

ガウス写像の非分離性に関する Kleiman-Piene の問題について

楫 元

早稲田大学理工学部数理科学科

基礎体の標数が正である代数幾何では, さまざまな, 標数零の場合と様子の異なる現象¹ が知られている. 射影幾何的観点に限ると正標数特有の現象を引き起こす一因は, 射影多様体のガウス写像 (が定義する関数体の拡大) の非分離性にあると思われる. 一方, そのような現象をコントロールするための一条件として, 余法多様体や双対多様体を用いて定義される性質 “reflexivity” がある.

ガウス写像の非分離性と non-reflexivity とは同値か? それが本稿のテーマである. 初めに術語の定義と知られている事実を簡単に紹介し, 標題の問題について, その背景と共に説明する. 次にその解答の一つを与え, 最後に, 関連して得られた結果 [11] について報告する. 以下では, k を任意標数 $p \geq 0$ の代数的閉体とし, $X \subseteq \mathbb{P}^N$ を k 上の n 次元射影多様体とする. X は線型ではないと仮定する.

$$\begin{array}{ccc} X & & ? \\ \text{ガウス写像} \downarrow & : \text{非分離的} & \Leftrightarrow X : \text{non-reflexive} \\ \mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N) & & \end{array}$$

1. 術語と知られている事実

非特異点 $x \in X$ に対して, x での X の射影接平面 $T_x X$ を対応させることにより得られる有理写像を $X \subseteq \mathbb{P}^N$ の ガウス写像 (Gauss map) と呼び, γ で表すことにする:

$$\gamma : X \dashrightarrow \mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N); x \mapsto T_x X \subseteq \mathbb{P}^N.$$

ただし, $\mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N)$ は, $\mathbb{P}^N$ 内の n 次元線型部分空間からなるグラスマン多様体である.

よく知られているように, 標数零の場合には γ の一般ファイバーは線型部分空間となる [3, 19]: たとえば平面曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^2$ の場合では, 複接線の個数は有限となるということである. また, X が非特異の場合には, 任意標数において γ は有限射となる [19]. したがって, 標数零の非特異射影多様体の場合には, γ は像への双有理有限射となる.

標数 $p > 0$ の場合はどうか? 次数 $p+1$ のフェルマー曲線 [18]

$$X : x^{p+1} + y^{p+1} + z^{p+1} = 0$$

を考えてみると, 一般の点における接線との接触次数は, 標数零ならば 2 と等しいところが p となってしまうことがわかる: したがって, $p > 2$ ならば X は至るところ

報告集原稿: 代数幾何学シンポジウム—高次元多様体、正標数上の話題を中心として— @九州大学, 2003/01/14–17)

¹ “病的” 現象と呼ぶ人がいるが, それは差別の一種だと思う.

変曲点ということになる。また、ガウス写像 γ はフロベニウス射と一致することが容易にわかり、像への双有理写像にはならない。

このフェルマー曲線の場合には複接線は存在しないが、無限に多くの複接線を持つ非特異射影曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ の例が知られている。有理曲線の場合には、その構成は容易である：実際、任意の非分離的有限射 $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ に対して、そのグラフ $\Gamma_f \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ が二次曲面となるように $\mathbb{P}^3$ に埋め込んで得られる空間曲線 $X := \Gamma_f \subseteq \mathbb{P}^3$ を考える。すると、そのガウス写像 γ から引き起こされる、像 $\gamma(X)$ の正規化への射 $\tilde{\gamma} : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ は、 f と等しいことがわかる。特に f が分離次数 $s > 1$ を持つならば X の一般の点における接線は s 個の接点を持ち、結局、無限に多くの複接線をもつことになる [7, 16]。ordinary 楕円曲線の場合² にも、基本的には同じアイディアで、複接線を無限に多く持つように射影空間の中に埋め込むことができる³ [8, 9]。次元 $n \geq 2$ の場合については野間 淳氏 (横浜国大) [15] により、 γ の一般単射性 (generic injectivity) の成り立たない興味深い射影多様体の例が与えられている。

