

SECANT VARIETIES OF HOMOGENEOUS PROJECTIVE VARIETIES

楫 元

有馬 哲先生へ

早稲田大学理工学部数学科
kaji@mn.waseda.ac.jp

§0. 序

(0.0) $X \subseteq \mathbb{P}^N$ を非特異複素射影多様体で, 射影空間 $\mathbb{P}^N$ で非退化 (つまり, どんな超平面にも含まれない) と仮定する. すべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える.

(0.1) 定義: $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して,

$$\mathrm{Sec} X := \overline{\bigcup_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} x * y} \subseteq \mathbb{P}^N$$

を X の secant variety と呼ぶ. ここで, $x * y$ は点 x, y を結ぶ, 射影空間 $\mathbb{P}^N$ 内の直線.

(0.2) 射影多様体の secant variety, 特にその退化に興味があるのですが, ここでの話は大きく分けて

I secant variety の退化する等質射影多様体 (詳しくは単純代数群の軌道として現われる射影多様体) の分類

II higher secant variety について

のふたつ.

PART I

§1. 背景と主結果

(1.1) 動機のひとつは, 次を発端としている:

Hartshorne's Conjecture on Linear Normality [Ht]: *For non-degenerate, smooth $X \subseteq \mathbb{P}^m$*

$$\dim X \geq 2\mathrm{codim} X - 1 \Rightarrow X \subseteq \mathbb{P}^m : \text{linearly normal}$$

(1.2) ここで, $X \subseteq \mathbb{P}^m$ が linearly normal というのは, 自然な写像

$$H^0(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}(1)) \twoheadrightarrow H^0(X, \mathcal{O}(1))$$

が surjective となる, ということ.

(1.3) この予想を解決したのが F. L. Zak であり, 彼の結果は次のように述べられる:

Theorem (Zak, 1979) [Z]: *For non-degenerate, smooth $X \subseteq \mathbb{P}^N$*

$$\text{Sec } X \neq \mathbb{P}^N \Rightarrow 3 \dim X \leq 2N - 4$$

(1.5) secant variety の次元は, 一般には $2 \dim X + 1$ となると期待されるので, その退化の度合いを測る量として,

定義: $X \subseteq \mathbb{P}$ の secant deficiency を

$$\delta := 2 \dim X + 1 - \dim \text{Sec } X$$

と定める.

(1.6) Zak の定理は

$$\text{Sec } X \neq \mathbb{P}^N \Rightarrow \delta \leq \frac{1}{2} \dim X$$

と同値.

(1.7) 以上のことを踏まえて,

定義: $X \subseteq \mathbb{P}^N$ の secant variety が退化しているとは, $\delta > 0$ かつ $\text{Sec } X \neq \mathbb{P}^N$ をみたすことをいう.

(1.8) 定義: Zak の定理の不等式において等号の成り立つ場合, つまり, 非退化非特異射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}$ で

$$\text{Sec } X \neq \mathbb{P}^N \quad \& \quad 3 \dim X + 4 = 2N$$

をみたすものを Severi variety と呼ぶ.

(1.9) Severi variety の分類にはいろいろな数学者が貢献をした: T. Fujita-J. Roberts [FR], R. Lazarsfeld, H. Tango [T], F. L. Zak , ... 最終的には Zak が次のように分類をした:

Classification of Severi Varieties (Zak, 1981) [Z]: *Each Severi variety is projectively equivalent to one of the following:*

- (1) Veronese surface, $v_2(\mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^5 (\delta = 1)$
- (2) Segre product, $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subseteq \mathbb{P}^8 (\delta = 2)$
- (3) Grassmann variety, $\mathbb{G}(2, 6) \subseteq \mathbb{P}^{14} (\delta = 4)$
- (4) E_6 -variety, $X^{16} \subseteq \mathbb{P}^{26} (\delta = 8)$

注意: Severi variety はすべて等質である.

補足: 上の Zak の不等式で等号が成立する場合は自動的に X の次元は偶数となってしまうが, 次元が奇数の場合にもっとも退化の度合いの激しい場合については, T. Fujita [F], M. Ohno [O] らにより調べられている. その結果から, X として等質ではない多様体も現われてくることが知られている. 他の場合についても, 多様体の次元の低い方から Ohno により研究されている.

