたいのだけれどどうしたら良い?と訊くと, そこの警官から「お前は本当にそこに行きたいのか?お前, 本当か?」とかなりしつこく念を押された. 英語がデタラメなため, たったこれだけの内容の意思疎通にかなり時間がかかったと思う. リムジンサービスのような会社に, 予約の電話を代わりにしてもらった. 少し経つと数学者らしき人たちが空港に到着し始めた. バカみたいに車長の長い乗合タクシーがやって来て, 皆で一緒に乗り込み, 無事, Bowdoin 大学に辿り着いた. 空港には昼過ぎくらいに着いたのに, 大学に着いたときは外はもう真っ暗だった. 相当焦っていたので大学に到着したあたりの記憶が全く無い (一滴も呑んでないけど).

3.6. 現地到着して多分翌日, 会場である Bowdoin 大学のキャンパスで, 憧れの的である Joe Harris 先生をつかまえて「自分の結果を発表する時間をくれませんか」と直談判した. なぜ Eisenbud 先生でなく Harris 先生となったのか, 今となっては当時のその状況は全く思い出せない. 紺色の T シャツにジーンズ, 金髪の髭をたくわえた Harris 先生に「何を話したいのか?」と訊かれて「これこれこういう話をしたい」と, 二つの結果 [NB][TDG] の主定理についてとても簡単に説明した. 「そんなの, ダメ」って言われるかなと思っていると, 「何時間話したいか?」って訊かれ意表を突かれた. 講演の機会をもらうことすら難しいと内心思っていたからだ. 英語が細部まで聴き取れたかどうかあやしいものだけど, とにかく "How many hours ..." ってのははっきり耳に残り, とても感激した! それまで極東の某国ではどこの研究集会でも私などには発表の機会をもらえなかった. なのに「この違いは何なのだ!」とびっくりした. で, とりあえず「One hour」って答えた. するとさらに「タイトルは何か?」と訊かれて, 「ええっ!?」というおかしな反応になってしまった. そのとき初めて, タイトルなんぞ前もって何も考えていなかったことに気付いた (バカですね). もう, パニクって訳判らなくなりモジモジしていると Harris 先生から「じゃ "Two results on curves in $\mathbb{P}^3$" はどうか?」と提案された. このタイトルからは全然内容が伝わらないのでいささかの, というか, かなりの不満は残ったものの, [NB][TDG] の両方の内容を話そうというのだし, Harris 先生がそう云うなら, ま, いいか, ってことにした. ただ [TDG] については, その場で即座に Harris 先生に「こうすれば簡単に証明できるでしょ」と切り返されてしまった. でも幸い (?) なことに, その証明には主要部分のベクトル束の次数に関して誤りがあり, それを指摘したらそれ以上の議論は一旦保留となった. 翌日, 「君の云うとおりだ」と Harris 先生が誤りを認め, わざわざそのことを伝えてくれた. とてもありがたかった. Bowdoin 大学に辿り着くまでも結構大変だったが, とにかく, こうして無事, 講演する機会を得ることができた.

AMS SUMMER INSTITUTE

ALGEBRAIC GEOMETRY

Thursday, July 18, 1985

Expository Lecture Series

9:00 a.m. - 10:15 a.m.
Spaces curves (3)
R. Hartshorne
Krege Auditorium

10:15 a.m.
Coffee break

11:00 a.m. - 12:15 p.m.
Algebraic cycles and K-theory (2)
"Intersection theory on arithmetic varieties"
H. Gillet
Kresge Auditorium

12:15 p.m.
Lunch

Seminars

2:00 p.m. - 3:00 p.m.
Differential equations seminar a (Verdier)
"Fermi curves and monodromy"
D. Gieseker
Kresge Auditorium

4:00 p.m. - 5:00 p.m.
Curves seminar (1) (Eisenbud - Green)
"Projective normality and geometry of alge-
braic curves"
R. Lazarsfeld
Kresge Auditorium

Enumeration seminar (3)
"Completed geometric objects"
D. Laksov
Searles 214

Hodge theory seminar (3)
"Degenerations of mixed Hodge structures"
S. Zucker
Searles 202

Vector bundles seminar (5)
"Vector bundles on K3 surfaces and applications
to Hodge conjecture"
S. Mukai
Adams 202

Thursday, July 18, 1985 (Continued)

"Algebraic geometry vs. algebraic topology"
R. Thomason
Searles 314

5:00 p.m.
Dinner

7:30 p.m. - 8:30 p.m.
3-folds seminar
"Canonical singularities"
M. Reid
Kresge Auditorium

Vector bundles seminar (6)
"Subvarieties of codimension 2 in $\mathbb{P}^4$ and $\mathbb{P}^5$"
C. Okonek
Searles 214

Enumeration seminar (4)
"Enumerative geometry of contacts"
R. Speiser
Searles 314

Characteristic p seminar (5)
"P-adic periods and p-adic representations"
W. Messing
Searles 202

Student seminar
"Introduction to moduli"
D. Gieseker
Adams 202

Friday, July 19, 1985

Expository Lecture Series

9:00 a.m. - 10:15 a.m.
Curves, linear systems, and moduli (3)
J. Harris
Kresge Auditorium

10:15 a.m.
Coffee break

11:00 a.m. - 12:15 p.m.
Curves on 3-folds (1)
"The Abel-Jacobi mapping"
H. Clemens
Kresge Auditorium

12:15 p.m.
Lunch

Seminars

2:00 p.m. - 3:00 p.m.
3-folds seminar (6)
"Contraction theorem; theorem of the cone"
Y. Kawamata
Kresge Auditorium

iation of Hodge

Friday, July 19, 1985 (Continued)

