

SECANT VARIETIES OF ADJOINT VARIETIES —ORBIT DECOMPOSITION—

楫 元

早稲田大学理工学部

0. 序

複素単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ から定義される等質射影多様体として, 随伴多様体 $X(\mathfrak{g}) \subseteq \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$ がある. 射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ に対して, その secant line の全体から secant variety, $\text{Sec } X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ が定義されるが, $X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ が等質射影多様体の場合, $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$ への作用は線型なので, $\text{Sec } X$ へも作用が定まる. そこで, 自然に次が考えられる:

問題: 随伴多様体の secant variety, $\text{Sec } X(\mathfrak{g})$ の軌道分解を求めよ.

ここではこの問題に対する解答について解説したい.

金行壯二氏 (上智大学理工学部) から「 $\text{Sec } X(\mathfrak{g})$ に含まれる軌道のは数は $\text{rk } \mathfrak{g} + 1$ ですか?」との御質問を戴いたことが, 上の問題を解くきっかけ, 原動力となった. 質問のココロは次の通り: 金行氏は, 複素単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の order 1 の次数分解から得られる simple reducible pseudo-hermitian symmetric space M について, その $\text{Int } \mathfrak{g}$ -同変なコンパクト化 $\widehat{M}$, および, その軌道分解を与えている: ここに, その軌道のは数は, $\text{rk } \mathfrak{g} + 1$ である ([K, Proposition 3, Theorem 4] 参照). 一方, 接触型次数分解に対する M を考えると, $\text{rk } \mathfrak{g} \geq 2$ の場合, 随伴多様体の secant variety, $\text{Sec } X(\mathfrak{g})$ は, M をある有限群 F で割った空間 M/F のコンパクト化となっている ([KOY, Proposition 5.3] 参照).

これは, 保倉理美氏 (福井大学教育学部) との共同研究 [KY] の一部である.

1. 定義と結果

術語をキチンと定義すると,

定義 1: 複素単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して, $\mathfrak{g}$ を Lie 環とする単連結複素単純代数群 G を取る. その随伴表現 $\text{Ad} : G \curvearrowright \mathfrak{g}$ から引き起こされる複素射影空間への作用 $G \curvearrowright \mathbb{P}_*(\mathfrak{g}) := (\mathfrak{g} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$ の唯一の閉軌道を ($\mathfrak{g}$ から定まる) 随伴多様体, **adjoint variety** と呼び, $X(\mathfrak{g})$ と書き表す.

Cartan 部分環をひとつ取り, ルート系の適当な順序をひとつ定めて, それに関する highest root vector を $X_\lambda \in \mathfrak{g}$ とすれば,

$$X(\mathfrak{g}) = G \cdot x_+ = \pi(G \cdot X_\lambda) \subseteq \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$$

講演予稿: 研究集会〈リー群と幾何学〉, 1998/12/21–24@横浜市立大学よこはまアーバンカレッジ (横浜, 上大岡): 1998/12/23 (水), 15:30–16:20

と書かれる. ただし, $\pi : \mathfrak{g} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_*(\mathfrak{g}); Y \mapsto \mathbb{C} \cdot Y$ は標準的射影で, $x_+ := \pi X_\lambda$ とおいた. $\text{Ad}(G) = \text{Int } \mathfrak{g} \subseteq GL(\mathfrak{g})$ なので, $X(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ により一意的に定まる.

定義 2: $X \subseteq \mathbb{P}_\mathbb{C}^N$ を複素射影多様体とする. 2 点 $x, y \in X, x \neq y$, を結ぶ射影空間 $\mathbb{P}_\mathbb{C}^N$ 内の (複素射影) 直線を **secant line** と呼び, $x * y$ で表す. さらに, それらすべての和集合の閉包,

$$\text{Sec } X := \overline{\bigcup_{x, y \in X, x \neq y} x * y} \subseteq \mathbb{P}_\mathbb{C}^N$$

を $X \subseteq \mathbb{P}_\mathbb{C}^N$ の **secant variety** と呼ぶ.

secant variety は既約な代数的集合となり, 一般的には特異点をもつ.

随伴作用 $\text{Ad} : \text{Int } \mathfrak{g} \curvearrowright \mathfrak{g}$ に関する軌道を考える. 零ではない巾零軌道の中には, 閉包順序に関する極小元がただ一つ存在することが知られている. ここで, 閉包順序とは, 巾零軌道 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subseteq \mathfrak{g}$ に対して, $\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2 \Leftrightarrow \mathcal{O}_1 \subseteq \overline{\mathcal{O}_2}$ で定まる半順序のことである.

