

# ガウス写像の分離性 対 射影双対に関する再帰性

梶 元

## 0. 序

代数幾何学においては、基礎体の標数が零の場合には見られない正標数特有の様々な現象が知られている。射影代数幾何、特に接空間の振る舞いについては、ガウス写像の分離性、そして、射影双対に関する再帰性を仮定することにより標数零の場合と同様の“直感通りの幾何”が期待される(術語については以下に詳述する)。本稿の目的はその分離性と再帰性の関係、すなわち次の問題に関する2008年までの研究の流れについて概観することである:

**問題 0.1.** 射影多様体  $X \subseteq \mathbb{P}^N$  に対して、 $X$  のガウス写像の分離性と  $X$  の射影双対に関する再帰性は同値か?

以下、特に断らない限り基礎体  $k$  は標数  $p \geq 0$  の代数閉体とする。

## 1. 基本的概念と正標数特有の現象

**1.1.** 射影多様体  $X \subseteq \mathbb{P}^N$  の**ガウス写像**とは、 $X$  の次元を  $n$  とし  $\mathbb{P}^N$  内の  $n$  次元線型空間全体のなすグラスマン多様体を  $\mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N)$  とするとき、 $X$  の非特異点  $P$  に対して  $P$  における射影接空間  $T_P X$  を対応させることにより得られる有理写像、 $\gamma: X \dashrightarrow \mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N)$  のことと定義する ([9, 第1節 (e)], [31, 第I章, 第2節]):

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N) \\ \cup & \nearrow & \cup \\ X_{\text{sm}} & & T_P X \\ \cup & \nearrow & \\ P & & \end{array}$$

以下、自明な例外を除くために  $X$  は線型ではないと仮定する。また、 $\gamma(X)$  により  $X$  の非特異部分  $X_{\text{sm}}$  の  $\gamma$  による像の閉包を表すことにしよう:  $\gamma(X) := \gamma(X_{\text{sm}})^-$ 。ガウス写像  $\gamma$  が**分離的**とは  $\gamma$  により引き起こされる関数体の拡大  $K(X)/K(\gamma(X))$  が分離的であることと定める。

標数零の場合には  $\gamma$  の一般ファイバーは被約かつ線型となることがよく知られている ([9, (2.10)], [31, 第I章, 定理 2.3 (c)]). これは、たとえば平面曲線  $X \subseteq \mathbb{P}^2$  の多重接線の数が有限であることを意味する。一方、フォードル・ザクの定理 [31, 第I章, 系 2.8] によると、 $X$  が非特異ならば任意の標数において  $\gamma$  は有限射となる ([9, (2.29)] も参照のこと)。したがって標数零の場合には非特異な  $X$  のガウス写像  $\gamma$  は像への双有理写像となる。

標数が正の場合にはどうだろうか? 次数  $p+1$  のフェルマー曲線  $X \subseteq \mathbb{P}^2$ ,

$$x^{p+1} + y^{p+1} + z^{p+1} = 0$$

を考えてみると、ガウス写像  $\gamma$  は  $X$  のフロベニウス写像と一致することが直ちにわかる [30, 第7節, 2]。また、 $X$  の任意の点  $P$  における接線  $T_P X$  の接触次数が少なくとも  $p$  となること、そして、ガウス写像の一般ファイバーは少なくとも重複度  $p$  をもつことが容易

にわかる. 特に標数  $p > 2$  の場合には  $X$  のすべての点に変曲点となり, この平面曲線  $X$  は標数零の場合に反して無限に多くの変曲点をもつ.

また, 無限に多くの多重接線をもつ射影曲線の例も知られている. 有理曲線の場合ならそのような例は簡単に構成できる: 実際, 任意の非分離有限射  $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  に対して, そのグラフ  $\Gamma \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  を  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  が 2 次曲面となるように  $\mathbb{P}^3$  へ埋め込み,  $\Gamma$  の  $\mathbb{P}^3$  における像を  $X$  としよう. このとき, そのガウス写像  $\gamma$  の像  $\gamma(X) \subseteq \mathbb{G}(1, \mathbb{P}^3)$  は, プリュッカー埋め込み  $\mathbb{G}(1, \mathbb{P}^3) \hookrightarrow \mathbb{P}^5$  を介して  $\mathbb{P}^5$  の 2 次曲線となり,  $\gamma$  はもとの  $f$  と一致することが簡単に示される:  $f = \gamma$ . したがって  $f$  の分離次数を  $s$  とすると  $X$  の一般の接線のもつ接点の数は  $s$  となるので,  $s > 1$  となる  $f$  をとれば  $X$  は無限に多くの多重接線をもつことになる [15, 例 4.1], [28, 例 2.13].