(1.10) R. Lazarsfeld–A. Van de Ven により, 次の問題が提出された

Problem (Lazarsfeld–Van de Ven, 1984) [LV]: *Do there exist non-degenerate, smooth projective varieties $X \subseteq \mathbb{P}^N$ with $\text{Sec } X \neq \mathbb{P}$ and arbitrarily large secant deficiency δ ?*

(1.11) これに対する次の部分解を得た:

Main Theorem: For a homogeneous projective variety $X \subseteq \mathbb{P}^N$, we have

$$\text{Sec } X \neq \mathbb{P}^N \Rightarrow \delta \leq 8,$$

and

$$\delta = 8 \Rightarrow X \simeq E_6\text{-variety} \pmod{PGL}.$$

§2. 退化した SECANT VARIETY をもつ等質射影多様体

(2.1) 等質射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}$ をきちんと定義すると,

定義: 連結代数群 G の表現 $\rho : G \rightarrow GL(V)$ から定まる作用 $G \curvearrowright \mathbb{P}_*(V)$ の閉軌道 $X \subseteq \mathbb{P}_*(V)$ を, (G から得られる) 等質射影多様体 (homogeneous projective variety) と呼ぶことにする.

(2.2) 非退化非特異射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}$ で $\text{Sec } X \neq \mathbb{P}$ かつ $\delta > 0$ となるものすべてを調べたいが, それはかなり難しい問題である. Zak の分類から多様体が等質である場合が重要と思われる. そこで, 次を考える:

Problem : Classify homogeneous projective varieties with degenerate secant varieties.

(2.3) 注意: Zak [Z, Chapter III] も, secant variety の退化する等質射影多様体 $X^n \subseteq \mathbb{P}^N$ を研究している. しかし, それは $N \leq 2n+1$ という仮定の下である. 実際以下で見るように, 次元の条件を課さない我々の分類では Zak の分類には現われない等質射影多様体が出てくる. 次元の高い 2 次 Veronese variety や, 2 次元部分線型空間の Grassmann variety などの既に知られている例だけでなく, まったく新しい系列としては, 随伴多様体 (= 随伴表現から得られる等質射影多様体) が現われることがわかる.

(2.4) REDUCTION STEPS ([Z, Chapter III] 参照): 一般性を失うことなく, 単連結半単純代数群の既約表現のみを考えればよい: というのは, 閉軌道のみに興味があるので G は半単純かつ単連結としてよく, また, 非退化な射影多様体のみに興味があるので, 表現 ρ は既約としてよい.

半単純 G の既約表現 ρ に対しては, 閉軌道は唯一つ存在する. 具体的には, 既約表現 ρ の highest weight を λ とし, λ を weight にもつベクトルをひとつ取りそれを $v_\lambda \in V$ とすれば,

$$X = G \cdot [v_\lambda] \subseteq \mathbb{P}_*(V)$$

である (たとえば [FH] 参照). ここに, $\mathbb{P}_*(V) := (V \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$.

さらに, 代数群 G が単純である場合に考えればよいというのは, 単純でない場合は半単純の場合の Segre 積となる. しかも, 実は次のことが知られている:

Fact (Zak) [Z]: If G is not simple and $\delta > 0$, then $X \subseteq \mathbb{P}$ is a Segre embedding of two projective spaces and $\delta = 2$.

結局, G が単連結単純代数群の有限次元既約表現だけを考えればよい.

(2.5) 単連結単純代数群 G に対して, その Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$, そして, 単純 root 系 $R = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ を固定し, それから定まる fundamental dominant weight を $\omega_1, \dots, \omega_l$ とする. ただし, $\text{rk } G = l$. dominant weight の全体を Λ_W^+ とおく. つまり,

$$\Lambda_W^+ := \bigoplus_{1 \leq i \leq l} \mathbb{Z}_{\geq 0} \omega_i \subseteq \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$$

とおく. ただし, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* := \langle \alpha_1, \dots, \alpha_l \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \mathfrak{h}^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-linear}}(\mathfrak{h}, \mathbb{C})$.

(2.6) 表現と dominant weight との関係 (たとえば [FH] 参照): G は単連結なので, 表現 ρ に対して, その highest weight λ を対応させると, G の有限次元既約表現 (の同型類) の全体と Λ_W^+ とが bijective に対応する:

$$\begin{array}{ccc} \{G \text{ の有限次元既約表現} \} / \sim & \xrightarrow{\text{bijective}} & \Lambda_W^+ \\ \rho & \longmapsto & \lambda = (\rho \text{ の highest weight}) \end{array}$$

(2.8) 結局, 単連結単純代数群 G の dominant weight λ をひとつ与えると, ただひとつの等質射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}$ が定まり, G から得られる等質射影多様体はそれらで尽くされる.