いずれの例でも、ガウス写像 γ は非分離的となっている。

$\mathbb{P}^N$ 内の点 x と超平面 H の組 (x, H) で、 x は X の非特異点で H は射影接平面 $T_x X$ を含むという条件を満たすものの集合の閉包を X の余法多様体 (conormal variety) と呼び、 $C(X)$ で表す。また、双対射影空間 $\check{\mathbb{P}}^N$ への射影による $C(X)$ の像を X の双対多様体 (dual variety) と呼び、 X^* で表す：

$$\begin{array}{ccc} C(X) := \overline{\prod_{x \in \text{Reg } X} (T_x X)^*} & \subseteq & X \times \check{\mathbb{P}}^N \\ \downarrow \pi & & \downarrow \text{projection} \\ X^* := (\text{image}) & \subseteq & \check{\mathbb{P}}^N \end{array}$$

ただし、 $C(X)$ からの射影を π とし、 $(T_x X)^* := \{H | H \supseteq T_x X\} \subseteq \check{\mathbb{P}}^N$ とおく。 X が超曲面ならば、明らかに $C(X) = X$ かつ $\gamma = \pi$ となる。

標数零の場合には、自然な同一視 $\check{\mathbb{P}}^N = \mathbb{P}^N$ により $X^{**} = X$ となることはよく知られている。また、正標数の場合、一般にはこの等式が成り立たない：たとえば、strange 曲線として知られる標数 $p = 2$ の二次曲線 X ならば、 X^* は直線となってしまう X^{**} は点に退化してしまうので、 $X^{**} \neq X$ である。

正標数の場合に“標数零と同様の幾何”を期待するには、 X に対して何を仮定すれば十分か？たとえば、“ $X^{**} = X$ ” (reciprocity) だけでは弱すぎることは簡単にわかる：実際、先ほどのフェルマー曲線の場合では $X^* \simeq X$ となり $X^{**} = X$ が成り立っている。そこで、双対多様体だけに着目するのではなく、もう少し強い条件として、自然な同型 $\mathbb{P}^N \times \check{\mathbb{P}}^N \simeq \check{\mathbb{P}}^N \times \mathbb{P}^N$ のもと、

$$C(X) \simeq C(X^*)$$

²残る場合、つまり、超特異楕円曲線および種数 $g \geq 2$ の非特異曲線 X の場合には、ガウス写像 γ の分離次数は常に 1、つまり、一般単射性 (generic injectivity) の成り立つことが知られている [8, 9]。「非特異射影多様体 X に対して、 γ の一般単射性はいつ成り立つか？」は面白い問題だと思う。たとえば、余接束 Ω_X^1 がある種の“一般”豊富性を持つならば γ の一般単射性は成立することが知られている [12]。

³非特異性を仮定しないならば、 k 上の任意の 1 次元代数関数体の有限次非分離拡大 K/K' に対して、 K を関数体にもつ射影曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ で $K(X)/K(\gamma(X)) = K/K'$ となるものの存在が示されている [8]。

となることを考える. このとき X は reflexive であるという. 双対多様体の定義から明らかなように, X が reflexive であるならば $X^{**} = X$ が成り立つ. 有名な Segre-Wallace の判定法 [4] によると, X が reflexive であるためには $\pi : C(X) \rightarrow X^*$ が分離的となることが必要十分である. したがって, 最初に掲げた問題は次のように言い換えられる:

$$\begin{array}{ccc} X & ? & C(X) \\ \gamma \downarrow & : \text{非分離的} & \Leftrightarrow \quad \pi \downarrow : \text{非分離的} \\ \mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N) & & X^* \end{array}$$

2. KLEIMAN-PIENE の問題とその背景

射影曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対しては, その order sequence $\{b_j\}$ を考えるとよい: 埋込 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ の定める部分空間を $\Lambda \subseteq \Gamma(X, \mathcal{O}_X(1))$ とするとき, 一般の点 $x \in X$ に対して,

$$\{b_0 < b_1 < \cdots < b_N\} := \{\text{ord}_x(f) \mid 0 \neq f \in \Lambda\}$$

により定まる非負整数列 $\{b_j\}$ が $X \subseteq \mathbb{P}^N$ の order sequence である. 明らかに $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ であり, b_2 は一般の点における接線との接触次数と一致する. 標数零ならば, 任意の j について $b_j = j$ が成り立つことはよく知られている. 標数 $p > 0$ の場合, b_2 を割り切る p の最高べき p^e は, γ の非分離次数と等しいこと [6, 8], および, π の非分離次数と等しいこと [4] が知られている. 従って, それらの非分離次数は等しい [17]:

$$\text{insep. deg } \gamma = p^e = \text{insep. deg } \pi.$$

したがって, 射影曲線の場合には, 問題の同値性が成り立つことがわかる.

