

Q-Fano threefolds with $1/2(1, 1, 1)$ -singularities revisited

高木寛通 (東大数理)

1. はじめに

楯元先生と石川大蔵さんのご厚意で、この講義録の手書きの絵に色が付いているバージョンを、研究集会のホームページ

<http://pc193097.pc.waseda.ac.jp/symposium/2016.11.15-18/>

に置かせていただくことになりました。大した絵ではありませんので恐縮ですが、もしよろしければそちらもご覧ください。

2. まくら

随分前 (2002 年) のことになりますが、Nagoya Math Journal に Q-Fano threefold の分類に関する論文を出版しました。そこで考えていたのは、singular Q-Fano threefold X (以下 threefold は略す) で次の条件を満たすものです。

- (1) 高々 $1/2(1, 1, 1)$ -特異点 (以下、 $1/2$ -特異点と略記します) しか持たない。
- (2) prime である、すなわち $Cl X / \cong \mathbb{Z}[-K_X]$ を満たしている (特に Picard 数は 1 になります。ここで $Cl X$ は torsion を持ち得ることを注意しておきます)。
- (3) $h^0(-K_X)$ が 4 以上である。

名古屋の論文では、このような Q-Fano のクラスの可能性が 34 個あることを示し、そのうち 5 個のクラスを除いて例が構成できることを示しました (この数は覚えなくてよいです)。

今日お話ししたいのは、(1), (2) を満たす singular Q-Fano について、

(I) $h^0(-K_X) \leq 3$ の場合の分類の試み、

(II) ($h^0(-K_X)$ の値に限らず) Q-Fano を key variety を用いて記述する試み、

についてです。(I) は名古屋の論文の単純な延長です。(II) は向井先生の非特異 Fano の等質空間を用いた記述に触発されています。どちらも完成はしていませんが、(I) については可能性の分類については出ています。方法は $h^0(-K_X) \geq 4$ の場合とほとんど同じで、two ray game というものによります。今のところ可能性の精度は $h^0(-K_X) \geq 4$ の場合ほどよくありません。例を構成するのも骨が折れるので、完成にはちょっと時間がかかりそうです。例の構成に骨が折れるものの、それだけにそれら一つ一つに個性があって面白く感じています。その数例を後ほどご説明できればと思っています。

(II) については、すべてのクラスについてこのような記述があるのかどうか分かりませんが (もっともそれは key variety を用いた記述の定義によりますが)、key variety の中で重完全交叉として記述すると言う意味では、34 個のうち 24 個でそれが可能なことが分かっています (この数も覚えなくてよいです)。これについても後ほど例をご説明いたします。

それでは、まず (I) の問題の手法である two ray game について説明します。実はこれは (II) の問題にも関係してきます。

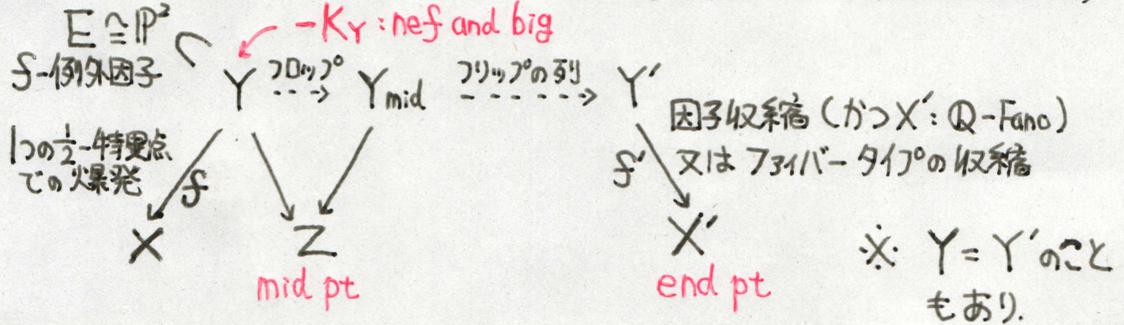
3. Two ray game による数値的分類法

Two ray game というのは誰が命名したものなのかよく知りません。また、なにをそう呼ぶのかもはっきりしないのですが、ここでは、2 つの収縮可能な端射線を持つ Picard 数 2 の多様体を、端射線収縮射の数値的性質を使って調べる方法ということにしておきます。これを Q-Fano に初めて適用したのは森先生と竹内聖彦さんです。Fano-Iskovskih-Shokurov の非特異 Fano の分類ですっきりしない点を、森理論 (端射線の理論) を用いて解消したのでした。