(2.9) 次が重要: $\text{Sec } X \neq \mathbb{P}_*(V)$ かどうかは別として, $\delta > 0$ となるかどうかについて, 次の判定法を得た (証明は [K1] 参照):

$\tilde{\alpha}$: the highest root of $\mathfrak{g}$
 λ : the highest weight of ρ
 μ : the lowest weight of ρ

とするとき,

Criterion:

$$(\lambda - \mu, \lambda - \tilde{\alpha}) > 0 \Rightarrow \delta = 0,$$

where $(*, *)$ is the inner product defined by the Killing form.

(2.10) これを用いると, 次を得る. ただし, secant variety の退化条件のうち, “ $\text{Sec } X \neq \mathbb{P}$ ” が成立するかどうかについては何も主張していない.

Theorem 1: Let G be a simply connected, complex simple algebraic group with Lie algebra $\mathfrak{g}$, and let $X \subseteq \mathbb{P}$ be a homogeneous projective variety obtained from G , which corresponds to a dominant weight λ . Then $X \subseteq \mathbb{P}$ has $\delta > 0$ if and only if the type of $\mathfrak{g}$ and λ is one of the following:

- (A_1) $\omega_1; 2\omega_1$
- (A_2) $\omega_1, \omega_2; 2\omega_1, 2\omega_2; \omega_1 + \omega_2$
- (A_3) $\omega_1, \omega_3; \omega_2; 2\omega_1, 2\omega_3; \omega_1 + \omega_3$
- ($A_{l \geq 4}$) $\omega_1, \omega_l; \omega_2, \omega_{l-1}; 2\omega_1, 2\omega_l; \omega_1 + \omega_l$
- (B_2) $\omega_1; \omega_2; 2\omega_2$
- ($B_{l=3,4}$) $\omega_1; \omega_2; \omega_l$
- ($B_{l \geq 5}$) $\omega_1; \omega_2$
- ($C_{l \geq 3}$) $\omega_1; \omega_2; 2\omega_2$
- ($D_{l=4,5}$) $\omega_1; \omega_2; \omega_{l-1}, \omega_l$
- ($D_{l \geq 6}$) $\omega_1; \omega_2$
- (E_6) $\omega_1, \omega_6; \omega_2$
- (E_7) ω_1
- (E_8) ω_8
- (F_4) $\omega_1; \omega_4$
- (G_2) $\omega_1; \omega_2$

where ω_i : the i -th fundamental weight as in [B].

(2.11) 証明の概略 (詳しくは, [K1] 参照):

$$\varepsilon := (\lambda - \mu, \lambda - \tilde{\alpha})$$

とおく. Lie 環の各タイプごとに, highest root $\tilde{\alpha}$ は ω_i の 1 次結合として書き下せる. また, dominant integral weight $\lambda = \sum_i b_i \omega_i$ を highest weight にもつ表現に対してその

lowest weight μ は, ワイル群の最大の長さの元を用いて具体的に計算でき, ω_i の 1 次結合として書き下せる ([B] の巻末の表参照). これらのデータから各タイプにおいて ε を計算すると, それは, b_i たちの 2 次式となる.

$\varepsilon \leq 0$ をみたす非負整数解 b_i を求めることにより, $\varepsilon \leq 0$ となる weight をリストアップすることができる.

逆に, そのおのおのの weight に対応する等質射影多様体に対して実際に δ を調べると ([FH], [KOY], [LV], [Z] 参照), それらがすべて, $\delta > 0$ となっていることがわかる. $\square$

(2.12) その結果, Criterion で逆向きの implication も成り立つことがわかる.

(2.13) さらに, おおのおの場合に $\text{Sec } X \neq \mathbb{P}$ となるかどうかを確かめると ([FH], [KOY], [LV], [Z] 参照), 次のページの分類表を得る. これで, このセクションの初めに挙げた Problem の解が得られたことになる.

(2.14) Main Theorem の証明: もしも $\text{Sec } X \neq \mathbb{P}$, かつ, $\delta > 8$ となる等質射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}$ が存在したとする. ここで, X を与える代数群 G が単純ではないとすると, $\delta > 0$ と Fact (2.4) により, $\delta = 2$ となり, 矛盾. ゆえに, G は単純でなくてはならない. そこで分類表を見ると, そのような等質射影多様体は存在しないことがわかる. また, $\delta = 8$ となるのは, やはり分類表によると, E_6 -variety しかないことがわかる. $\square$

PART II

§3. HIGHER SECANT VARIETIES

(3.1) 定義: n 次元射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して,

$$S^k X := \overline{\bigcup_{\substack{x_0, \dots, x_k \in X \\ \dim \langle x_0, \dots, x_k \rangle = k}} \langle x_0, \dots, x_k \rangle} \subseteq \mathbb{P}^N$$

を X の *the variety of k -secants* と呼ぶ. $\text{Sec } X = S^1 X$ である.