一般次元の場合における γ と π の関係について考えよう. 議論を簡単にするために, 以下, X は非特異とする. グラスマン多様体 $\mathbb{G}(N - n - 1, \check{\mathbb{P}}^N)$ の普遍族を $U \subseteq \mathbb{G}(N - n - 1, \check{\mathbb{P}}^N) \times \check{\mathbb{P}}^N$ とすれば, $C(X)$ は X と U の $\mathbb{G}(N - n - 1, \check{\mathbb{P}}^N)$ 上のファイバー積として得られる:

$$\begin{array}{ccccc} C(X) = X \times_{\mathbb{G}} U & \rightarrow & & U & \\ \downarrow & & \square & & \downarrow \\ \gamma : X & \rightarrow & \mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N) \simeq \mathbb{G}(N - n - 1, \check{\mathbb{P}}^N) & & \\ x & \mapsto & T_x X & \leftrightarrow & (T_x X)^* \end{array}$$

これより π は, γ の base extension と射影 $U_{\gamma(X)} \twoheadrightarrow X^*$ との合成に分解することがわかる:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \gamma(X) \times \check{\mathbb{P}}^N & \rightarrow & \check{\mathbb{P}}^N & & \\ & & \cup & & \cup & & \\ \pi : C(X) & \rightarrow & U_{\gamma(X)} & \twoheadrightarrow & X^* & & \\ \downarrow & & \square & & \downarrow & & \\ \gamma : X & \twoheadrightarrow & \gamma(X) & & & & \end{array}$$

したがって, γ が非分離的ならば π も非分離的である. 標題の問題はその逆, 「 π が非分離的ならば, ガウス写像 γ も非分離的となるか?」を問うものである:

Problem (Kleiman-Piense [13]). 射影 $U_{\gamma(X)} \rightarrow X^*$ は分離的か?

X が射影曲線の場合には, 先の order sequence による考察から $U_{\gamma(X)} \rightarrow X^*$ は分離的であることがわかる. また, 射影空間束から scroll への射影の分離性として, 直接証明することもできる [10]: ただし, その場合, 底 $\gamma(X)$ の次元が 1 であることが本質的である.

3. ひとつの解答

結論から先に述べれば, 一般に Kleiman-Piense の問題の解答は否定的である: 実際, 以下に示すように, セグレ多様体

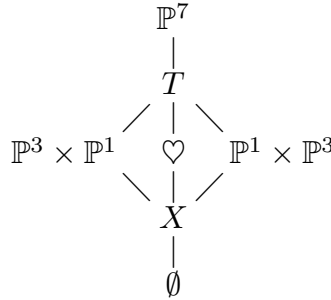
$$X := \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^7$$

が $p = 2$ のときに反例を与える.⁴

まず, $X = \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ の双対多様体を求めてみよう. そのために,

$$V := k^2 \otimes k^2 \otimes k^2, \quad G := GL_2 \times GL_2 \times GL_2$$

とおき, V の射影化 $\mathbb{P}_*(V) := (V \setminus \{0\})/k^\times$ への G の自然な作用を考える. 全部で 6 個の軌道に分解し, X は唯一の閉軌道となることが容易にわかる. 他の軌道の閉包を考えると, 全空間 $\mathbb{P}_*(V) = \mathbb{P}^7$ 以外に, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ と同型なもの 3 個と余次元 1 のものが 1 個現れる. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ と同型なもののうち $\mathbb{P}^1$ が“直積の真ん中に入ったもの”を $\heartsuit$, 余次元 1 のものを T で表すことにして包含関係を図示すると



となる. 超曲面 T の定義多項式 D は次のようにして得られる: $2 \times 2 \times 2$ -三次元行列

$$\begin{array}{ccc}
 & a & b \\
 & | & | \\
 c & \text{---} & d \\
 & | & | \\
 & e & f \\
 g & \text{---} & h
 \end{array} \in V$$

に対して, その平行な二面をなす 2×2 -行列を選び, λ, μ の二次斉次式

$$\begin{aligned}
 & \det \left(\lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \\
 &= \lambda^2(ad - bc) + \lambda\mu(ah - bg - cf + de) + \mu^2(eh - fg)
 \end{aligned}$$

⁴射影空間 2 個の直積からなるセグレ多様体は, 後に述べるように, 常に reflexive となることが A. Hefez-A. Thorup [5] により知られている.