さて、two ray game を、Picard 数 1 で $1/2$ -特異点しか持たない singular Q-Fano について具体的に述べてみます。名古屋の論文では、このような Q-Fano X が $(-K_X)^3 \geq 1$ かつ $h^0(-K_X) \geq 1$ を満たすと

き (ここでは prime や特異点の数の条件は付けない)、線形系 $| -2K_X |$ が固定点を持たないことを示しました。このおかげで、どの $1/2$ -特異点でもよいから一つ選んで爆発すると、反標準因子の positivity は減少するけれど、nef and big に踏みとどまってくれます。すると次の図式を構成することが出来ます。

two ray game の図式 (Y がクレパント因子収縮を持たない場合)



図式の説明を少ししておきます。 $-K_Y$ が nef and big であることから、もし、これが豊富でなければ、 Y はクレパント因子収縮 (この場合はこれで終わり。canonical \mathbb{Q} -Fano に落ち着く) かフロップ収縮を持ちます。フロップ収縮ならフロップ $Y \dashrightarrow Y_{\text{mid}}$ すると、今度は K -negative な端射線を扱う極小モデル理論に入ります。フリップの列によって $(-K)$ の positivity が減少しますが、フリップは有限回で止まってくれて、最後に K -negative な、ファイバータイプの収縮 $f': Y' \rightarrow X'$ 、あるいは \mathbb{Q} -Fano X' への因子収縮 $f': Y' \rightarrow X'$ が起きます。 $-K_Y$ が豊富であれば、この Y' を Y と見ればよいだけです。

この図式に対して次のデータのリストを得ることが出来ます:

- X そのものについて、 $(-K_X)^3$ 及び $1/2$ -特異点の数 N 。なお、リーマン・ロッホの定理より $h^0(-K_X) = 1/2(-K_X)^3 + 3 - N/4$ も分かります。
- $Y \dashrightarrow Y_{\text{mid}}$ でフロップする曲線の本数に相当する量 e 。
- $Y_{\text{mid}} \dashrightarrow Y'$ フリップする曲線の本数に相当する量 n 。
- 因子を曲線につぶす場合の潰れ先の曲線の種数と次数、conic 束の場合の退化集合の次数、del Pezzo 束の場合のファイバーの次数など。

ポイントは、これらの量を図式の各ステップにおける因子間の交点数の変化で捉えておくことです。そうすることで、これらを未知数として含む方程式を立てることが出来るのです。

それにしても、なぜこれらのデータを有限個に限ることが出来るのか、このままではよく分からないと思います。ここはいつもうまく説明できないところなのですが、今回はちょっと努力してみます。 f' が因子を曲線につぶす場合を例に取ります。この場合、 X' は \mathbb{Q} -Fano ですが、実は多くの場合、 X と同様、反標準因子は 2 倍すると Cartier ですが、 X と違って Fano 指数は大きい事が分かります。実はこのような X' は既に分類されています。従って X' のデータは既知です。一方で、 $-K_Y$ は nef and big であり、フロップ、フリップは余次元 2 の部分しかいじらないので、 $-K_{Y'}$ は big です。ということは、既知の \mathbb{Q} -Fano X' から曲線上の因子を引き出して $-K$ の bigness を保たなくてはなりませんから、その曲線の種数や次数には限界が生じる、というわけです。