(3.2) $X, Y \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して,

$$S(X, Y) := \overline{\bigcup_{x \neq y, x \in X, y \in Y} x * y}$$

とすると,

$$S^k X = S(X, S^{k-1} X)$$

が成り立つことがわかる. ゆえに, 一般には $s_k = s_{k-1} + n + 1$ となることが期待される. そこで, $s_k := \dim S^k X$ とし, $S^k X$ の退化の度合いをはかる量として

$$\delta_k := s_{k-1} + n + 1 - s_k$$

を考える. $\delta = \delta_1$ である.

(3.3) 自然に包含関係の列

$$S^0 X = X \subseteq S^1 X = \text{Sec } X \subseteq S^2 X \subseteq \dots \subseteq S^{k_0-1} X \subseteq S^{k_0} X = \mathbb{P}^N$$

を得る. はじめて $S^k X = \mathbb{P}^N$ となる k を特に k_0 と書くことにする:

$$k_0 := \min\{k | S^k X = \mathbb{P}^N\}$$

(3.4) これらの不変量に関しては次のことが知られている:

Fact (Zak) [Z]:

- (1) $\delta_k < n$, *that is*, $s_k - s_{k-1} > 1$ for $k < k_0$, and $\delta_{k_0} \leq n$.
- (2) $\delta_k \geq \delta_{k-1} + \delta$ for $1 \leq k \leq k_0$. In particular, $\delta_k \geq k\delta$ for $1 \leq k \leq k_0$.

(3.5) **Example 1:** (1) により, 射影曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対しては,

$$s_k = \min\{2k + 1, N\}$$

N : odd

k	0	1	2	$\dots$	$\frac{N-3}{2}$	$\frac{N-1}{2} = k_0$
$s_k - s_{k-1}$		2	2	$\dots$	2	2
s_k	1	3	5	$\dots$	$N - 2$	N
δ_k		0	0	$\dots$	0	0

N : even

k	0	1	2	$\dots$	$\frac{N-2}{2}$	$\frac{N}{2} = k_0$
$s_k - s_{k-1}$		2	2	$\dots$	2	1
s_k	1	3	5	$\dots$	$N-1$	N
δ_k		0	0	$\dots$	0	1

(3.6) 定義: d 次 Veronese 埋込, $v_d: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$, の像

$$V_d^n := v_d(\mathbb{P}^n) \subseteq \mathbb{P}^N$$

を Veronese variety と呼ぶ. ここに, $N+1 = \binom{n+d}{d}$ である.

(3.7) 問題: Veronese variety V_d^n の s_k, δ_k, k_0 を求めよ.

(3.8) $k_0(V_d^n)$ の意味: $n+1$ 変数多項式環において, 任意の d 次の斉次多項式を 1 次式の d 乗の和に書き表す際に必要な 1 次式の数が, k_0 である.

(3.9) 曲線の場合はともかくとして, 一般次元の Veronese variety に対しては, s_k, δ_k, k_0 の値は知られていないようである ([Hr, p. 147] 参照).

§4. 結果

(4.1) **Theorem 2** [K2]:

- (a) If $n \geq 2$, then $\delta_k(V_2^n) = k$ for $1 \leq k \leq n$.
- (b) $k_0(V_2^n) = n$.

コメント: (a) により, Veronese variety V_2^n では, Zak の不等式 (3.4) の (2) において等号が成立する. (b) の $k_0 = n$ は任意の 2 次形式は基底の取り替えにより対角化できる, ということの言い替えに過ぎない.

(4.2) **Theorem 3** [K2]:

- (a) If $n \geq 2$ and $d \geq 3$, then $\delta_k(V_d^n) = 0$ for $1 \leq k \leq n$.
- (b) Moreover $\delta_{2+1}(V_3^2) = 2$, and $\delta_{n+1}(V_d^n) = 0$ for $n > 2$ or $d > 3$.