その極小巾零軌道を $\mathcal{O}_{\min} \subseteq \mathfrak{g}$ と書くことにすれば, $\text{Int } \mathfrak{g} \cdot X_\lambda = \mathcal{O}_{\min}$ であることが知られており, したがって

$$X(\mathfrak{g}) = \pi \mathcal{O}_{\min}$$

である. 一方, $\mathfrak{g}$ の lowest root vector $X_{-\lambda}$ をとり, $H := [X_\lambda, X_{-\lambda}]$ とおく. [KOY, Proposition 5.3] により

$$\text{Sec } X(\mathfrak{g}) = \overline{\text{Int } \mathfrak{g} \cdot \pi H}$$

である.

我々の主結果は,

定理 [KY]: 複素単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ から定まる随伴多様体を $X(\mathfrak{g}) \subseteq \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$ とするとき:

(a) その secant variety, $\text{Sec } X(\mathfrak{g})$ は, 半単純軌道の射影化 $\text{Int } \mathfrak{g} \cdot \pi H$ と有限個の巾零軌道の射影化の和に分解される: つまり, 有限個の巾零軌道, $\mathcal{O}_0 := \mathcal{O}_{\min}, \mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_r \subseteq \mathfrak{g}$ が存在して,

$$\text{Sec } X(\mathfrak{g}) = \text{Int } \mathfrak{g} \cdot \pi H \sqcup \bigsqcup_{i=0}^r \pi \mathcal{O}_i$$

となる.

(b) 巾零軌道 $\mathcal{O}_0, \dots, \mathcal{O}_r$ は唯一の極大軌道を持つ. したがって, それを $\mathcal{O}_{\max}$ と書くことにすると, 任意の巾零軌道 $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ に対して,

$$\pi \mathcal{O} \subseteq \text{Sec } X(\mathfrak{g}) \Leftrightarrow \mathcal{O} \leq \mathcal{O}_{\max}$$

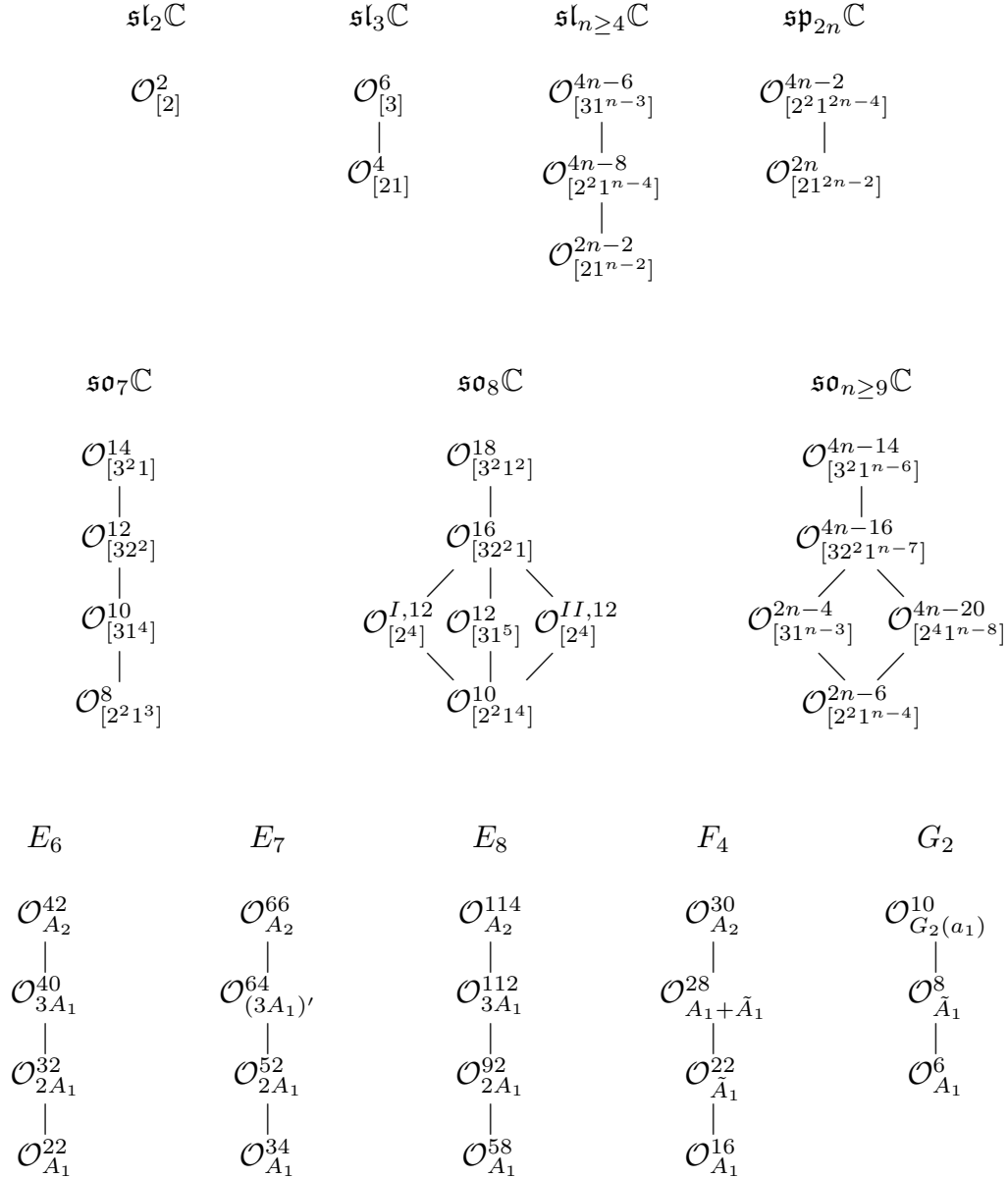
となる.

