

Projective varieties admitting an embedding with Gauss map of rank zero

楯 元 (早大理工) 深澤 知 (早大理工/学振) 古川 勝久 (早大理工)

n 次元射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ に対して, ガウス写像 $\gamma : X \dashrightarrow G(n, \mathbb{P}^N)$ を滑かな点 $x \in X$ に対し $\mathbb{P}^N$ 内の接空間 $T_x(X)$ を対応させる有理写像として定義する. 本研究では, 標数 $p > 0$ におけるガウス写像 γ の階数 ($d\gamma$ の階数をこう呼ぶ) を主題とし, その階数退化の極であるところの次の性質 (GMRZ) をもつ X を考察する.

(GMRZ) ある埋込み $\iota : X \rightarrow \mathbb{P}^M$ が存在し,
そのガウス写像 γ の階数が零となる.

上で「埋込み」を「双有理的埋込み(有理写像 $X \rightarrow \mathbb{P}^N$ で像への双有理同値を与えるもの)」に置換えた条件については, 研究 [2] により, 任意の代数多様体 X に対して, 階数零のガウス写像をもつ双有理的埋込みの存在することが示されている.

性質 (GMRZ) をもつ多様体とはどのようなものであるのか. 本研究においては, X 内の有理曲線に着目して調査をおこなう. 研究方法の根幹をなすのは次の定理である:

定理 1. 不分岐な射 $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ の余法束を $N_f^\vee := \ker(f^*\Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^1}^1)$ によって定義する. ここで $N_f^\vee$ は $\bigoplus_{i \geq -1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i)^{r_i}$ ($r_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) の様に分解されるとし, また X が $f(\mathbb{P}^1)$ に沿って滑らかで, かつ (GMRZ) をみたすとする. このとき, すべての $i \geq 0$ に対して $r_{i-1}r_i = 0$ が成立し, さらにある $i \geq 0$ について $r_i > 0$ であるなら, $p = 2$ か $p|i + 1$ かのいずれかが成立する.

定理 1 により, 性質 (GMRZ) をもつ多様体に関するつぎの結果が導かれる.

定理 2. (1) l 次元射影空間 $\mathbb{P}^l$ と m 次元射影多様体 Y との積 ($l, m \geq 1$) が (GMRZ) をみたすのは, $p = 2$ かつ $l = 1$ の場合に限る. さらに $\prod_{1 \leq i \leq r} \mathbb{P}^{n_i}$ ($r \geq 2, n_i \geq 1$) が (GMRZ) をみたすことは, $p = 2$ かつ全ての i について $n_i = 1$ であることと同値である.

(2) $(l + m)$ 次元ベクトル空間内の l 次元部分空間のなすグラスマン多様体 $\mathbb{G}(l, l + m)$ が (GMRZ) をみたすことは, $l = 1$ か $m = 1$ かのいずれかの成立することに同値である.

(3) 滑かな 2 次超曲面 $Q \subset \mathbb{P}^N$ ($N \geq 3$) が (GMRZ) をみたすことは, $p = 2$ かつ

$N = 3$ であることに同値である.

(4) 滑かな 3 次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^N$ ($N \geq 3$) が (GMRZ) をみたすのは, $p = 2$ である場合に限る.

さらに詳細な研究により以下のふたつの定理を得た.

定理 3 (標数 2 の フェルマー 3 次超曲面の特徴づけ). 滑かな 3 次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^N$ ($N \geq 5$) が (GMRZ) をみたすことは, $p = 2$ かつ X が フェルマー超曲面に射影変換でうつりあうことと同値である

定理 4 (一般の超曲面). 不等式 $3 \leq d \leq 2N - 3$ がみたされたとする. このとき一般の d 次超曲面 $X \subset \mathbb{P}^N$ が (GMRZ) をみたすのは, $p = 2$ かつ $d = 2N - 3$ である場合に限る.

次に正標数の有理曲線の幾何に関する問題を (GMRZ) の議論を用いて考察する. 射 $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ に対して $f^*T_X \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{d-2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{n-d+1}$ ($d = \deg(-f^*K_X)$) なる $\mathbb{P}^1$ 上の分解が成立するとき, f を X 上の minimal free な有理曲線と呼ぶ [1, p. 93], [3, IV.2.8]. 標数零における基本的事実として以下が知られている.

定理 A ([3, IV.2.10]). 標数零においては, uniruled かつ滑かな X は minimal free な有理曲線をもつ.

一方で (GMRZ) と関連づけると, 定理 1 から以下のことを得る.

定理 5. 射 $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow X$ が minimal free な有理曲線を与え, かつ X が $f(\mathbb{P}^1)$ に沿って滑らかであるとする. このとき X が (GMRZ) をみたすのならば $\deg(-f^*K_X) = n + 1$ か $\deg(-f^*K_X) = p = 2$ かのいずれかが成立する.

定理 5 を用いて, 正標数における定理 A が成立しない射影多様体の例, すなわち separably uniruled でありながら minimal free な有理曲線をもたない多様体の例を与えることができた.

参考文献

- [1] O. Debarre, Higher-dimensional algebraic geometry, Universitext, Springer, 2001.
- [2] S. Fukasawa and H. Kaji, Any algebraic variety in positive characteristic admits a projective model with an inseparable Gauss map, J. Pure Appl. Algebra (to appear).
- [3] J. Kollár, Rational curves on algebraic varieties, Ergebnisse Der Mathematik Und Ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Bd. **32**, Springer, Berlin, 1996.