楕円曲線の場合については, 超特異的でないならば位数が  $p$  の倍数ではあるが  $p$  のベキではない直線束を用いて無限に多くの多重接線をもつように射影空間に埋め込むことができる [16, 定理 5.1], [17, 定理 0.1]. 超特異的な場合にはそのような埋め込みが存在しないことも知られている [16, 定理 5.2].

特異点を許す射影曲線の場合 (すなわち非特異な射影曲線の双有理的埋め込みの場合) については,  $k$  上 1 次元代数関数体の任意の非分離有限拡大  $K/K'$  に対して,  $K$  を関数体にもつ射影曲線  $X \subseteq \mathbb{P}^N$  で, ガウス写像から引き起こされる関数体の拡大  $K(X)/K(\gamma(X))$  が  $K/K'$  と一致するものが構成できる [16, 系 3.4] ([28, 例 2.13] も参照のこと). これは以下の事実から従う: 完全体上の 1 次元代数関数体の非分離有限次拡大は単純拡大である [16, 補題 3.5].

高次元の場合には, 野間 淳氏 [27] が様々な興味深い射影多様体の例を与えている. 実際, 彼はガウス写像が非自明な分離次数をもつ (したがって, 無限に多くの多重接空間をもつ) 射影多様体として以下に挙げるものを構成している:

- (1) 一般型ではない非特異射影多様体;
- (2) 特異点として孤立特異点のみをもつ一般型正規多様体;
- (3) ガウス写像の像が一般型正規多様体となる射影空間と同型な射影多様体.

また, 深澤 知氏はガウス写像の一般ファイバーが 2 次曲線となる射影多様体を発見した [1, 例 7.2]. それまでは一般ファイバーが線型ではない例として複数の点からなる射影多様体は知られていたが, 一般ファイバーが次元をもちさらに集合としても非線型となる例は全く知られていなかった. その点において深澤氏の発見した例は画期的といえよう. さらに彼は, ガウス写像の一般ファイバーが与えられた射影多様体と同型となる射影多様体, そして, 一般ファイバーが与えられた射影多様体の 1 次元超平面切断族と同型となる射影多様体の構成法を発見した [2], [3].

注意すべきは, 以上に述べたガウス写像が非自明な分離次数をもつ射影多様体の例においては, そしてまた, ガウス写像が像への双有理写像とならない既知の例においては, そのガウス写像はいずれも分離的ではない点である.

**1.2. 射影多様体  $X \subseteq \mathbb{P}^N$  に対して, 非特異点  $P \in X_{\text{sm}}$  と超平面  $H \subseteq \mathbb{P}^N$  の組のうち  $H$  が  $P$  において  $X$  に接するもの全体のなす集合を  $C(X_{\text{sm}})$  とおく. その  $X \times \check{\mathbb{P}}^N$  におけるザリスキー閉包を  $X$  の**余法多様体**と呼び,  $C(X)$  で表す:**

$$C(X) := C(X_{\text{sm}})^- \subseteq X \times \check{\mathbb{P}}^N, \quad C(X_{\text{sm}}) := \{(P, H^*) | T_P X \subseteq H\} \subseteq X_{\text{sm}} \times \check{\mathbb{P}}^N.$$

ただし,  $H^*$  は  $H$  に対応する双対射影空間  $\check{\mathbb{P}}^N$  の点を表す. 第 2 射影による  $C(X)$  の  $\check{\mathbb{P}}^N$  における像を  $X$  の**射影双対**または**双対多様体**と呼び,  $X^*$  で表す. 第 2 射影の制限により得られる射,

$$\pi: C(X) \twoheadrightarrow X^*; (P, H^*) \mapsto H^*$$

を**余法線写像**と呼ぶ ([9, 第 3 節, (a)], [11, (2.3)], [25], [30, 第 1 節]).

射影多様体  $X$  が超曲面の場合には, 同型  $C(X_{\text{sm}}) \simeq X_{\text{sm}}$  を介して自然な同一視  $\mathbb{G}(N-1, \mathbb{P}^N) = \check{\mathbb{P}}^N$  のもと, ガウス写像  $\gamma$  と余法線写像  $\pi$  とは双有理同値であることに注意す

る. すなわち, 次の可換図式がある:

$$\begin{array}{ccccccc}
 C(X_{\text{sm}}) & \subseteq & C(X) & \xrightarrow{\pi} & X^* & \subseteq & \check{\mathbb{P}}^N \\
 \downarrow \wr & & \downarrow & & \parallel & & \parallel \\
 X_{\text{sm}} & \subseteq & X & \xrightarrow[\gamma]{\quad} & \gamma(X) & \subseteq & \mathbb{G}(N-1, \mathbb{P}^N).
 \end{array}$$

