PROJECTIVE VARIETIES ADMITTING AN EMBEDDING WITH A GAUSS MAP OF RANK ZERO

楫　元

0. 序

代数幾何学においては, 基礎体の標数が零の場合には見られない正標数特有の様々な現象が知られている. 射影代数幾何, 特に射影接空間の振る舞いについては, ガウス写像の分離性を仮定することにより標数零の場合と同様の “直感通りの幾何” が期待される (術語については以下に詳述する). ここでは, ガウス写像の微分の階数が落ちる射影埋め込みをもつ射影多様体について調べた結果について述べる. 特に最も極端な場合としてガウス写像の微分が恒等的に零となる (双正則) 射影埋め込みをもつ射影多様体について調べた結果について, 詳しく述べる. これは深澤知氏 (山形大学理学部) および古川勝久氏 (早稲田大学理工学部) との共同研究 [**7**], [**8**] により得られた成果である (FK:=Fukasawa-K, FFK:=Fukasawa-Furukawa-K, と略記する). 以下, 基礎体 k は標数 $p \geq 0$ の代数閉体とする.

1. 正標数特有の現象とガウス写像の定義

正標数における平面曲線の接線の振る舞いに関して, 標数零の場合と様相の異なる様々な奇妙な現象が知られている.

例 1.1 (A. Wallace [**33**, §7])**.** 基礎体の標数は $p > 0$ とし, $X \subseteq \mathbb{P}^2$ を

$$x^{p+1} + y^{p+1} + z^{p+1} = 0$$

により定まる平面曲線とする. 点 $P = (a : b : c) \in X$ における接線は, $T_P X = \{a^p x + b^p y + c^p z = 0\}$ となり一般の接点 $P \in X$ における接触重複度は $i(X, T_P X; P) = p$ となる. 実際, 任意の $P = (a : b : c) \in X$ に対して $Q := (a^{p^2} : b^{p^2} : c^{p^2})$ とするとき, $X \cap T_P X = pP + Q$ となっている. とくに標数が $p > 2$ ならば, 一般の接点での接触重複度が 2 よりも大きくなり, すべての点が変曲点という標数零の場合ではあり得ない状況である.

次に X の双対写像について見てみる. 一般に平面曲線 $X \subseteq \mathbb{P}^2$ の**双対写像 (dual map)** とは, X の非特異点 $P \in X$ に対して, P での接線 $T_P X$ に対応する双対射影平面の点 $[T_P X] \in \check{\mathbb{P}}^2$ を対応させることにより得られる有理写像のことである. 我々の X の場合, 具体的には,

$$\gamma : X \to \check{\mathbb{P}}^2; P = (a : b : c) \mapsto [T_P X] = (a^p : b^p : c^p),$$

となる. ただし $\mathbb{P}^2$ の直線と双対射影平面 $\check{\mathbb{P}}^2$ との対応は $\mathbb{P}^2 \supseteq \{\xi x + \eta y + \zeta z = 0\} \leftrightarrow (\xi : \eta : \zeta) \in \check{\mathbb{P}}^2$ とする. すると簡単な計算から γ の像, すなわち**双対曲線 (dual curve)** $X^* := \gamma(X)$ は $\xi^{p+1} + \eta^{p+1} + \zeta^{p+1} = 0$ により定義される平面曲線となり, X と同型であることがわかる. ゆえに γ は X のフロベニウス写像である. 標数零の場合は, (次数 2 以上の) 任意の平面曲線 X に対して γ は双有理同値, すなわち $K(X) = K(X^*)$ となることが古典的に良く知られているが, この場合の $K(X)/K(X^*)$ は次数 p の純非分離拡大である. さらにこの X^* に対して双対曲線を考えれば, 標準的に $X \simeq X^{**} := (X^*)^*$ となることもわかる.

研究集会「射影多様体の幾何とその周辺 2009」(高知大学, 2009 年 11 月 21 日, 16:00–17:00).