を考え, その判別式を D とおく:

$$D := (ah - bg - cf + de)^2 - 4(ad - bc)(eh - fg).$$

平行などの二面を選んでも, 同じ D を得ることがわかる. これは, A. Cayley [1] の hyperdeterminant として知られている.

さて, G の X への作用は, その双対多様体 X^* への自然な作用を引き起こす. ゆえに, 既約閉集合である X^* は G -軌道の和集合となる. ここで, 双対な作用 $G \curvearrowright \mathbb{P}_*(V^*)$ はもとの作用と同型なので, 軌道分解も同様なものになる. 既約性と対称性から X^* は X または T と同型となることがわかるが, X^* は $(T_x X)^* \simeq \mathbb{P}^3$ で覆われているので X と同型にはなり得ない. 結局, $X^* \simeq T$ となることがわかる.⁵ 特に $p = 2$ のときは, X^* は二次超曲面

$$T_{\text{red}} : ah - bg - cf + de = 0$$

と同型となり, その双対 X^{**} はやはり二次超曲面となるから, $X^{**} \neq X$. よって X は reflexive ではない.

一方, ガウス写像については, 直接計算すると $\gamma : X \rightarrow \mathbb{G}(3, \mathbb{P}^7)$ は埋込となることがわかる: 実際, $P = (1 : x) \times (1 : y) \times (1 : z) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に対して, $T_{\sigma P} X$ は, 次の四つのベクトルで張られる:

$$\begin{aligned} \sigma(P) &= \begin{pmatrix} 1 & x & y & z & yz & zx & xy & xyz \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x}(P) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & z & y & yz \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y}(P) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & z & 0 & x & zx \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z}(P) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & x & 0 & xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって, プリュッカー埋込を介して,

$$\gamma(\sigma(P)) = (1 : x : y : z : \cdots) \in \mathbb{P}_*(\wedge^4 V)$$

となり, これは埋込である.⁶

以上により, セグレ多様体 $X = \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^7$ に対しては, ガウス写像 γ は埋込となっているが $p = 2$ のとき reflexive ではないことがわかった.

この多様体の場合, π は分離的ではないが γ は分離的であり, 正標数特有の現象を引き起こす原因である非分離性は, ガウス写像 γ (または, $C(X) \rightarrow U_{\gamma X}$) の部分ではなく $U_{\gamma X} \rightarrow X^*$ の部分に存在する.

一般のセグレ多様体のガウス写像については, 次が示される:

⁵同様の議論から T は X の接多様体 $\text{Tan } X := \bigcup_{x \in X} T_x X \subseteq \mathbb{P}^7$ と一致することがわかる.

⁶この射影接空間の表示を用いて, $X^* \simeq T$ を次のように示すこともできる: まず, 軌道分解から, $\text{Tan } X = T$ となることがわかる. 一方, $Q = (-x : 1) \times (-y : 1) \times (-z : 1) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に対しては,

$$\begin{aligned} \sigma(Q) &= \begin{pmatrix} -xyz & yz & zx & xy & -x & -y & -z & 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x}(Q) &= \begin{pmatrix} -yz & 0 & z & y & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y}(Q) &= \begin{pmatrix} -zx & z & 0 & x & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z}(Q) &= \begin{pmatrix} -xy & y & x & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので, 自然内積に関して $T_{\sigma P} X$ と $T_{\sigma Q} X$ は直交していることがわかる. $\mathbb{P}^N$ とその双対 $\check{\mathbb{P}}^N$ を自然内積を用いて同一視すれば, $(T_{\sigma P} X)^* = T_{\sigma Q} X$ ということである. したがって, $X^* = \text{Tan } X$ となり, $X^* = \text{Tan } X = T$ となる.