よく知られているように, 複素数体  $\mathbb{C}$  上など基礎体の標数が零の場合には自然な同一視  $\check{\mathbb{P}}^N = \mathbb{P}^N$  のもと, 任意の射影多様体  $X$  に対して**射影双対性**,

$$X = X^{**}$$

が成り立つ ([30, 第3節, 定理 4]). しかし正標数の場合には, これは必ずしも正しくない: 実際,  $X \subseteq \mathbb{P}^2$  を標数  $p = 2$  の 2 次曲線とすると, 計算すれば容易にわかるように,  $\mathbb{P}^2$  のある一点を  $X$  のすべての接線が通るので  $X^* \subseteq \mathbb{P}^2$  は直線となり, したがって  $X^{**}$  は一点に退化してしまうので,  $X^{**} \neq X$  である.

では, このような正標数特有の現象を排除または制御し標数零と同様の幾何を期待するにはどのような条件を課せば良いだろうか. 射影双対性  $X = X^{**}$  だけでは十分でない: 実際, 上記のフェルマー曲線  $X$  に対しては  $X = X^{**}$  が成り立つ [30, 第7節, 2]. そこで, 双対多様体ではなく余法多様体に着目し以下の条件を考える [25, (4.5)]: 射影多様体  $X$  が**再帰的**であるとは, 標準的同型  $\mathbb{P}^N \times \check{\mathbb{P}}^N \simeq \check{\mathbb{P}}^N \times \check{\mathbb{P}}^N$  のもと,

$$C(X) \simeq C(X^*)$$

が成り立つことと定義する. 再帰的な  $X$  に対しては標数零の場合と同様に射影双対性  $X = X^{**}$  が成り立つ: これは余法多様体の  $\mathbb{P}^N = \check{\mathbb{P}}^N$  への射影を考えれば自明であろう.

次の事実はモンジュ-セグレ-ウォレスの判定法として知られている:

**定理 1.1** ([11, (2.4)], [25, (4.4)]). 射影多様体  $X$  が再帰的であるためには余法線写像  $\pi$  が分離的であることが必要十分である.

定理 1.1 を用いると, たとえば次が示される:

**命題 1.2.** 標数  $p = 2$  における奇数次元  $n$  の射影多様体  $X$  に対しては, 双対多様体  $X^*$  の余次元が 1 ならば余法線写像  $\pi$  は分離的ではない.<sup>1</sup> したがって,  $X$  は再帰的ではない.

条件「標数  $p = 2$  かつ次元  $n$  が奇数」は以下の命題中において繰り返し現れるが, その背景に, この命題 1.2 がある. 証明の概略を述べておこう: 点  $(P, H^*) \in C(X)$  における余法線写像  $\pi$  の微分を  $d\pi_{(P, H^*)}$  と書くことにする. まず,  $\pi$  が分離的であるためには一般の点  $(P, H^*)$  において

$$\text{rk } d\pi_{(P, H^*)} = \dim X^*$$

となることが必要十分である. ここで,  $H$  を与える局所定義式  $h$  をひとつ選び,  $P$  における  $X$  の局所座標  $(x_1, \dots, x_n)$  に関する  $h$  のヘッセ行列を  $H(X)_{(P, H^*)}$  と書くことにする:

$$H(X)_{(P, H^*)} := \left[ \frac{\partial^2 (h|_X)}{\partial x_i \partial x_j} (P) \right]_{1 \leq i, j \leq n}.$$

このとき座標の計算から容易にわかるように, 微分  $d\pi_{(P, H^*)}$  は  $H(X)_{(P, H^*)}$  で表現され,  $h$  の選び方によらずに

$$N - 1 - \text{rk } d\pi_{(P, H^*)} = n - \text{rk } H(X)_{(P, H^*)}$$

が成り立つ [24, (3.3.15)]. したがって  $\text{codim } X^* = 1$  となる場合,  $\pi$  が分離的であるためには一般の点  $(P, H^*)$  において  $\text{rk } H(X)_{(P, H^*)} = n$  となることが必要十分となる. 一方,

<sup>1</sup>[26] の 109 頁, 最後の段落の冒頭では, ガウス写像  $\gamma$  と余法線写像  $\pi$  とを混同しているようである.