例 1.2. 標数は $p>0$ とし, $X\subseteq\mathbb{P}^2$ を

$$X: y=x^p\subseteq\mathbb{A}^2$$

により定まる平面曲線とする. $\frac{dy}{dx}=px^{p-1}=0$ なので, 点 $P=(a,a^p)\in X$ における接線は $T_PX=\{y-a^p=0\}$ となり, すべて x-軸に平行である. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ で考えればすべての接線が無限遠にある点 $(1:0:0)\in\mathbb{P}^2$ を通ることになる. このように, 非特異点におけるすべての接線がある共通の一点をとおる射影曲線を**strange[1]曲線 (strange curve)** という. 標数零であれば strange 曲線は直線のみであるが, 正標数においては非自明な strange 曲線が存在するわけである. X の双対写像 γ を調べてみると,

$$\gamma: X \dashrightarrow X^*; P=(a,a^p)\mapsto[T_PX]=(0:1:-a^p)$$

となっており, γ, すなわち, $K(X)/K(X^*)$ は純非分離的で次数 p となっている. 双対曲線は, $X^*=\{\xi=0\}$ となり $\check{\mathbb{P}}^2$ の直線である. したがって X^{**} は一点に退化する.

strange 曲線に関しては次の結果が知られている:

定理 1.3 (E. Lluis [**23**], P. Samuel [**31**])**.** 非線形非特異 strange 曲線は, 標数 $p=2$ の 2 次曲線に限る.

定義 1.4. 射影多様体 $X\subseteq\mathbb{P}^N$ の**ガウス写像 (Gauss map)** とは, X の次元を n とし $\mathbb{P}^N$ 内の n 次元線型空間全体のなすグラスマン多様体を $\mathbb{G}(n,\mathbb{P}^N)$ とするとき, X の非特異点 x に対して x における射影接空間 T_xX を対応させることにより得られる有理写像, $\gamma: X\dashrightarrow\mathbb{G}(n,\mathbb{P}^N)$ のことと定義する ([**9**, §1 (e)], [**34**, I, §2]):

$$\gamma: X\dashrightarrow\mathbb{G}(n,\mathbb{P}^N);\ \overset{\text{非特異点}}{x}\mapsto T_xX\subseteq\mathbb{P}^N.$$

以下, 自明な例外を除くために X は線型ではないと仮定する. また, $\gamma(X)$ により X の非特異部分 X_{sm} の γ による像の閉包を表すことにしよう: $\gamma(X):=\gamma(X_{\mathrm{sm}})^-$. ガウス写像 γ が**分離的 (separable)** とは γ により引き起こされる関数体の拡大 $K(X)/K(\gamma(X))$ が分離的であることと定める. $N=2, n=1$ の場合のガウス写像は上の例で見た平面曲線の双対写像に他ならない.

射影代数幾何, 特に射影接空間の振る舞いについては, ガウス写像の分離性を仮定することにより標数零の場合と同様の "直感通りの幾何" が期待される. そこで次の問題を提起する:

問題 1.5. ガウス写像 (の引き起こす関数体の拡大 $K(X)/K(\gamma(X))$) が非分離的となる (双有理ないし双正則) 埋め込みをもつ射影多様体を分類せよ.

ただし代数多様体の射影空間への埋め込みを, 像と双有理同値となる場合は**双有理埋め込み (birational embedding)** と呼び, 像と双正則同型となる場合は**双正則埋め込み (biregular embedding)** と呼ぶことにより区別する.

2. 射影多様体の双有理埋め込み

有理写像 γ の階数 $\mathrm{rk}\,\gamma$ を, 一般点 $x\in X$ における γ が誘導するザリスキー接空間の間の k-線型写像, すなわち微分, $d_x\gamma: t_xX\to t_{\gamma(x)}\mathbb{G}(n,\mathbb{P}^N)$ の階数により定義する.