最終的には上に述べたような幾何的に意味のある量を取り出すのですが、それを交点数の変化として抽象的に捉えて扱うため、一旦、数値的な条件以外の幾何学を忘れ、割と機械的に \mathbb{Q} -Fano の可能性の範囲を囲い込むことが出来ます。ここが森理論の面目躍如たる所です。そのあと、それらの量の意味を思い出し、Fano, Iskovskih の時代にも知られていた射影幾何的な考察をしてやると、例が出来たり、可能性の存在が否定されたりして、分類が完成すると言う寸法です。

ところで、名古屋の論文で扱っていた $h^0(-K_X) \geq 4$ の場合と、今回お話ししようとしている $h^0(-K_X) \leq 3$ の場合と、two ray game でなにが違うかというとはほとんど何も変わらないのです。要するに、上の図式の構成は $(-K_X)^3 \geq 1$ かつ $h^0(-K_X) \geq 1$ という条件で可能ですから、余力を残していただだけの事です。感じを出すため $(-K_X)^3 \geq 1$ かつ $3 \geq h^0(-K_X) \geq 1$ の範囲をリストアップしてみると

$$h^0(-K_X) = 1 : N = 9, \dots, 15,$$

$$h^0(-K_X) = 2 : N = 6, \dots, 15,$$

$$h^0(-K_X) = 3 : N = 2, \dots, 15$$

となります。これらは、川又先生の \mathbb{Q} -Fano の有界性の結果から $N \leq 15$ が出ること、および、リーマン・ロッホ $h^0(-K_X) = 1/2(-K_X)^3 + 3 - N/4$ から直ちに分かります。

$h^0(-K_X) \geq 4$ の場合と < 4 の場合はほとんど変わらないと言いましたが、それは分類の方針が変わらないと言う意味で、現象的には結構違います。その点に少し触れておきます。まず、 $f: Y \rightarrow X$ の例外因子を E とすると、 $E \simeq \mathbb{P}^2$ であり、 $-K_X|_E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ であることに注意しておきます。

$h^0(-K_X) > 3$ の場合、 $h^0(-K_Y - E) \geq h^0(-K_X) - 3 \geq 1$ が成り立ちますが、多くの場合、結果論ではありますが、線形系 $|-K_Y - E|$ が Y から end point X' への有理写像を定めています¹⁾。

$h^0(-K_X) \leq 3$ の場合には、同様の計算で、ごく少数の場合を除き $h^0(-2K_Y - E) > 0$ が成り立つ事が分かり (リーマン・ロッホから $h^0(-2K_Y) = 1 + 2(-K_X)^3 + h^0(-K_X)$ が成り立つことを使う)、その多くの場合、線形系 $|-2K_Y - E|$ が Y から end point X' への有理写像を定めています。

なお、いつでも $h^0(-6K_Y - E) > 0$ は成り立つ事が分かります。実際に線形系 $|-6K_Y - E|$ が Y から end point X' への有理写像を定めている例が存在します。

以上の違いは方程式を解く手間に大分影響しますが、現象としても際立った違いと言えます。

その他の現象論的な違いとしては、 $h^0(-K_X) \geq 4$ のときは X' として非特異 Fano が出てくるものが多かったのに対して、 $h^0(-K_X) \geq 3$ の場合は特異点を持つ (例えば node を持つ) \mathbb{Q} -Fano や torsion Weil 因子を持つ \mathbb{Q} -Fano などが多く出てきます。

4. $h^0(-K_X)$ が 3 以下の例

最初に申し上げましたように $h^0(-K_X)$ が 3 以下の X の可能性のデータの精度はあまり良くないので、ここでリストアップすることはしません。例を二つ挙げるのに留めますが、数値的なデータから射影幾何を掘り出す様子がお伝えできれば、と思います。

