EXISTENCE OF A NON-REFLEXIVE EMBEDDING WITH BIRATIONAL GAUSS MAP FOR A PROJECTIVE VARIETY

楫 元 (早大理工)　深澤 知 (早大理工/学振)

この講演の目的は, 射影多様体に対する, ガウス写像が双有理となる non-reflexive 埋め込みについて, 講演者らにより得られた結果について報告することである.

基礎体 K を標数 $p \geq 0$ の代数閉体とし, $X \subset \mathbb{P}^N$ を (既約な) n 次元射影多様体とする. X 上のガウス写像 γ とは非特異点 $x \in X_{\mathrm{sm}}$ に対して射影接空間 T_xX を対応させる, X からグラスマン多様体 $\mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N)$ への有理写像のことである. $C(X) = \overline{\{(x, H) \in X_{\mathrm{sm}} \times \check{\mathbb{P}}^N | T_xX \subset H\}} \subset X \times \check{\mathbb{P}}^N$ を conormal variety ($\check{\mathbb{P}}^N$ は $\mathbb{P}^N$ の超平面全体) といい, 自然な射影 $\pi : C(X) \to \mathbb{P}^{N*}$ の像 $X^* := \pi(C(X))$ を双対多様体という. $X^* \subset \check{\mathbb{P}}^N$ の conormal variety $C(X^*)$ も同様に定義され, 自然な同一視 $\check{\check{\mathbb{P}}}^N = \mathbb{P}^N$ により $C(X^*) \subset \mathbb{P}^N \times \check{\mathbb{P}}^N$ とみなせる. $C(X)$ と $C(X^*)$ が $\mathbb{P}^N \times \check{\mathbb{P}}^N$ の中で一致する時, X は *reflexive* であるという. X が reflexive ならば射影双対性 $X^{**} = X$ が成立することがすぐに確かめられる. Monge-Segre-Wallace の判定法 ([4]) により, X が reflexive であることと, 射影 $\pi : C(X) \to X^*$ が generically smooth であることは同値であることが知られている. よって, 標数零のときにはいつでも X は reflexive であり, 射影双対性も成立する. 正標数においては実際に, 射影双対性が成立しない例が存在する.

X が曲線のとき, ガウス写像の (像への) generic smoothness は reflexivity と同値であることがよく知られている ([4], [5], [8]). また, 射影多様体 X が reflexive であるとき, ガウス写像の一般ファイバーは scheme-theoretic に線形多様体であることが知られている ([7]). 従って「X が reflexive であれば, ガウス写像は (像へ) generically smooth」となっている. では高次元の場合, 逆はどうなるか？これは Kleiman と Piene により提出された問題 [7, pp.108–109] の特別な (しかし一番重要な) 場合である. これに対し講演者らは, ガウス写像が双有理でありかつ non-reflexive である多様体の例を 3 以上の任意次元で提示することで, その解答が否定的であることを示した ([1], [6]). また曲面につ

いては, ガウス写像の generic smoothness と reflexivity は同値であることを示した ([2]).

次の段階として,「ガウス写像が generically smooth かつ non-reflexive となるような埋め込みがいつ存在するのか？」という問題が自然に生じる. 講演者らは次を得た.

Theorem ([3])**.** *$X \subset \mathbb{P}^N$ を 3 次元以上の (線型でない) 射影多様体とする. X のガウス写像の微分が恒等的に零であれば, X は別の射影空間 $\mathbb{P}^M$ への埋め込みで, X は non-reflexive かつガウス写像が双有理となるものが存在する.*

Theorem の仮定を満たす X の例として, 射影空間 $\mathbb{P}^n$ (のフロベニウス写像のグラフ), 次数が mod p で 1 となる Fermat 超曲面が挙げられる. これにより, Kleiman-Piene の問題に対する否定的解答を与える例がかなりたくさん存在することがわかってきている.

References

[1] S. Fukasawa, On Kleiman-Piene's question for Gauss maps, Compositio Math. **142** (2006), 1305–1307.

[2] S. Fukasawa and H. Kaji, The separability of the Gauss map and the reflexivity for a projective surface, Math. Z. **256** (2007), 699–703.

[3] S. Fukasawa and H. Kaji, Existence of a non-reflexive embedding with birational Gauss map for a projective variety, Math. Nachr. (to appear)

[4] A. Hefez and S. Kleiman, Notes on the duality of projective varieties, "Geometry Today", Prog. Math., vol 60, Birkhäuser, Boston, 1985, pp. 143–183.

[5] H. Kaji, On the inseparable degrees of the Gauss map and the projection of the conormal variety to the dual of higher order for space curves, Math. Ann. **292** (1992), 529–532.

[6] H. Kaji, On the duals of Segre varieties, Geom. Dedicata **99** (2003), 221–229.

[7] S. Kleiman and R. Piene, On the inseparability of the Gauss map, In: Contemp. Math. 123, Amer. Math. Soc., Providence, 1991, pp.107–129.

[8] J. Voloch, On the geometry of space curves, Proceedings of the 10th School of Algebra, Vitoria, Brazil, 1989, pp. 121–122.