問題 1.5 に対しては次の結果を得た:

定理 2.1 (FK [**7**, Theorem 1.2])**.** 標数 $p>0$ の射影多様体 $X\subseteq\mathbb{P}^N$ と $0\le r\le n=\dim X$ をみたす整数 r に対して以下は同値:

(1) ガウス写像 γ が一般有限かつ階数が $\mathrm{rk}\,\gamma=r$ となる双有理埋め込み $X\dashrightarrow\mathbb{P}^M$ が存在する;
(2) $(p,r)\neq(2,1)$.

[1] "strange" のよい邦訳は?

さらに上記 (b) をみたす r に対しては, $K(X)/K(\gamma(X))$ が非分離次数 p^{n-r} の純非分離拡大となる双有理埋め込み $X \dashrightarrow \mathbb{P}^M$ が存在する.

証明においては, もとの埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ を与える有理関数を $K(X)$ の k 上の p-基底の p-単項式で展開した際の係数が重要な役割を果たす.[2]

定理 2.1 において $r = 0$ とすれば直ちに次を得る:

系 2.2 (FK [**7**, Theorem 1.2])**.** 標数 $p > 0$ の任意の代数関数体 K に対してガウス写像 γ がフロベニウス写像と双有理同値となる K の射影モデル $X \subseteq \mathbb{P}^N$ が存在する.

注意 2.3. 代数関数体 K の k 上の次元が 1 の場合は, K/K' が (有限次) 非分離拡大となる任意の代数関数体 $K' \subseteq K$ に対して K の射影モデル $X \subseteq \mathbb{P}^N$ で $K = K(X)$ において $K' = K(\gamma(X))$ となるものが存在する (K [**19**, Corollary 3.4]).

定義 2.4. 射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ が **strange** であるとは, すべての非特異点 $x \in X$ の射影接空間がある共通の点 $P \in \mathbb{P}^N$ を含むことをいう.

定理 2.1 の証明においては実は次も示されている.

系 2.5 (FK [**7**, Proof of Theorem 1.2])**.** 標数 $p > 0$ の基礎体 k 上の任意の代数関数体 K に対して, strange な射影モデル $X \subseteq \mathbb{P}^N$ が存在する:

つまり正標数の場合, 特異点を許せばどんな射影多様体も strange となるように射影空間に埋め込める.

3. 射影多様体の双正則埋め込み

3.1. **階数零のガウス写像をもつ射影埋め込み.** 問題 1.5 の解決を目指して, 深澤氏および古川氏との共同研究 [**8**] においては, もっとも極端な場合を想定して, 射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ の内在的性質として以下の (GMRZ) を導入し, (GMRZ) をみたす射影多様体について調べた:

(GMRZ) ガウス写像 γ が $\operatorname{rk}\gamma = 0$ となる双正則埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^M$ が存在する.

注意 3.1. 射影多様体 X が (GMRZ) を満たすのは正標数の場合に限る. さらに詳しく, 標数 $p > 0$ のとき, $\operatorname{rk}\gamma = 0$ となるためには, $K(X)$ において $K(\gamma(X)) \subseteq K(X)^p$ となることが必要十分である.

(GMRZ) をみたす典型は次である:

例 3.2. 標数 $p > 0$ における次数 d のフェルマー超曲面 F_d は, $d \equiv 1 \bmod p$ ならば (GMRZ) をみたす. 実際, X のガウス写像を計算すると X のフロベニウス写像を経由することが簡単にわかる. 同様にして, 次数が上記条件を満たすフェルマー超曲面たちの完全交叉も (GMRZ) を満たすことがわかる.

例 3.3. 標数 $p > 0$ の場合, (GMRZ) を満たす例として以下が知られている:

(1) 射影空間 $\mathbb{P}^n$ (FK [**7**, Example 3.1]).
(2) 楕円曲線 (K [**19**, Theorems 5.1, 5.2]).
(3) 丹後曲線[3] (K [**19**, Corollary 6.5]).