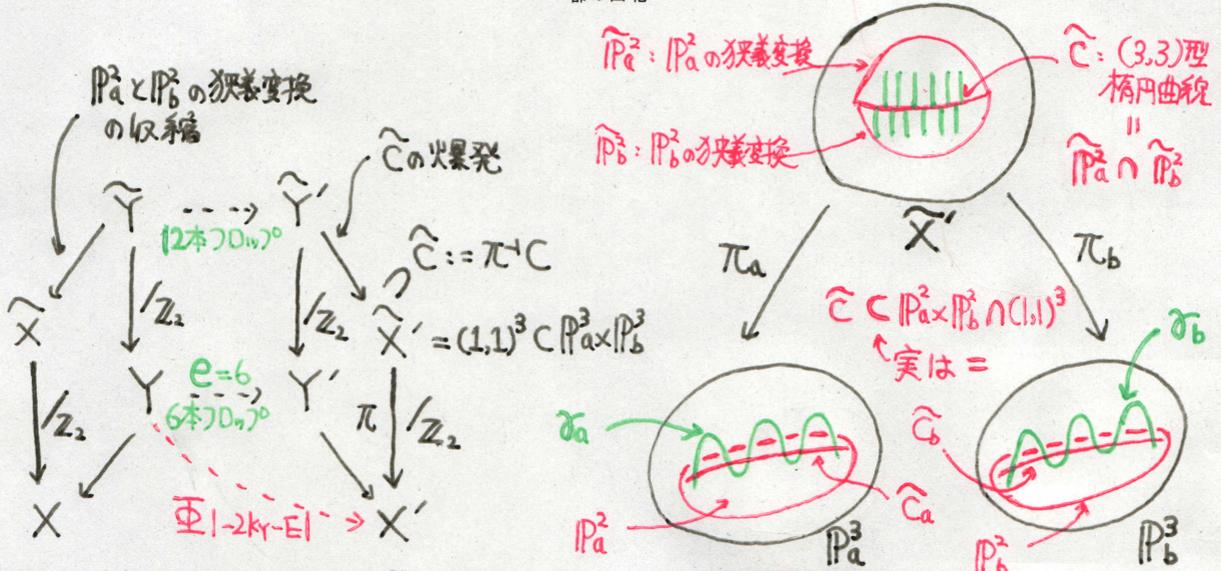
4.1. X' が Reye 合同型 Enriques-Fano threefold になる例.

$h^0(-K_X) = 3$, $N = 9$, $(-K_X)^3 = 9/2$ を満たす \mathbb{Q} -Fano X の可能性があります。これに対して二種の two ray game の図式がありますが、結果的に、それは爆発 f の中心として、どの $1/2$ -特異点を選ぶかの違いであることが分かります。これからそのうちの一つを説明します。そのデータは次のようになっています。

- $f': Y' \rightarrow X'$ は因子を曲線 C につぶす因子収縮である。
- X' は Gino Fano も知っていた **Reye 合同型 Enriques-Fano threefold** と呼ばれる \mathbb{Q} -Fano である。これは次のようにして得られる \mathbb{Q} -Fano X' である。 $V \simeq \mathbb{C}^4$ とする。 $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V)$ において、3つの $(1,1)$ 因子であり、方程式が対合 $(x,y) \leftrightarrow (y,x)$ によって不変なもの完全交叉を \tilde{X}' とする。これを対合の制限で割って得られるのが X' である。 X' は対合の固定点集合 (= 対角線集合) の像の制限である **8点で $1/2$ -特異点を持つ**。また、 X' は **2-torsion 因子** ($D \neq 0$ かつ $2D \sim 0$ なる因子 D) を持つ。実際、 $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V)$ の対合で方程式が対称な $(1,1)$ 因子と歪対称な $(1,1)$ 因子の差の \tilde{X}' への制限の X における像が 2-torsion 因子になっている。
- C は $(-K_{X'} \cdot C) = 3$ なる楕円曲線で $1/2$ -特異点を通らない。 C が特異点を通らないことから f' は C に沿った爆発であることが分かる。
- $e = 6$ かつ $n = 0$ である。 $n = 0$ はフリップなしを意味する。

これらのデータをもとに X を再構成します。この際、 X' の二重被覆 \tilde{X}' も同時に考えると便利で、その結果、次ページの図式を得ます (図では \tilde{X}' の棲家である $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V)$ を $\mathbb{P}_a^3 \times \mathbb{P}_b^3$ で表しています) :