(c) $\text{codim}(\pi \mathcal{O}_{\max}, \text{Sec } X(\mathfrak{g})) = 1$.

(d) 極大軌道 $\mathcal{O}_{\max}$ は, 具体的には次の通り:

$\mathfrak{g}$	$\mathcal{O}_{\max}$
$\mathfrak{sl}_2 \mathbb{C}$	$\mathcal{O}_{[2]}$
$\mathfrak{sl}_{n \geq 3} \mathbb{C}$	$\mathcal{O}_{[3^{1^{n-3}}]}$
$\mathfrak{sp}_{2n} \mathbb{C}$	$\mathcal{O}_{[2^2 1^{2n-4}]}$
$\mathfrak{so}_{n \geq 6} \mathbb{C}$	$\mathcal{O}_{[3^2 1^{n-6}]}$
$E_{6,7,8}, F_4$	$\mathcal{O}_{A_2}$
G_2	$\mathcal{O}_{G_2(a_1)}$

定理の系として以下のように, $\text{Sec } X(\mathfrak{g})$ 内の軌道を与える巾零軌道の Hasse diagram が得られる:



記法: 巾零軌道に対する上の記号は, 古典型についてはその分割型で, また, 例外型については Bala-Carter の記法で書かれている. また, 上付き添え字は, 各軌道の次元を表わしている.

複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の巾零軌道は一般に, weighted Dynkin diagram を用いて分類されるが, さらに, 古典型 $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{sl}_N\mathbb{C}$ の場合には N の分割により巾零軌道は分類される. また, 例外型 $\mathfrak{g}$ に対しては Bala-Carter による分類がある. これらの, 巾零軌道の分類の一般論については, [C], [CM] を参照のこと.

2. 証明

まず, 定理の証明で鍵となる命題について述べ, 次に, 定理の証明の概略を述べる.

半単純元 $H := [X_\lambda, X_{-\lambda}] \in \mathfrak{g}$ を適当にスカラー倍することにより, $\text{ad } H$ の固有空間分解で,

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{-2 \leq i \leq 2} \mathfrak{g}_i, \quad \mathfrak{g}_{\pm 2} = \mathbb{C} \cdot X_{\pm \lambda}$$

を満たすものが得られる. ただし, $\mathfrak{g}_i$ は固有値 i の固有空間である. $\mathrm{rk} \mathfrak{g} \geq 2$ の場合は特に, 接触型次数分解と呼ばれる.

命題 1: $\mathrm{Sec} X(\mathfrak{g})$ 内の軌道は, $\mathrm{Int} \mathfrak{g} \cdot \pi H$ 以外はすべて $\mathbb{P}_*(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2)$ と交わる. 特に, ある巾零軌道 $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ の射影化 $\pi \mathcal{O}$ として得られる.

命題 2: 複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の半単純元 $E \in \mathfrak{g}$ に対して, その随伴軌道の射影化 $\mathrm{Int} \mathfrak{g} \cdot \pi E \subseteq \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$ を考えると, その閉包内での補集合,

$$\overline{\mathrm{Int} \mathfrak{g} \cdot \pi E} \setminus \mathrm{Int} \mathfrak{g} \cdot \pi E$$

は, 既約成分の次元が全て等しく, かつ, $\overline{\mathrm{Int} \mathfrak{g} \cdot \pi E}$ において余次元 1 である.