2:00 p.m. - 3:00 p.m. cont'd
Groups seminar (5)
"Braid groups and simply connected surfaces
of positive index"
B. Moishezon
Adams 202

Characteristic p seminar (6)
"Weierstrass points in characteristic p"
A. Neeman
Cleveland 109

Commutative algebra seminar (2)
"Problems in intersection theory and Cohen-
Macaulay modules"
M. Hochster
Searles 202

4:00 p.m. - 5:00 p.m.
Hodge theory seminar (5)
"Absolute Hodge cycles
T. Ekedahl
Kresge Auditorium

Affine varieties seminar (2)
"Open algebraic surfaces with Kodaira
dimension $-\infty$ and logarithmic del Pezzo surfaces
of rank 1"
M. Miyanishi
Searles 214

Vector bundles seminar (7)
"Babylonian towers of vector bundles over
local rings"
H. Flenner
Adams 202

Curves seminar (2)
"Compact subvarieties of the moduli space of smooth
curves"
S. Diaz
Searles 202

Commutative algebra seminar (3)
"Cancellation problems for torsionfree sheaves
on singular curves"
R. Wiegand
Searles 314

"Compactification of strongly pseudoconvex
surfaces"
T. Vo Van
Adams 302

5:00 p.m.
Dinner

Friday July 19, 1985 (Continued)

7:30 p.m.
Hodge theory seminar (6)
"Mixed Hodge theory and moduli"
J. Carlson
Kresge Auditorium

Groups seminar (6)
"Root systems and automorphism groups of alge-
braic surfaces"
B. Harbourne
Searles 214

"Two results on curves in $\mathbb{P}^3$"
H. Kaji
Adams 202

3.7. 1985年7月19日の海外研究集会デビューの初講演は, はっきり云ってボロボロだった. IBM電動タイプライタ[6]で打ったレジメはある程度部数コピーして持って行ったが, 英語の講演原稿は現地についてから書き始めている始末. そもそも講演タイトルすら決めておらず, 今思うと, ほとんど何も考えないで渡米したらしい. でも講演当日, 聴衆の方々は多分わけのわからない'英語'の講演を辛抱強く暖かい, 和やかな雰囲気で聴いてくださり, とても有り難くてとても嬉

[6]ゴルフボールみたいな部品を付け替えてフォントを変えるヤツ.

しかった. 講演後, 出席していた Ciro Ciliberto 先生に次のご教示を頂いた: 「君の取り組んでいる問題は, 1932 年に発表された Terracini の論文 [14] において提出された問題であって, これまで未解決だった. その問題は, 論文の最後の方の脚注に書いてある.」これにも, びっくりした.

3.8. 帰国後, 有馬先生に一連の出来事を報告すると, 「二塁打くらい打ってきた感じかな」とおっしゃった. 野球のことはよく知らなかったので, どういう意味かよくわからなかったのだが, 「これは多分, きっと, 褒められているのだろう」と勝手に解釈した記憶がある.

3.9. 二年後, 1987 年, 研究集会の報告集が出版された. Lawrence Ein 先生の空間曲線の Hilbert scheme の既約性に関する論文 [2] が掲載されており, その論文に [TDG] が引用され, 主定理の証明に用いられているのを見つけたときはうれしかった.

謝辞: このような素晴らしい研究集会を企画·開催してくださった世話人の方々, 手伝ってくださった学生の皆様, ご協力いただいた方々, また, お忙しい中ご出席いただきました皆様に深く感謝いたします. ありがとうございました.

2020 年 1 月 10 日

参考文献

[1] M. Bolognesi, G. Pirola: Osculating spaces and Diophantine equations (with an Appendix by Pietro Corvaja and Umberto Zannier). (English summary) Math. Nachr. **284** (2011), no. 8-9, 960–972.

[2] L. Ein: The irreducibility of the Hilbert scheme of smooth space curves. Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), 83–87, Proc. Sympos. Pure Math., **46**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[3] E. Esteves, M. Homma: Order sequences and rational curves, In: Projective geometry with applications, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **166**, Dekker, New York, 1994, pp.27–42.

[4] D. Eisenbud, A. Van de Ven, A. On the normal bundles of smooth rational space curves. Math. Ann. **256** (1981), no. 4, 453–463

[5] A. Garcia, J.F. Voloch: Duality for projective curves. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **21** (1991), no. 2, 159–175.

[6] F. Ghione, G. Sacchiero: Normal bundles of rational curves in $\mathbf{P}^3$. Manuscripta Math. **33** (1980/81), no. 2, 111–128.

[7] R. Hartshorne: Algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, No. **52**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[NB] H. Kaji: On the normal bundles of rational space curves. Math. Ann. **273** (1985), no. 1, 163–176.

[TDG] H. Kaji: On the tangentially degenerate curves. J. London Math. Soc. (2) **33** (1986), no. 3, 430–440.

[8] H. Kaji: On the Gauss maps of space curves in characteristic p, Compositio Math. **70** (1989), 177–197.

[9] H. Kaji: On the Gauss maps of space curves in characteristic p, II, Compositio Math. **78** (1991), 261–269.

[10] H. Kaji: On the tangentially degenerate curves, II. Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **45** (2014), no. 4, 745–752.

[11] D. Levcovitz, Bounds for the number of fixed points of automorphisms of curves, Proc. London Math. Soc. (3) 62 (1991), 133–150.

[12] J. Rathmann, The uniform position principle for curves in characteristic p, Math. Ann. **276** (1987), 565–579.

[13] 高木貞治: 代数学講義, 共立出版; 改訂新版 (1965).

[14] A. Terracini: Sulla riducibilitá di alcune particolari corrispondenze algebriche, Rend. Circ. Mat. Palermo **56** (1932), 112–143.

〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1 梶　元
早稲田大学理工学部数学科
kaji@waseda.jp