標数  $p = 2$  においては,  $\partial^2(h|_X)/\partial x_i^2 \equiv 0$  となるので  $H(X)_{(P,H^*)}$  は  $n$  次交代行列である. 交代行列の階数は常に偶数なので,  $n$  が奇数ならば  $\text{rk } H(X)_{(P,H^*)} < n$  となる. ゆえに  $\pi$  は分離的ではない. よって  $X$  は再帰的ではないことが定理 1.1 から従う.

**1.3.** こうして我々の問題 0.1 は, 定理 1.1 により次に言い換えられる:

**問題 1.3.** 射影多様体  $X$  に対してガウス写像  $\gamma$  が分離的であることと余法線写像  $\pi$  が分離的であることは同値か?

標数零の体拡大はすべて分離的なので問題 1.3 は自明である. 以下, 特に断らない限り基礎体  $k$  の 標数は  $p > 0$  とする.

## 2. 前世紀

**2.1.** 射影多様体  $X$  の次元が 1 の場合についてはさまざまな研究がなされている. 射影曲線  $X \subseteq \mathbb{P}^N$  に対して,  $q$  を一般の点  $P \in X$  における接線の接触次数  $i(X, T_P X; P)$  を割り切る標数  $p$  の最高ベキとする. このときエフェッツ-クライマン [11, (3.5)] により, 余法線写像  $\pi$  の非分離次数は  $q$  と一致することが示されている. 一方, エフェッツ-ヴォロ [13, 命題 4] や著者 [16, 系 2.3 に続く注意] により, ガウス写像  $\gamma$  の非分離次数が  $q$  と一致することが示されている. したがってヴォロ [29, 定理 1] が観察したように, 次が成り立つ (接触平面などを用いて定義される高次への一般化については [10], [14], [18] を参照のこと):

**定理 2.1.** 射影曲線  $X$  のガウス写像  $\gamma$  と余法線写像  $\pi$  は等しい非分離次数をもつ.

したがって, ガウス写像  $\gamma$  の分離性と余法線写像  $\pi$  の分離性は, 射影曲線に対しては同値となる. つまり 1 次元の場合には, 問題 0.1 は肯定的解をもつ.

では, 高次元の場合にはどうなるだろうか? これらの射影曲線に対する一連の研究の後, クライマン-ピーネ<sup>2</sup> [26] は次の命題に証明を与えた:

**定理 2.2** (クライマン-ピーネ [26, 108 頁]). 再帰的射影多様体のガウス写像は線型多様体を一般ファイバーにもつ.

したがって再帰的射影多様体のガウス写像は被約な一般ファイバーをもつので分離的である. ではその逆は成り立つだろうか?

**問題 2.3.** 分離的ガウス写像をもつ射影多様体は再帰的か?

**2.2.** ここで, ガウス写像  $\gamma$  と余法線写像  $\pi$  の関係について解説しよう. 射影多様体  $X \subseteq \mathbb{P}^N$  に対してまず, 非特異点  $P \in X_{\text{sm}}$  における接空間  $T_P X \subseteq \mathbb{P}^N$  の双対  $(T_P X)^* \subseteq \check{\mathbb{P}}^N$  は  $P$  において  $X$  に接する超平面  $H \subseteq \mathbb{P}^N$  全体の集合である:

$$(T_P X)^* = \{H^* | T_P X \subseteq H\}.$$

$X$  の次元を  $n$  とし, 線型部分空間  $T \subseteq \mathbb{P}^N$  にその双対  $T^* \subseteq \check{\mathbb{P}}^N$  を対応させることにより得られる標準的同型

$$\mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N) \simeq \mathbb{G}(N - n - 1, \check{\mathbb{P}}^N); T \leftrightarrow T^*$$

を経由して,  $\mathbb{G}(N - n - 1, \check{\mathbb{P}}^N)$  上の線型部分空間の普遍族  $I \subseteq \mathbb{G}(N - n - 1, \check{\mathbb{P}}^N) \times \check{\mathbb{P}}^N$  を  $\gamma(X)$  に制限したものを  $I_{\gamma(X)}$  と表そう. このとき  $X_{\text{sm}} \times \check{\mathbb{P}}^N$  において

$$C(X_{\text{sm}}) = \coprod_{P \in X_{\text{sm}}} (T_P X)^* = X_{\text{sm}} \times_{\mathbb{G}} I = X_{\text{sm}} \times_{\gamma(X)} I_{\gamma(X)}$$

<sup>2</sup>“Piene” は「ピーネ」と読む, と Roy Skjelnes 氏 (KTH, スウェーデン) に教わった. しかし, ロイの苗字の読み方を訊くのを忘れた.