命題 1 の証明には $\mathrm{Sec} X(\mathfrak{g}) = \mathrm{Int} \mathfrak{g} \cdot \mathbb{P}_*(\mathbb{C} \cdot H \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2)$ となること ([KOY] 参照) を使う. また, 命題 2 の証明では, $\mathrm{Int} \mathfrak{g} \cdot \pi E$ がアファイン多様体となることを示し, [H, II, Proposition 3.1] を使う.

定理の証明の概略: よく知られているように巾零軌道は有限個なので, (a) は命題 1 から従う.

命題 2 により $\mathrm{Sec} X(\mathfrak{g}) \setminus \mathrm{Int} \mathfrak{g} \cdot \pi H$ の既約成分はすべて $\mathrm{Sec} X(\mathfrak{g}) = \overline{\mathrm{Int} \mathfrak{g} \cdot \pi H}$ において余次元 1 なので, 任意の $\mathcal{O}_i$ に対して

$$\mathcal{O}_i \text{ は } \{\mathcal{O}_0, \dots, \mathcal{O}_r\} \text{ の極大元} \Leftrightarrow \mathrm{codim}(\pi \mathcal{O}_i, \mathrm{Sec} X(\mathfrak{g})) = 1$$

となり, また, 任意の巾零軌道 $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ に対して

$$\pi \mathcal{O} \subseteq \mathrm{Sec} X(\mathfrak{g}) \Leftrightarrow \{\mathcal{O}_0, \dots, \mathcal{O}_r\} \text{ の極大元 } \mathcal{O}_i \text{ が存在して, } \mathcal{O} \leq \mathcal{O}_i$$

となる. したがって特に, 極大軌道 $\mathcal{O}_i$ は次の条件を満たす:

$$(\mathrm{codim}1) \quad \dim \mathcal{O}_i = 2 \dim \mathcal{O}_{\min} - 2.$$

というのは, [KOY, Theorem 5.1] により $\dim \mathrm{Sec} X(\mathfrak{g}) = 2 \dim X(\mathfrak{g})$ であり, また, 巾零軌道 $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ に対しては一般に, $\dim \pi \mathcal{O} = \dim \mathcal{O} - 1$ となるからである.

以上により, 極大軌道 $\mathcal{O}_{\max}$ の一意性, そして, $\mathcal{O}_{\max}$ が (d) の表の通りになることを確かめればよい.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$, または, $E_{6,7,8}, G_2$ 型の場合: 巾零軌道の分類から (codim1) を満たす巾零軌道は, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$ の場合は $\mathcal{O}_{[2^{21}1^{2n-4}]}$, $E_{6,7,8}, G_2$ 型の場合は $\mathcal{O}_{A_2}$ であり, ただ一つしかないことが示される. 一方, 命題 2 によれば (codim1) を満たす巾零軌道は必ず secant variety 内に存在する. したがってその, (codim1) を満たす巾零軌道を $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ と書けば, $\pi \mathcal{O} \subseteq \mathrm{Sec} X(\mathfrak{g})$, かつ, $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}_0, \dots, \mathcal{O}_r$ のただ一つの極大軌道である.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n\mathbb{C}, \mathfrak{so}_n\mathbb{C}$ の場合: (codim1) を満たす軌道は一意的とは限らない. しかし, secant variety 内に含まれる可能性のある巾零軌道はただ一つで, それは (d) の表に挙げた通りであることが, 次を使って示される:

補題 1: 古典型複素単純 Lie 環 $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{sl}_N\mathbb{C}$ においては, 任意の軌道 $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{g}$ に対して,

$$\pi \mathcal{O} \subseteq \mathrm{Sec} X(\mathfrak{g}) \Rightarrow \mathrm{rk} \mathcal{O} \leq 2 \mathrm{rk} \mathcal{O}_{\min}.$$

F_4 型の場合: 巾零軌道の分類によれば (codim1) を満たす軌道が 2 個あり, それらの Bala-Carter label と対応する weighted Dynkin diagram は,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{A_2} & \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} & \mathcal{O}_{\widetilde{A_2}} & \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 2 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \end{array}$$

である. $\pi\mathcal{O}_{\widetilde{A_2}} \not\subseteq \text{Sec } X(F_4)$ を示せばよい.