3.2. **主結果.** 我々の研究 [**8**] において鍵となる結果は次である.

定理 3.4 (FFK [**8**, Theorem 0.2]])**.** 射影多様体 X と不分岐射 $f : \mathbb{P}^1 \to X$ に対してその法束を $N_f := \ker(f^* : f^*\Omega^1_X \to \Omega^1_{\mathbb{P}^1})^\vee$ により定義する. X は $f(\mathbb{P}^1)$ の各点で非特異であり, $N_f^\vee \simeq \bigoplus_{i \geq -1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i)^{r_i}$ $(r_i \geq 0)$ とする.

(1) X が (GMRZ) をみたすならば $r_{i-1} = 0$ または $r_i = 0$ $(\forall i \geq 0)$ が成り立つ.

[2] "p-基底" などの定義については [**24**, §26] を参照のこと.
[3] "丹後曲線" の定義については [**30**], [**32**] 参照のこと.

(2) さらに $r_i > 0$ $(i \geq 0)$ ならば $p = 2$ または $p | i+1$ となり, $r_{-1} > 0$ ならば $d\gamma_\iota \equiv 0$ となる任意の $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^M$ に対して $p | \deg f^* \iota^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(1) - 1$ となる.

注意 3.5. 定理 3.4 において $N_f^\vee$ が $i = -2, -3$ などの直和因子をもつ場合も同様の結果は証明できる.

基本的な射影多様体に対して, 含まれている射影直線の法束の分解型調べ定理 3.4 を用いると直ちに次を得る.

定理 3.6 (FFK [**8**, Theorem 0.3])**.** (1) セグレ多様体 $\prod_{1 \leq i \leq r} \mathbb{P}^{n_i}$ $(r \geq 2, n_i \geq 1)$ が (GMRZ) をみたす $\Leftrightarrow p = 2$ かつ $n_i = 1$ $(\forall i)$.
(2) グラスマン多様体 $\mathbb{G}(l, \mathbb{P}^m)$ $(0 \leq l < m)$ が (GMRZ) をみたす $\Leftrightarrow l = 0$ または $l = m - 1$.
(3) 2 次超曲面 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ $(N \geq 3)$ が (GMRZ) をみたす $\Leftrightarrow p = 2$ かつ $N = 3$.
(4) 3 次超曲面 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ $(N \geq 3)$ が (GMRZ) をみたす $\Rightarrow p = 2$.

定理 3.6 (4) についてはさらに詳しく, 次が示される:

定理 3.7 (FFK [**8**, Theorem 0.4])**.** 非特異 3 次超曲面 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ $(N \geq 5)$ が (GMRZ) をみたすのは標数 $p = 2$ のフェルマー超曲面と射影同値となる場合に限る.

この定理 3.7 は標数 $p = 2$ におけるフェルマー 3 次超曲面の特徴付けから従う:

定理 3.8 (FFK [**8**, Theorem 4.4]; Cf. A. Hefez [**12**, §9], [**13**, I (14)], R. Pardini [**28**, (2.1)])**.** 標数 $p = 2$ の非特異 3 次超曲面 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ $(N \geq 3)$ のガウス写像 γ_0 が階数零となるのはフェルマー超曲面と射影同値となる場合に限る.

注意 3.9. 定理 3.7 を示す上でのネックは, 非特異 3 次超曲面 X に対して, (GMRZ) の仮定の下 $\mathrm{rk}\, d\gamma_0 = 0$ となることを示す点にある. 現在のところ, それを示すために $N \geq 5$ の仮定が必要である.

定理 3.10 (FFK [**8**, Theorem 0.5])**.** 次数 $3 \leq d \leq 2N - 3$ の一般の超曲面 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ が (GMRZ) をみたすならば, 標数 $p = 2$ かつ $d = 2N - 3$ となる.