が成り立つ. 余法線写像  $\pi$  から引き起こされる射を  $\pi' : I_{\gamma(X)} \rightarrow X^*$  とし,  $\mathbb{G} := \mathbb{G}(N - n - 1, \check{\mathbb{P}}^N)$  と書くことにすれば, 次の可換図式が得られる [18, 第 2 節], [26, 108 頁]:

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & X^* & \subseteq & \check{\mathbb{P}}^N \\ & & & & \uparrow \pi' & & \uparrow \\ C(X) & \supseteq & C(X_{\text{sm}}) & \longrightarrow & I_{\gamma(X)} & \subseteq & I \subseteq \mathbb{G} \times \check{\mathbb{P}}^N \\ \downarrow & & \downarrow & \square & \downarrow & & \downarrow \\ X & \supseteq & X_{\text{sm}} & \longrightarrow & \gamma(X) & \subseteq & \mathbb{G} \\ & & \searrow \gamma & & & & \nwarrow \end{array}$$

次元 1 の場合など  $\pi$  が一般有限射の場合には,  $\pi'$  が分離的ならば  $\gamma$  と  $\pi$  の非分離次数は等しいことがこの可換図式 (1) からわかる. 実際, 定理 2.1 は, 以下の補題を  $\pi'$  に適用することにより接触次数などを経由せずに直接, 証明される [18, 定理] (高次の場合も同様である):

**補題 2.4** ([18, 補題]). 代数多様体  $S$  からグラスマン多様体  $\mathbb{G}(m, \mathbb{P}^M)$  への射  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{G}(m, \mathbb{P}^M)$  による普遍族  $I \subseteq \mathbb{G}(m, \mathbb{P}^M) \times \mathbb{P}^M$  の  $S \times \mathbb{P}^M$  への引き戻しを  $I_S$  とするとき,  $\varphi$  が分離的かつ  $S$  が 1 次元ならば第 2 射影  $I_S \rightarrow \mathbb{P}^M$  は分離的となる.

**2.3.** 先に進む前に, 我々の問題に深く関連するある問題について触れておこう. 射影曲線に対する定理 2.1 を踏まえてクライマン-ピーネ [26] は, 可換図式 (1) に関して次の問題を提起した:

**問題 2.5** (クライマン-ピーネ [26, 108–109 頁]). 高次元の場合に  $\pi' : I_{\gamma(X)} \rightarrow X^*$  は分離的か?

可換図式 (1) から,  $\pi'$  と  $\gamma$  とが分離的ならば  $\pi$  も分離的となることは明らかであろう. したがって, クライマン-ピーネの問題 2.5 が肯定的ならば我々の問題 2.3 も肯定的ということになる. なお, 補題 2.4 の主張は  $\dim S > 1$  の場合, 一般には正しくない [18, 例].

### 3. 今世紀

**3.1.** 我々の問題 2.3 に戻ろう. 著者の知る限りでは, 定理 2.2 の証明が発表されたあと少なくとも十年間は問題 2.3 に対して解を与える結果は無かったと思われる. 否定的解答を問題 2.3 に (したがってクライマン-ピーネの問題 2.5 に) 与える例として最初に認識されたのはある種のセグレ多様体であろう:

**定理 3.1** ([19, 定理]).  $X$  を任意標数  $p \geq 0$  の体  $k$  上の射影空間の直積  $\prod_{i=1}^r \mathbb{P}^{n_i}$  のセグレ埋め込みによる像とする.  $r \geq 2$  かつ任意の  $i$  について  $n_i \geq 1$  と仮定し  $n := \sum_{i=1}^r n_i$  とおく. このとき:

- (1)  $X$  のガウス写像  $\gamma$  は埋め込みとなる;
- (2) 双対多様体  $X^*$  が余次元 1 となるためには, 任意の  $i$  について  $2n_i \leq n$  となることが必要十分である;
- (3)  $X$  が再帰的ではないためには,  $p = 2$ ,  $n$  が奇数かつ任意の  $i$  に対して  $2n_i \leq n$  となることが必要十分である.

定理 3.1 によれば, 標数  $p = 2$  におけるセグレ多様体  $X := \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^7$  は, 問題 2.3 の否定的解答を与える例である.  $X$  が再帰的ではないことは直接計算によっても確かめられる<sup>3</sup>: 実際,  $X$  の双対多様体は, 標数  $p = 2$  ならば 2 次超曲面  $Q$  ( $p \neq 2$  ならば 4 次

<sup>3</sup>IMPA (リオデジャネイロ) 滞在中, 2001 年 7 月の冬, フロイデンタール多様体 [23] の双対多様体を一般標数で計算しているときにこの例に気付いた.  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^7$  はリー環  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_8$  に付随したフロイデンタール多様体である.