¹⁾ただ、 $h^0(-K_X) = 4$ の場合は $|-K_Y - E|$ がただ一つの元を含み、主な場合、 f' が因子収縮になって $|-K_Y - E|$ の元の狭義変換がその例外因子になります。



図式について説明します (以下、 \tilde{C} で爆発する前まで、説明順に上の右の絵を眺めてみてください)。まず C をはつきり捉えることが出来ます。ちょっと考えると、 C の \tilde{X}' における逆像 \tilde{C} は次数 6 の (3,3) 型楕円曲線 \tilde{C} になり、さらに、その $\mathbb{P}_a^3, \mathbb{P}_b^3$ 内の像は 3 次曲線 \tilde{C}_a, \tilde{C}_b であることが分かります。よって、 \tilde{C} は \tilde{C}_a, \tilde{C}_b の張る平面 $\mathbb{P}_a^2, \mathbb{P}_b^2$ の直積 $\mathbb{P}_a^2 \times \mathbb{P}_b^2$ に入ります。 $\tilde{X}' = (1,1)^3 C$ と書くとき、 $\tilde{C} \subset \mathbb{P}_a^2 \times \mathbb{P}_b^2 \cap (1,1)^3$ ですが、この式の右の両辺とも次数 6 なので、 $\tilde{C} = \mathbb{P}_a^2 \times \mathbb{P}_b^2 \cap (1,1)^3$ が分かります。

ここで次の事実に注目します：2つの射影 $\pi_a: \tilde{X}' \rightarrow \mathbb{P}_a^3$ と $\pi_b: \tilde{X}' \rightarrow \mathbb{P}_b^3$ は次数 6、種数 3 の曲線 γ_a, γ_b の爆発である (古典的事実)。

\tilde{C} は $\tilde{X}' \rightarrow \mathbb{P}_a^3$ と $\tilde{X}' \rightarrow \mathbb{P}_b^3$ の各例外因子と (一般性を課して) 6 点で交わることが分かります。よって、 \tilde{C}_a, \tilde{C}_b の張る $\mathbb{P}_a^2, \mathbb{P}_b^2$ は \tilde{X}' に 6 点爆発 $\tilde{\mathbb{P}}_a^2, \tilde{\mathbb{P}}_b^2$ として持ちあがります。6 点爆発の例外曲線は、 γ_a, γ_b 上の例外因子内の 6 本のファイバーです。 \tilde{C} で爆発すると、6+6 本のファイバーがフロップ曲線になり、これらをフロップすると $\tilde{\mathbb{P}}_a^2, \tilde{\mathbb{P}}_b^2$ は \mathbb{P}^2 に戻ります。また、 $(\mathbb{P}_a^3 \times \mathbb{P}_b^3) \cap (\mathbb{P}_a^2 \times \mathbb{P}_b^2) = \mathbb{P}_a^2 \times \mathbb{P}_b^2$ により、 $\tilde{\mathbb{P}}_a^2$ と $\tilde{\mathbb{P}}_b^2$ は \tilde{C} に沿って横断的に交わっているため、 \tilde{C} での爆発によって交わらなくなります。最終的に 2つの \mathbb{P}^2 が $1/2$ -特異点に収縮されて、 \mathbb{Q} -Fano \tilde{X} が得られます。ここで、 \tilde{X}' の \mathbb{Z}_2 -被覆 \tilde{X}' の Picard 数は Lefschetz の定理より 2 なので、 \tilde{X} の Picard 数は 1 であり、したがって、 \tilde{X} の Picard 数も 1 になります (このように、構成した例が Picard 数 1 であることをチェックするのも大切な事です)。

なお、この場合、 $Y \dashrightarrow \tilde{X}'$ は $|-2K_Y - E|$ によって定まる双有理写像になっています。また、 $h^0(-K_X) = 3$ となることも見やすいです。