$\text{Int } \mathfrak{g} \curvearrowright \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$ の制限として自然に

$$\text{Int } \mathfrak{g}_0 \curvearrowright \mathbb{P}_*(\mathfrak{g}_1)$$

が定義される. $\text{Sec } X(\mathfrak{g})$ の軌道分解のうちで, $\text{Int } \mathfrak{g} \cdot \pi H$ と $X(\mathfrak{g}) = \text{Int } \mathfrak{g} \cdot \pi X_\lambda$ 以外の軌道たちの完全代表系は, $\text{Int } \mathfrak{g}_0 \curvearrowright \mathbb{P}_*(\mathfrak{g}_1)$ の軌道分解の完全代表系の中に存在することが, 命題 1 と次を使って示される:

補題 2: 零ではない元 $Y_1 \in \mathfrak{g}_1$ に対しては, $\pi(Y_1 + \mathbb{C} \cdot X_\lambda) \subseteq \text{Int } \mathfrak{g} \cdot \pi Y_1$ となる.

注意: もしも $X_\lambda \in \text{Int } \mathfrak{g} \cdot Y_1$ となる $Y_1 \in \mathfrak{g}_1$ が存在するならば, 軌道 $X(\mathfrak{g}) = \text{Int } \mathfrak{g} \cdot \pi X_\lambda$ も $\text{Int } \mathfrak{g}_0 \curvearrowright \mathbb{P}_*(\mathfrak{g}_1)$ の完全代表系から得られるが, 常にそのような Y_1 が存在するとは限らない: 実際, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$ の場合は, $X(\mathfrak{g}) \cap \mathbb{P}_*(\mathfrak{g}_1) = \emptyset$ で, そのような Y_1 が存在しない.

そして, 最後に,

補題 3: F_4 型複素単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対して, その接触型次数分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{-2 \leq i \leq 2} \mathfrak{g}_i$ を考え,

$$\{\Phi_{\bar{i}} | 1 \leq i \leq 14\}$$

を [Y, Appendix] で与えられている $\mathfrak{g}_1$ の基底とする. このとき, $\text{Int } \mathfrak{g}_0 \curvearrowright \mathbb{P}_*(\mathfrak{g}_1)$ の軌道分解の完全代表系, そして, 各代表元を通る $\mathfrak{g}$ の巾零軌道の weighted Dynkin diagram は次の通り:

$\Phi_{\bar{7}}$	$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \text{---} \bullet \rightrightarrows \bullet & \text{---} \bullet & \end{array}$
$\Phi_{\bar{7}} + \Phi_{\bar{8}}$	$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \bullet & \text{---} \bullet \rightrightarrows \bullet & \text{---} \bullet & \end{array}$
$\Phi_{\bar{7}} + \Phi_{\bar{8}} + \Phi_{\bar{9}}$	$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bullet & \text{---} \bullet \rightrightarrows \bullet & \text{---} \bullet & \end{array}$
$\Phi_{\bar{7}} + \Phi_{\bar{8}} + \Phi_{\bar{9}} + \Phi_{\bar{14}}$	$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \text{---} \bullet \rightrightarrows \bullet & \text{---} \bullet & \end{array}$

補題 3 の軌道の Bala-Carter label はそれぞれ, $\mathcal{O}_{A_1}, \mathcal{O}_{\widetilde{A_1}}, \mathcal{O}_{A_1 + \widetilde{A_1}}, \mathcal{O}_{A_2}$ であり, $\mathcal{O}_{\widetilde{A_2}}$ は現れない. したがって, $\pi\mathcal{O}_{\widetilde{A_2}} \not\subseteq \text{Sec } X(F_4)$ となり, $\mathcal{O}_{A_2}$ が唯一の極大軌道である. $\square$

∞. 参考文献

- [C]. R. W. Carter, *Finite groups of Lie type—Conjugacy classes and complex characters—*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Chichester, 1993.
- [CM]. D. H. Collingwood, W. M. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1993.
- [H]. R. Hartshorne, *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Lecture Notes in Math. **156**, Springer-Verlag, New York, 1970.
- [I]. J-I. Igusa, *A classification of spinors up to dimension twelve*, Amer. J. Math. **91** (1970), 997–1028.
- [KOY]. H. Kaji, M. Ohno, O. Yasukura, *Adjoint varieties and their secant varieties*, Indag. Math. (to appear).
- [KY]. H. Kaji, O. Yasukura, *Projective geometry of adjoint varieties*, in preparation.
- [K]. S. Kaneyuki, *Compactifications of reducible pseudo-hermitian symmetric spaces and their applications*, Preprint.

[Y]. K. Yamaguti, *On weak representations of a class of ternary systems*, Mem. Fac. Gen. Ed., Kumamoto Univ., Ser. Nat. Sci. **9** (1974), 1–8.

e-mail address: `kaji@mse.waseda.ac.jp`