超曲面) となることが簡単にわかり, したがってその双対  $Q^* = X^{**}$  もまた 2 次超曲面となるので  $X$  には戻らない. 先行結果としてエフェッツ-ソラップ [12] によるふたつの射影空間の直積の場合に関する研究がある: ふたつの場合は常に再帰的となることが前世紀から知られていた [12, 定理 2].

別の例としてはある種のヴェロナーゼ多様体がある:

**命題 3.2** ([20, 定理]).  $X$  を任意標数  $p \geq 0$  の体  $k$  上の射影空間  $\mathbb{P}^n$  の  $d$  重ヴェロナーゼ埋め込みによる像とする ( $d \geq 2$ ). このとき:

- (1)  $X$  のガウス写像は,  $p \neq 2$  または  $n \geq 2$  ならば埋め込みとなり,  $p = 2$  かつ  $n = 1$  ならば分離的ではない;
- (2) 双対多様体  $X^*$  は余次元 1 となる;
- (3)  $X$  が再帰的ではないためには  $p = 2$  かつ  $n$  が奇数となることが必要十分である.

命題 3.2 は,  $k$  が代数閉体の場合には以下に述べる定理 3.8 の特別な場合であり, [19] と同じ方針で, なおかつ, より簡単に証明される: 実際, 主張 (1) は [19] と同様に直接計算で確かめられ, (2) と (3) は, エフェッツ-ソラップの強力な結果 [12, 補題 3] を基に, [19, 補題] の替わりに次を用いることにより証明される:

**補題 3.3** ([8, 補題 2.3], [20]).  $\{h_{ij} | 1 \leq i \leq j \leq n\}$  を体  $k$  上の不定元の集合とし,  $H$  を,  $i = j$  ならば  $2h_{ii}$ ,  $i < j$  ならば  $h_{ij}$  を  $(i, j)$  成分にもつ  $n$  次対称行列とする. このとき  $H$  の階数は, 標数  $p = 2$  かつ  $n$  が奇数ならば  $n - 1$  となり,  $p \neq 2$  または  $n$  が偶数ならば  $n$  となる.

さて, 定理 3.1, 命題 3.2 により, 標数  $p = 2$  かつ任意の奇数  $n \geq 3$  に対して, 問題 2.3 に否定的解答を与える  $n$  次元射影多様体  $X$  の例が存在することがわかる. では, 偶数次元の, または,  $p > 2$  の場合にそのような例は存在するだろうか.<sup>4</sup> その後, 深澤氏 [4], [5] は任意正標数  $p > 0$  かつ 3 以上の次元をもつ例を与えた: 以下に述べる [5] の例は非特異ゆえ [4] の例よりも興味深く重要である:

**例 3.4** (深澤 [5]).  $Y \subseteq \mathbb{P}^n$  を次数  $p + 1$  のフェルマー超曲面とし,  $X \subseteq \mathbb{P}^{2(n+1)-1}$  を直積  $\mathbb{P}^1 \times Y$  のセグレ埋め込みによる像とする. このとき,  $X$  のガウス写像は埋め込みとなり, さらに  $n \geq 3$  ならば  $X$  は再帰的ではない.

こうして問題 2.3 および問題 2.5 について残るは 2 次元の場合である. 我々の問題 2.3 については肯定的解をもつことが示された:

**定理 3.5** ([7, 定理]). 射影曲面  $X$  のガウス写像が分離的ならば  $X$  は再帰的である.

明らかに, クライマン-ピーネの問題 2.5 が肯定的解をもつならば上記の定理 3.5 はその系に過ぎない. しかし 2 次元の場合, 状況はそう単純ではない. 実際, 問題 2.5 に否定的解答を与える例が存在する:

**例 3.6** ([7, 例]). 射  $\iota: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^{10}$  を

$$\iota(1 : x : y) := (1 : x : y : x^p : y^p : x^{p^2} : y^{p^2} : x^{p^2+1} : xy^{p^2} : x^{p^2}y : y^{p^2+1}).$$

により定義すると  $\iota$  は埋め込みとなる. 像を  $X := \iota(\mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^{10}$  とおくと, 可換図式 (1) における  $\pi'$  は分離的ではない.

**3.2.** これまでの研究をまとめてみると, 射影多様体  $X$  は再帰的ならばガウス写像は分離的となるが, 逆が一般に成り立つためには  $\dim X \leq 2$  が必要十分である. こうして, ガウス写像の分離性と射影双対に関する再帰性の関係は明らかになったといえよう. しかし, これは射影多様体の埋め込みを固定している場合である. そこで, 次の段階として以下の問題を考えよう:

**問題 3.7.** 次元が 3 以上の射影多様体  $X$  に対して, ガウス写像が分離的となる非再帰的埋め込み  $X \hookrightarrow \mathbb{P}^M$  は存在するか?

<sup>4</sup>これは, 未解決問題のひとつとして [21] に挙げた “Question 1” である.