フロップ $\tilde{Y}' \dashrightarrow \tilde{Y}$ はフロップ $Y' \dashrightarrow Y$ を引き起こし、前者は 12 本のフロップ曲線を持つことから、 \mathbb{Z}_2 で割って得られる後者は 6 本のフロップ曲線を持ちます。これが $e = 6$ を解釈しています。しかし、これはあくまで一般的に解釈すればの話なわけで、この意味で、two ray game で得られた数値的結果というのは、すべての状況 (退化) を抽象化したデータと言うことが出来ます。だからすべてを含めると言えますが、ここでしたように一般性条件を課した例のみに言及することが多いです。特別な場合は、目的に応じてその都度、数値的データから取り出せばよいと思います。例えば、(この例とは関係あるか分かりませんが) affine 3-space のコンパクト化になっているような Fano 多様体にはできるだけ special に two ray game のデータを解釈して得られるものが多いです。

いずれにしても数値的なデータからこのような射影幾何が掘り出せるのは楽しい事です。

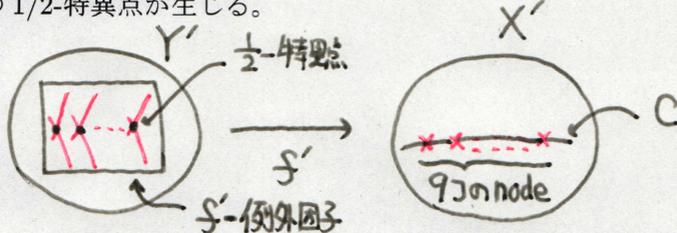
4.2. \tilde{X}' が 9-nodal double solid になる例.

9-nodal double solid とは、ここでは、 \mathbb{P}^3 の二重被覆で分岐が 9 つの node を持つ 4 次曲面であるものとしています。 \tilde{X} が 9-nodal double solid と双有理同値になるクラスが少なくとも 3 つあります (これらは例も出ています)。なぜ複数の場合に double solids が 9 つの node を持って出てくるのか、現象論的

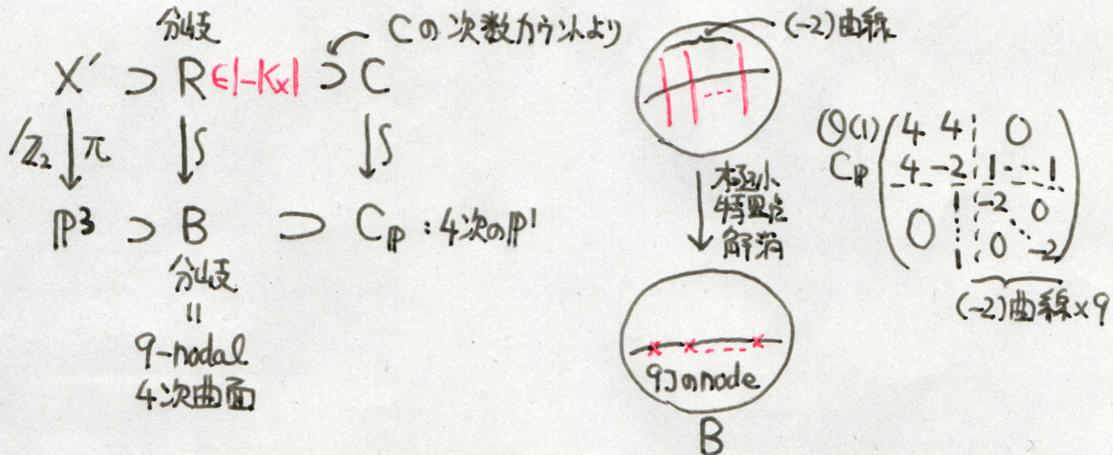
ではありますが、興味を惹かれるところです。また、出てくる 9-nodal double solid はすべて \mathbb{Q} -factorial になっています。Cheltsov と Shramov は「 \mathbb{Q} -factorial 9-nodal double solid は非有理的であろう」と予想していますが、これは未解決問題です。

ここではそのうちの一つを取り上げます。それは $h^0(-K_X) = 2, N = 10, (-K_X)^3 = 3$ を満たす \mathbb{Q} -Fano X です。この一つの $1/2$ -特異点を選んで two ray game を行うと次のデータを持つ図式を得ます (一般的状況を記しています) :