Proposition [11]. *The Gauss map γ of the Segre embedding of $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$ with $n_i \geq 1$ for all i and $r \geq 2$ is always an embedding in any characteristic.*

4. セグレ多様体

主結果は,

Theorem [11]. *Let X be the image of the Segre embedding of $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r}$ over the ground field k of characteristic $p \geq 0$ with dimension $n = \sum_{i=1}^r n_i$, and assume that $n_i \geq 1$ for all i and $r \geq 2$. Then we have:*

- (1) *If $2n_i > n$ for some i , then X is reflexive with $\text{codim } X^* = 2n_i - n + 1$.*
- (2) *If $2n_i \leq n$ for all i , then $\text{codim } X^* = 1$, and*
- (3) *in that case, X is not reflexive if and only if $p = 2$ and n is odd.*

この Theorem からただちに, $\text{codim } X^* = 1$ となるためにはすべての i について $2n_i \leq n$ となる必要十分ということがわかる. この事実は, 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の場合には我々とは別の方法ですでに I. M. Gelfand-M. M. Kapranov-A. V. Zelevinsky [2] により証明が与えられており, さらに, 超曲面 X^* の次数に関する公式も与えられている. また, この余次元 1 となる条件は, 等質射影多様体の双対多様体に関する F. Knop-G. Menzel の研究 [14] から従う.

Theorem は次の一般化である:

Fact (Hefez-Thorup) [5]. *Let X be the image of the Segre embedding of $\mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^b$ with $a, b \geq 1$. Then X is reflexive, and $\text{codim } X^* = |a - b| + 1$.*

Theorem の証明の概略は次の通り:

Hessian Criterion [4]. *Let $(x_1, \dots, x_n)$ be a system of local coordinates of X at a general point P , let h be a general linear form such that $\{h = 0\} \supseteq T_P X$, and set*

$$H(X) := \left[\frac{\partial^2(h|X)}{\partial x_i \partial x_j}(P) \right].$$

Then, X is reflexive if and only if $\text{codim } X^ = \text{cork } H(X) + 1$.*

この $H(X)$ は general Hessian matrix と呼ばれることがある. 一般には, 不等式

$$1 \leq \text{codim } X^* \leq \text{cork } H(X) + 1$$

が成り立つ. Hessian Criterion を基にして, 次が導かれる:

Proposition (Hefez-Thorup) [5]. *Let $X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^N$ be a closed, integral subscheme, smooth over $\mathbb{Z}$, and set $X_k := X \times_{\mathbb{Z}} k$ for a field k . Then, we have*

- (1) $\text{codim } X_k^* = \text{cork } H(X_{\mathbb{Q}}) + 1$.
- (2) $\text{cork } H(X_k) = \text{cork } H(X_{\mathbb{Q}})$ if and only if X_k is reflexive.

正の整数 $n_1, \dots, n_r$ ($r \geq 2$) に対して, セグレ多様体 $X = \sigma(\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_r})$ の general Hessian matrix, $H(X)$ は, 不定元を成分とするサイズ $n_k \times n_l$ の行列 M_{kl} をブロックにもち, 対角ブロックは零行列である対称行列

$$M(n_1, \dots, n_r) := \begin{bmatrix} 0 & M_{12} & M_{13} & \cdots & M_{1r} \\ M_{21} & 0 & M_{23} & \cdots & M_{2r} \\ M_{31} & M_{32} & 0 & \cdots & M_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{r1} & M_{r2} & M_{r3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

で与えられることが, 直接計算することによりわかる (ただし, $M_{lk} = {}^t M_{kl}$ である).