ここで、埋め込み  $X \hookrightarrow \mathbb{P}^M$  が再帰的であるとは、 $X$  が  $\mathbb{P}^M$  において再帰的であることとする。

標数  $p = 2$  の場合、奇数次元の射影多様体  $X$  に対しては解は肯定的である：

**定理 3.8** ([6], [22, 定理 3.7]).  $X \subseteq \mathbb{P}^N$  を次元  $n$ , 標数  $p \geq 0$  の射影多様体とし,  $v_d : \mathbb{P}^N \hookrightarrow \mathbb{P}^M$  を  $d$  重ヴェロナーゼ埋め込みとする ( $d \geq 2$ ). このとき：

- (1)  $v_d(X)$  のガウス写像は,  $p \neq 2$  または  $n \geq 2$  ならば像への双有理写像となり,  $p = 2$  かつ  $n = 1$  ならば分離的ではない；
- (2) 双対多様体  $v_d(X)^*$  は余次元 1 となる；
- (3)  $v_d(X)$  が再帰的ではないためには  $p = 2$  かつ  $n$  が奇数となることが必要十分である。

標数  $p > 2$  または偶数次元の場合はどうか？ 我々の結果は次の通り：

**定理 3.9** ([8, 定理 1.1]). 線型ではない射影多様体  $X$  のガウス写像の微分の階数が恒等的に零であり  $\dim X \geq 3$  ならば, ガウス写像が像への双有理写像となる非再帰的埋め込み  $X \hookrightarrow \mathbb{P}^M$  が存在する。

定理 3.9 の仮定をみたす典型的な例としては、次数が標数  $p$  を法として 1 と合同となる次数をもつフェルマー超曲面がある：実際、そのガウス写像はフロベニウス写像を経由することが簡単にわかる。さらに、

**例 3.10** ([8, 例 3.1]). 射影空間  $\mathbb{P}^n$  はガウス写像の微分が恒等的に零となる射影空間への埋め込みをもつ：というのは、 $\Gamma \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$  を  $\mathbb{P}^n$  のフロベニウス写像のグラフとし、 $\Gamma$  のセグレ埋め込みによる像を  $X \subseteq \mathbb{P}^{(n+1)^2-1}$  とする。このとき、直接計算で  $X$  のガウス写像  $\gamma$  の微分が恒等的に零となることが確かめられる。定理 3.9 によれば  $\mathbb{P}^n$  はガウス写像が像への双有理写像となる非再帰的埋め込みをもつ。

#### 4. 未解決問題

最後に、少々脱線ではあるが、ガウス写像の分離性に関する未解決問題を述べる：

**問題 4.1.** 射影多様体のガウス写像が分離的ならばその一般ファイバーは線型となるか？

**問題 4.2.** 与えられた代数関数体の非分離拡大  $K/K'$  に対して、 $K$  を関数体にもつ射影多様体  $X$  でガウス写像  $\gamma$  の像の関数体が  $K'$  となるもの、すなわち、体拡大が  $K/K' = K(X)/K(\gamma(X))$  となるものは存在するか？

**問題 4.3.** ガウス写像が非分離的となる射影空間への (双有理) 埋め込みをもつ非特異射影多様体を分類せよ。

**謝辞.** 講演の機会を与えて下さった世話人の佐藤栄一先生 (九州大学)、宮崎 誓先生 (佐賀大学) に感謝します。また、福岡滞在中、佐藤先生には大変お世話になりました。なお今回の講演内容は、2003 年 1 月に同じく九州大学において佐藤先生主催のもと開催された研究集会での講演 [21] の続編に相当します。このような講演発表の機会を頂けることが研究を推進する上での大きな励みとなっております。佐藤栄一先生にはここに、あらためて御礼申し上げます。どうもありがとうございました。

最後に、原稿を注意深く読み貴重な助言を下さった深澤 知氏および早稲田大学大学院院生の方々 (伊藤達哉君、今関靖一郎君、兵藤史武君、眞鍋 岳君)、そして、 $\text{\LaTeX}$ 、特に “ $\text{\LaTeX}$ -pic” について詳しくご教示下さった古川勝久氏に感謝します。

#### 参考文献

1. S. Fukasawa: Developable varieties in positive characteristic, Hiroshima Math. J. **35** (2005), 167–182.
2. ———: Varieties with non-linear Gauss fibers, Math. Ann. **334** (2006), 235–239.
3. ———: Varieties with nonconstant Gauss fibers, Hiroshima Math. J. **36** (2006), 171–174.