- $f': Y' \rightarrow X'$ は因子を曲線 C につぶす因子収縮である。
- X' は 9-nodal double solid である。
- $C \simeq \mathbb{P}^1$ であり、 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$ の引き戻しに関する C の次数は 4 である。 C は X' の 9 つの node を通る。この場合、 f' は C に沿った爆発ではなく、 C 上の例外因子内に X' の 9 つの node に対応した 9 つの $1/2$ -特異点が生じる。



- $e = 10$ かつ $n = 0$ である。 $n = 0$ はフリップがないことを意味する。

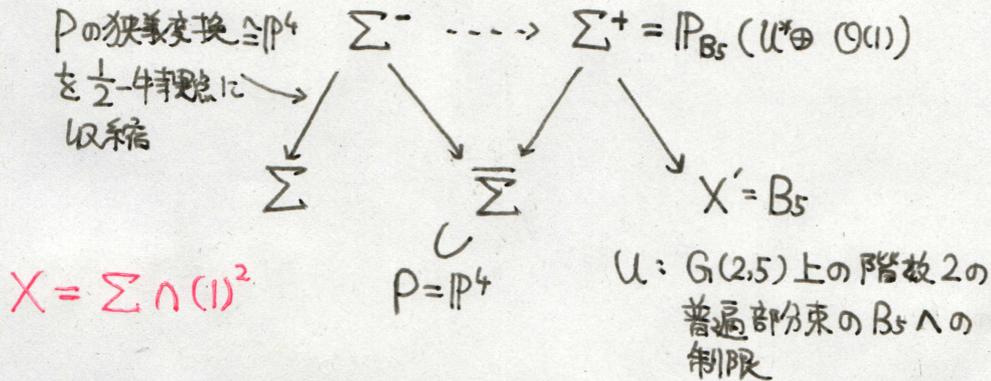


この例については、 X' の存在も含めて、end result のデータをどう構成するのが一番厄介なところ です。それを手短かに説明します。まず、次数勘定から C は $X' \rightarrow \mathbb{P}^3$ の分岐因子 R に含まれる事が分かります。曲面 R は \mathbb{P}^3 の 4 次曲面 B に同型に移りますが、この B の例として、上に記した交点行列を持つものを、 $K3$ 曲面の Torelli の定理を使って構成します。

f の例外因子 E の X' における狭義変換に相当する曲面の取り方はやや込み入っていますが、 \mathbb{P}^3 の 3 次曲面で、 $C_{\mathbb{P}}$ に沿って分岐因子 B に接するものの逆像として得られます。その存在は、 \mathbb{P}^3 を $C_{\mathbb{P}}$ で爆発して quintic del Pezzo 3-fold に行くことで分かります。

$h^0(-K_X) = 2$ は見やすいです。 C の \mathbb{P}^3 における像 $C_{\mathbb{P}}$ は次数 4 の \mathbb{P}^1 ですが、よく知られているように、そのような $C_{\mathbb{P}}$ はただ一つの 2 次曲面 Q に含まれます。 Y' において π^*Q と R が、 $|-K_{Y'}|$ 内の C を含む元のなすペンシルを生成しますが、まさにそのペンシルの元が $|-K_X|$ の元に移ります。これが $h^0(-K_X) = 2$ を説明しています。

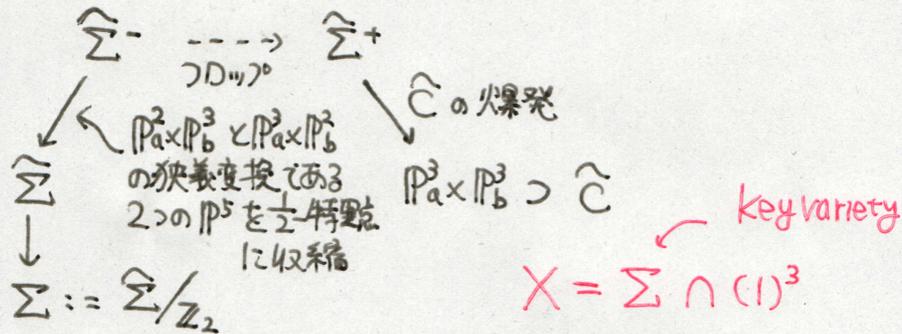
また、線形系 $|-2K_Y - E|$ によって、 $Y \dashrightarrow X'$ と二重被覆 $X' \rightarrow \mathbb{P}^3$ の合成が定まっています。