(4.3) Theorems 2, 3 でわかる範囲より先を, 計算機で求めてみると,

Example 2 ($n = 2$ の場合):

$$V_2^2 \subseteq \mathbb{P}^5$$

k	0	1	$2 = k_0$
$s_k - s_{k-1}$		2	1
s_k	2	4	5
δ_k		1	2

$$V_3^2 \subseteq \mathbb{P}^9$$

k	0	1	2	$3 = k_0$
$s_k - s_{k-1}$		3	3	1
s_k	2	5	8	9
δ_k		0	0	2

$$V_4^2 \subseteq \mathbb{P}^{14}$$

k	0	1	2	3	4	$5 = k_0$
$s_k - s_{k-1}$		3	3	3	2	1
s_k	2	5	8	11	13	14
δ_k		0	0	0	1	2

$$V_5^2 \subseteq \mathbb{P}^{20}$$

k	0	1	2	3	4	5	$6 = k_0$
$s_k - s_{k-1}$		3	3	3	3	3	3
s_k	2	5	8	11	14	17	20
δ_k		0	0	0	0	0	0

$$V_6^2 \subseteq \mathbb{P}^{27}$$

k	0	1	2	3	4	$\dots$	8	$9 = k_0$
$s_k - s_{k-1}$		3	3	3	3	$\dots$	3	1
s_k	2	5	8	11	14	$\dots$	26	27
δ_k		0	0	0	0	$\dots$	0	2

(4.4) **Example 3:** $d = 3$ の場合
 $V_3^1 \subseteq \mathbb{P}^3$

k	0	$1 = k_0$
$s_k - s_{k-1}$		2
s_k	1	3
δ_k		0

$$V_3^2 \subseteq \mathbb{P}^9$$

k	0	1	2	$3 = k_0$
$s_k - s_{k-1}$		3	3	1
s_k	2	5	8	9
δ_k		0	0	2

$$V_3^3 \subseteq \mathbb{P}^{19}$$

k	0	1	2	3	$4 = k_0$
$s_k - s_{k-1}$		4	4	4	4
s_k	3	7	11	15	19
δ_k		0	0	0	0

$$V_3^4 \subseteq \mathbb{P}^{34}$$

k	0	1	$\dots$	5	6	$7 = k_0$
$s_k - s_{k-1}$		5	$\dots$	5	4	1
s_k	4	9	$\dots$	29	33	34
δ_k		0	$\dots$	0	1	4

$$V_3^5 \subseteq \mathbb{P}^{55}$$

k	0	1	$\dots$	6	7	8	$9 = k_0$
$s_k - s_{k-1}$		6	$\dots$	6	6	6	2
s_k	5	11	$\dots$	41	47	53	55
δ_k		0	$\dots$	0	0	0	4

(4.5) Grassmann variety の Plücker 埋込については,

Theorem 4 [K3]: Assume that $2 \leq r$ and $q := \lfloor n/r \rfloor \geq 2$. Then:

- (a) $\delta_k(\mathbb{G}(2, n)) = 4k$ for $1 \leq k \leq q - 1$.
- (b) $k_0 = q - 1$.

(4.6) **Theorem 5** [K3]: If $r \geq 3$, then $\delta_k(\mathbb{G}(r, n)) = 0$ for $1 \leq k \leq q - 1$.

(4.7) **Conjecture:** $\delta_q(\mathbb{G}(r, n)) > 0 \Leftrightarrow (r, n) = (3, 6), (3, 7), (4, 8)$ or $(3, 9)$, where $q := \lfloor n/r \rfloor$.

$\Leftarrow$ が正しいことは計算によりわかっている.

(4.8) 注意: 2 次 Veronese variety V_2^n , そして, 2 次元部分線型空間の Grassmann variety $\mathbb{G}(2, n)$ は, Scorza variety の例である. Theorems 2, 4 の結果は, Zak による別証明がある ([Z, Chapters V, VI] 参照).

§5. OPEN PROBLEMS

(5.1) §4 の結果の証明方法を説明し, 最後に関連する open problem を述べる. 証明の鍵となっているのは

Terracini's Lemma/ $\mathbb{C}$: For a projective variety $X \subseteq \mathbb{P}^N$, we have

$$T_z S^k X = \langle T_{x_0} X, \dots, T_{x_k} X \rangle$$

for general $x_0, \dots, x_k \in X$ and for a general $z \in \langle x_0, \dots, x_k \rangle$.

コメント: 正標数の場合は, $\supseteq$ しか成り立たない. strange curve が反例を与える.