4. ———: *A remark on Kleiman-Piense's question for Gauss maps*, Comm. Algebra **35** (2007), 1401–1404.
5. ———: *On Kleiman-Piense's question for Gauss maps*, Compos. Math. **142** (2006), 1305–1307.
6. S. Fukasawa, H. Kaji: 研究連絡, 2005 年 12 月.
7. ———: *The separability of the Gauss map and the reflexivity for a projective surface*, Math. Z. **256** (2007), 699–703.
8. ———: *Existence of a non-reflexive embedding with birational Gauss map for a projective variety*, Math. Nachr. **281** (2008), 1412–1417.
9. P. Griffiths, J. Harris: *Algebraic geometry and local differential geometry*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **12** (1979), 355–432.
10. A. Hefez, N. Kakuta: *On the geometry of nonclassical curves*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **23** (1992), 79–91.
11. A. Hefez, S. L. Kleiman: *Notes on the duality of projective varieties*, “Geometry Today,” Progr. Math. **60**, Birkhäuser, Boston, 1985, pp. 143–183.
12. A. Hefez, A. Thorup: *Reflexivity of Grassmannians and Segre varieties*, Comm. Algebra **15** (1987), 1095–1108.
13. A. Hefez, J. F. Voloch: *Frobenius non classical curves*, Arch. Math. (Basel) **54** (1990), 263–273.
14. M. Homma, H. Kaji: *On the inseparable degree of the Gauss map of higher order for space curves*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **68** (1992), 11–14.
15. H. Kaji: *On the tangentially degenerate curves*, J. London Math. Soc. (2) **33** (1986), 430–440.
16. ———: *On the Gauss maps of space curves in characteristic  $p$* , Compos. Math. **70** (1989), 177–197.
17. ———: *On the Gauss maps of space curves in characteristic  $p$ , II*, Compos. Math. **78** (1991), 261–269.
18. ———: *On the inseparable degrees of the Gauss map and the projection of the conormal variety to the dual of higher order for space curves*, Math. Ann. **292** (1992), 529–532.
19. ———: *On the duals of Segre varieties*, Geom. Dedicata **99** (2003), 221–229.
20. ———: *On the reflexivity and the Gauss map of Veronese varieties*, 2003 年 1 月, 未発表.
21. ———: *reflexivity と Gauss 射の分離性に関する Kleiman-Piense の問題について*, 代数幾何学シンポジウム「高次元多様体、正標数上の話題を中心として」(九州大学, 2003 年 1 月 14 日–17 日), 報告集.
22. ———: *The separability of the Gauss map versus the reflexivity*, “Proceedings of the IV Iberoamerican Conference on Complex Geometry (Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil, August 12–18, 2007),” Geom. Dedicata に採録決定済.
23. H. Kaji, O. Yasukura: *Projective geometry of Freudenthal's varieties of certain type*, Michigan Math. J. **52** (2004), 515–542.
24. N. Katz, *Pinceaux de Lefschetz: Théorème d'existence*, Exposé XVII, “Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique (SGA7), Part II,” Lecture Notes in Math. **340**, Springer, Berlin, 1973, pp. 212–253.
25. S. L. Kleiman: *About the conormal scheme*, “Complete intersections (Acireale, 1983),” Lecture Notes in Math. **1092**, Springer, Berlin, 1984, pp. 161–197.
26. S. L. Kleiman, R. Piense: *On the inseparability of the Gauss map*, “Enumerative Algebraic Geometry (Proceedings of the 1989 Zeuthen Symposium),” Contemp. Math. **123**, Amer. Math. Soc., Providence, 1991, pp. 107–129.
27. A. Noma: *Gauss maps with nontrivial separable degree in positive characteristic*, J. Pure Appl. Algebra **156** (2001), 81–93.
28. J. Rathmann: *The uniform position principle for curves in characteristic  $p$* , Math. Ann. **276** (1987), 565–579.
29. J. F. Voloch: *On the geometry of space curves*, “Proceedings of the 10th School of Algebra, (IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, February 1989),” 1990, pp. 121–122.
30. A. H. Wallace: *Tangency and duality over arbitrary fields*, Proc. London Math. Soc. (3) **6** (1956), 321–342.
31. F. L. Zak: “Tangents and Secants of Algebraic Varieties,” Transl. Math. Monogr. **127**, Amer. Math. Soc., Providence, 1993.