$\mathbb{P}_{B_5}(U^* \oplus \mathcal{O}(1))$ を調べれば分かるように、 B_5 に SL_2 が半等質的に作用していることを踏まえると、 Σ には代数群 $C^5 \times SL_2$ が半等質的に作用しています。これが摩天楼法の一つの典型で、出てくる key variety は多くの場合、代数群が半等質的に作用します。ところが代数群はほとんどの場合、この例のように簡約ではありません。今の所、これらの key variety を含む適切な半等質多様体のクラス（単純代数群の等質空間のように、組み合わせ論に持ち込めるような）が見つかりません。

●平屋法：end point を地面で伸ばしてゆく（少数派）。

例：先に説明した $h^0(-K_X) = 3, N = 9$ なる X に平屋法が適用できます。



\tilde{X}' を定義する $(1,1)$ 因子3つを取り払います。つまり $\mathbb{P}_a^3 \times \mathbb{P}_b^3$ そのものを考えます。これが平屋で延ばすということです。ただし \tilde{C} は残しておきます。 $\mathbb{P}_a^3 \times \mathbb{P}_b^3$ を \tilde{C} で爆発してフロップします。フロップの記述は次のようになっています。 $(\mathbb{P}_a^2 \times \mathbb{P}_b^3) \cap (\mathbb{P}_a^3 \times \mathbb{P}_b^2)$ が、 $\mathbb{P}_a^2 \times \mathbb{P}_b^2$ で交わっています。 $\mathbb{P}_a^2 \times \mathbb{P}_b^2$ の中で、 \tilde{C} は3つの $(1,1)$ 因子の完全交叉でしたから、 $\mathbb{P}_a^2 \times \mathbb{P}_b^2$ は \tilde{C} で爆発すると、 \mathbb{P}^2 上の次数6の del Pezzo fibration ($dp_6\text{-fib}/\mathbb{P}^2$) になります。交点数の簡単な計算から、 $dp_6\text{-fib}/\mathbb{P}^2$ の構造射は、 $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ の爆発の中で、フロップ型収縮であることが分かります。実はフロップ型収縮で潰れる曲線は他にもあります。そのせいでフロップの構成はやや込み入ったものになりますが、詳細は略します。結果としては、フロップすると \mathbb{P}^2 に沿って generic $(\mathbb{P}^1)^3$ -錐特異点が生じます。

フロップが終わると、 $\mathbb{P}_a^2 \times \mathbb{P}_b^3$ と $\mathbb{P}_a^3 \times \mathbb{P}_b^2$ は \mathbb{P}^5 となり、互いに交わらなくなります。さらに、これらを2つの $1/2(1^5)$ -特異点に収縮することが出来ます。こうして得られる $\mathbb{P}_a^3 \times \mathbb{P}_b^3$ の双有理像を $\tilde{\Sigma}$ とすると、これまでの構成は \mathbb{Z}_2 -不変ですから、 $\tilde{\Sigma}$ にも \mathbb{Z}_2 が作用します。その商を Σ とし、その Picard 群の豊富な生成元を H とすると、 X は Σ において、 $|H|$ の3つの元による完全交叉となっていることが分かります。

平屋法では、この例のように爆発の中心 C は取り残されてしまいます。よって C のモジュライが key variety に残ってしまいます。このような現象は非特異 Fano では起こりませんでした。また不思議なことに平屋法で楕円曲線のモジュライが key variety に残ってしまう事が多いのです。