(5.2) 定義: 代数群 G から得られる等質射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}$ に対して,

$$t_{\max}(X) := \max\{t \mid \text{diagonal action } G \curvearrowright \underbrace{X \times \dots \times X}_{t \text{ times}} \text{ has a dense orbit}\}$$

とおく. 明らかに

$$t_{\max}(X) \leq \frac{\dim G}{\dim X}$$

である.

(5.3) $k \leq t_{\max} - 1$ なる k については, 接空間を計算しやすい座標を持つように点 $x_0, \dots, x_k$ を normalize し, Terracini's Lemma を用いることにより, $S^k X$ の次元を (原理的には) 計算できる.

(5.4) たとえば, Criterion (2.9) の証明では次の事実を使っている:

Proposition [Z], [LV]: *If $X \subseteq \mathbb{P}$ is a homogeneous projective variety obtained from a simple algebraic group, then $t_{\max}(X) \geq 2$.*

(5.5) よく知られているように

$$t_{\max}(\mathbb{P}^n) = n + 2$$

である. これと, Terracini's Lemma を用いると, Theorems 2, 3 は証明される.

(5.6) Theorems 4, 5 の証明には, まず, 次を示す:

Proposition [K3]:

$$t_{\max}(\mathbb{G}(r, n)) \geq q + 1$$

where $q := \lfloor n/r \rfloor$.

(5.7) $q \geq 2$ のとき,

$$q + 1 < \frac{\dim SL(n)}{\dim \mathbb{G}(r, n)} = \frac{n^2 - 1}{r(n - r)} < q + \frac{5}{2} \text{ (best possible)}$$

が示されるので, この Proposition と合わせると, $t_{\max}(\mathbb{G}(r, n)) = q + 1$ or $q + 2$ である.

(5.8) 問題: $t_{\max}(\mathbb{G}(r, n)) = q + 2$ となる場合があるか? $t_{\max}(\mathbb{G}(3, 11)) = 5$ か?

(5.9) 問題: 等質射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}$ に対して, $t_{\max}(X)$ を求めよ. 単純代数群から得られる等質射影多様体 X に対して, それに対応する weight λ を用いて $t_{\max}(X)$ を記述できるか?

ACKNOWLEDGEMENTS

この原稿の作成には, 川内 毅氏 (東京工業大学) の日本語- $\text{\TeX}$ tures を使わせて頂きました. ありがとうございます.

参考文献

- [B] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6*, Hermann, Paris, 1968.
- [F] T. Fujita, *Projective threefolds with small secant varieties*, Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo **32** (1982), 33–46.
- [FR] T. Fujita, J. Roberts, *Varieties with small secant varieties: The extremal case*, Amer. J. Math. **103** (1981), 953–976.
- [FH] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory: A First Course*, Graduate Texts in Math. **129**, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [FL] W. Fulton, R. Lazarsfeld, *Connectivity and its applications in algebraic geometry*, Algebraic Geometry, Lecture Notes in Math. **862**, Springer-Verlag, New York, 1981, pp. 26–92.

- [Hr] J. Harris, *Algebraic Geometry: A First Course*, Graduate Texts in Math. **133**, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [Ht] R. Hartshorne, *Varieties with small codimension in projective space*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (6) (1974), 1017–1032.
- [Hm] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Math. **9**, Springer-Verlag, New York, 1972.
- [K1] H. Kaji, *Homogeneous projective varieties with degenerate secants*, Preprint, 1996.
- [K2] H. Kaji, *On higher secant varieties of Veronese varieties*, Preprint, 1997.
- [K3] H. Kaji, *Higher secant varieties of Grassmann varieties*, Preprint, 1997.
- [KOY] H. Kaji, M. Ohno, O. Yasukura, *On the secant deficiency of adjoint varieties*, Preprint, 1996.
- [LV] Lazarsfeld and Van de Ven, *Topics in the geometry of projective space. Recent work of F. L. Zak*, DMV Sem. 4, Birkhäuser Verlag, Basel and Boston, 1984.
- [O] M. Ohno, *On odd dimensional projective manifolds with smallest secant varieties*, Preprint, 1994 (to appear in Math. Z.).
- [R] J. Roberts, *Generic projections of algebraic varieties*, Amer. J. Math. **93** (1971), 191–214.
- [T] H. Tango, *Remarks on varieties with small secant varieties*, Bull. Kyoto Univ. Ed., Ser. B **60** (1982), 1–10.
- [Z] F. L. Zak, *Tangents and Secants of Algebraic Varieties*, Translations of Math. Monographs, vol. 127, AMS, Providence, 1993.