Theorem は, 上の Proposition と次から従う:

Lemma [11]. *For given positive integers $n_1, \dots, n_r$ with $n := \sum_{i=1}^r n_i$, and for an arbitrary field k of characteristic $p \geq 0$, we have:*

- (1) *If $2n_i > n$, then $M(n_1, \dots, n_r)$ has corank $2n_i - n$ over k .*
- (2) *Assume $2n_i \leq n$ for all i . If $p = 2$, and n is odd, then $M(n_1, \dots, n_r)$ has corank 1 over k ; Otherwise, $M(n_1, \dots, n_r)$ has corank 0 over k .*

この結果は, $M(n_1, \dots, n_r)$ の (i, j) -成分を z_{ij} とするとき, 多項式環 $\mathbb{Z}[\{z_{ij} | 1 \leq i < j \leq n\}]$ の中で $M(n_1, \dots, n_r)$ の小行列式を計算することにより証明される. (2) の前半において, $M(n_1, \dots, n_r)$ の階数が落ちることだけなら, 交代行列の階数が常に偶数であることと, 対角成分が零の対称行列は標数 $p = 2$ においては交代行列であることから従う.

最後に,

Question 1. ガウス写像 γ が像に双有理的である非特異射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して, X が non-reflexive となるのは標数 $p = 2$ かつ X が奇数次元の場合に限られるか?

Question 2. 射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ のガウス写像 γ (の定める関数体の拡大) が分離的ならば, γ の一般ファイバーは線型部分空間となるか?

Question 2 については, $\dim X = 1$ の場合には肯定的であることが知られている [8]. また, γ の分離性より強い条件として reflexivity を仮定するならば, 一般次元においても肯定的であることが知られている [13].

参考文献

- [1]. A. Cayley, *On the theory of linear transformations*, Cambridge Math. J. 4 (1845), 1–16.
- [2]. I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Hyperdeterminants*, Adv. Math. **96** (1992), 226–263.
- [3]. P. Griffiths, J. Harris, *Algebraic geometry and local differential geometry*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **12** (1979), 355–452.
- [4]. A. Hefez, S. Kleiman, *Notes on the duality of projective varieties*, “Geometry Today”, Prog. Math., vol. 60, Birkhäuser, Boston, 1985, pp. 143–183.
- [5]. A. Hefez, A. Thorup, *Reflexivity of Grasmannians and Segre varieties*, Comm. Alg. **15** (6) (1987), 1095–1108.
- [6]. A. Hefez, J. Voloch, *Frobenius nonclassical curves*, Arch. Math. **54** (1990), 263–273.
- [7]. H. Kaji, *On the tangentially degenerate curves*, J. London Math. Soc. (2) **33** (1986), 430–440.
- [8]. H. Kaji, *On the Gauss maps of space curves in characteristic p* , Compos. Math. **70** (1989), 177–197.
- [9]. H. Kaji, *On the Gauss maps of space curves in characteristic p , II*, Compos. Math. **78** (1991), 261–269.
- [10]. H. Kaji, *On the inseparable degrees of the Gauss map and the projection of the conormal variety to the dual of higher order for space curves*, Math. Ann. **292** (1992), 529–532.
- [11]. H. Kaji, *On the duals of Segre varieties*, <http://pc193097.pc.waseda.ac.jp/>, Geometriae Dedicata (to appear).

- [12]. H. Kaji, A. Noma, *On the generic injectivity of the Gauss map in positive characteristic*, J. Reine Angew. Math. **482** (1997), 215–224.
- [13]. S. Kleiman, R. Piene, *On the inseparability of the Gauss map*, Contemp. Math. **123** (1991), 107–129.
- [14]. F. Knop, G. Menzel, *Duale Varietäten von Fahnenvarietäten*, Comment. Math. Helvetici **62** (1987), 38–61.
- [15]. A. Noma, *Gauss maps with nontrivial separable degree in positive characteristic*, J. Pure Appl. Algebra **156** (2001), 81–93.
- [16]. J. Rathmann, *The uniform position principle for curves in characteristic p* , Math. Ann. **276** (1987), 565–579.
- [17]. J. Voloch, *On the geometry of space curves*, Proceedings of the 10th School of Algebra, Vitoria, Brazil, 1989, pp. 121–122.
- [18]. A. Wallace, *Tangency and duality over arbitrary fields*, Proc. London Math. Soc. (3) **6** (1956), 321–342.
- [19]. F. L. Zak, *Tangents and Secants of Algebraic Varieties*, Translations of Math. Monographs, vol. **127**, AMS, Providence, 1993.

楫 元

早稲田大学理工学部数理科学科

169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1

kaji@waseda.jp