THE REFLEXIVITY OF A SEGRE PRODUCT OF PROJECTIVE VARIETIES

楫 元 (早大理工)　深澤 知 (早大理工/学振)

正標数の射影代数幾何においては標数零の場合と全く異なるさまざまな現象が観察されている: たとえば, 多重接線の数が有限ではない射影曲線や射影双対性が成立しない多様体が正標数においては存在する. このような正標数特有の現象を制御するための射影多様体に対する重要な条件のひとつとして *reflexivity* が知られている. 与えられた射影多様体に対する reflexivity の判定は, 正標数の射影代数幾何における重要な問題の一つであるといえよう (reflexivity などの定義については前講演の予稿を参照のこと).

ここでは射影多様体のセグレ積(すなわち, 直積のセグレ埋め込みによる像) について考える. Hefez-Thorup [4] は 2 つの射影空間のセグレ積はすべて reflexive であることを証明した. 楫 [5] は, 2 つ以上の射影空間のセグレ積が reflexive であるための必要十分条件を見出した: たとえば, 標数 $p = 2$ のセグレ積 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^7$ は non-reflexive である. 深澤 [1] は, 射影直線と $p + 1$ 次の Fermat 超曲面とのセグレ積が non-reflexive であることを証明した.

我々は次の結果を得た:

Theorem ([2])**.** $Y \subseteq \mathbb{P}^N$ を次元 n の射影多様体とし, r を Y の一般ヘッセ行列の階数とするとき, セグレ積 $\mathbb{P}^m \times Y$ が non-reflexive であるための必要十分条件は以下のいずれかが満たされることである:

(1) $0 < n - m < r$, $p = 2$ であり $m + n$ は奇数である.

(2) $n - m > r$ かつ Y は non-reflexive.

ここで Y の一般ヘッセ行列とは, 一般の点 $(y, H) \in C(Y)$ に対して H を定義する $\mathbb{P}^N$ 上の有理関数を h とするときの $h|Y$ の y におけるヘッセ行列のことである.

証明には, 余法多様体 $C(\mathbb{P}^m \times Y)$ から双対多様体 $(\mathbb{P}^m \times Y)^*$ への自然な射影 $\pi : C(\mathbb{P}^m \times Y) \to (\mathbb{P}^m \times Y)^*$ について, 一般の点における微分 $d\pi$ の階数と像 $(\mathbb{P}^m \times Y)^*$ の次元を比較することによりその generic smoothness を調べ, Monge-Segre-Wallace の判定法 [3] を適用する. ネックは, 標数に対する仮定無しに $(\mathbb{P}^m \times Y)^*$ の次元を求めるところにある.

この Theorem と既知の事実を合わせると次の表を得る:

Table 1. The reflexivity of Segre products of projective varieties

Y	p	r	R/N	$\mathbb{P}^m \times Y$	R/N
$\mathbb{P}^n$	≥ 0	0	R	$\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ $(m \geq n)$	R
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	$\neq 2$	2	R	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	R
$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$	2	4	R	$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$	R
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	2	2	N	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	R
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$	≥ 0	2	R	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$	R
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$	≥ 0	2	R	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$	R
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	2	2	R	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	N
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$	2	2	R	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$	N
F_d $(d \equiv 1 \mod p)$	> 0	0	N	$\mathbb{P}^m \times F_d$ $(m < n)$	N

R, N はそれぞれ多様体が reflexive, non-reflexive であることを表わす. F_d は $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の次数 d の Fermat 超曲面である.

一般に射影多様体のセグレ積のガウス写像は像への双有理写像となることが示される. したがって我々の Theorem で得られる non-reflexive 多様体の例は, いずれも Kleiman-Piene の問題 [6, pp. 108–109] に対する否定的解答を与えることがわかる: たとえば, 楫 [5] により与えられたその最初の例は Theorem の条件 (1) を満たしており, 深澤 [1] により与えられた例は Theorem の条件 (2) を満たしている.

References

[1] S. Fukasawa, On Kleiman-Piene's question for Gauss maps, Compos. Math. **142** (2006), 1305–1307.

[2] S. Fukasawa and H. Kaji, The reflexivity of a Segre product of projective varieties, Math. Ann. (to appear).

[3] A. Hefez, S. L. Kleiman, Notes on the duality of projective varieties, "Geometry Today," Progr. Math. **60**, Birkhäuser, Boston, 1985, pp. 143–183.

[4] A. Hefez and A. Thorup, Reflexivity of Grassmannians and Segre varieties, Comm. Algebra **15** (1987), 1095–1108.

[5] H. Kaji, On the duals of Segre varieties, Geom. Dedicata **99** (2003), 221–229.

[6] S. L. Kleiman, R. Piene, On the inseparability of the Gauss map, "Enumerative Algebraic Geometry (Proceedings of the 1989 Zeuthen Symposium)," Contemp. Math. **123**, Amer. Math. Soc., Providence, 1991, pp.107–129.