注意 3.11. 一般の超曲面 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ が (GMRZ) をみたし次数 d が $3 \leq d \leq 2N - 3$ となるとき, X に含まれる射影直線に対して定理 3.4 を適用することにより $d = N - 1$ または $d = 2N - 3$ となることはただちに導かれる. したがって, 定理 3.10 の証明においては $d \neq N - 1$ を示すことがポイントとなる. 証明では, さらに X に含まれる 2 次曲線に着目し, その法束を詳しく調べて定理 3.4 を適用する.

注意 3.12. 次数 d の一般超曲面 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して, X に含まれる $\mathbb{P}^N$ の直線 L の族の期待次元は $2N - 3 - d = \chi(N_{L/X})$, X に含まれる $\mathbb{P}^N$ の 2 次曲線 C の族の期待次元は $3N - 2 - 2d = \chi(N_{C/X})$ により与えられる.

3.3. **主要部分束.** ここでは定理 3.4 の証明を与える.

射影多様体 X 上の直線束 $\mathcal{L}$ に対してその第 1 位主要部分束を $\mathcal{P}^1_X(\mathcal{L})$ と書くことにする ([**10**, §16], [**29**, §2]). 付随して次の自然な完全列が定義される:

$$0 \to \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L} \to \mathcal{P}^1_X(\mathcal{L}) \to \mathcal{L} \to 0 \qquad (\xi)$$

さらに射影多様体 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して一般全射準同型写像

$$a^1 : H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)) \otimes_k \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow \mathcal{P}^1_X(\mathcal{O}_X(1))$$

が自然に定義される. X のガウス写像は厳密には, $\mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N)$ を $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$ の $n+1$ 次元商線型空間のなすグラスマン多様体とみなしたときの普遍性により a^1 から誘導される有理写像 $X \dashrightarrow \mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N)$ として定義される (ただし $n := \dim X$ である). 実際, 非特異点 $x \in X$ において a^1 は全射となり, その射影化により自然に誘導される

$$\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))) \hookleftarrow \mathbb{P}(\mathcal{P}^1_X(\mathcal{O}_X(1))_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x))$$

は, 自然な同一視 $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)))$ により $T_xX = \mathbb{P}(\mathcal{P}^1_X(\mathcal{O}_X(1))_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x))$ となることが局所座標を取って計算すると簡単に確かめられる.

ここで, 射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上のベクトル束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1)^{r_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_m)^{r_m}$ に対して, その**分解型 (splitting type)** を $[a_1^{r_1}, \ldots, a_m^{r_m}]$ により定義し, それらを同一視することにする:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_1)^{r_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_m)^{r_m} = [a_1^{r_1}, \ldots, a_m^{r_m}].$$

A. Grothendieck の定理により $\mathbb{P}^1$ 上のすべてのベクトル束は上記の通り直線束の直和に分解することに注意する ([**11**, V, Exercise 2.6]).

補題 3.13 (K [**18**, (1.2)])**.**

$$\mathcal{P}^1_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)) = \begin{cases} [a, a-2], & \textit{if } p|a, \\ [a-1^2], & \textit{otherwize.} \end{cases}$$

命題 3.14 (FFK [**8**, Proposition 1.2])**.** 射影多様体 X と不分岐射 $f : \mathbb{P}^1 \to X$ に対してその法束を $N_f := \ker(f^* : f^*\Omega^1_X \to \Omega^1_{\mathbb{P}^1})^\vee$ により定義し, X は $f(\mathbb{P}^1)$ の各点で非特異とする. $N_f^\vee = [-1^{r_{-1}}, 0^{r_0}, \ldots, i^{r_i}, \ldots]$ とするとき, 埋め込み $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^M$ に対して $a := \deg f^*\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(1)$ とおくと次が成り立つ:

$$f^*\mathcal{P}^1_X(\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(1)) = \begin{cases} [a-2, a-1^{r_{-1}}, a^{r_0+1}, a+1^{r_1}, a+2^{r_2}, \ldots, a+i^{r_i}, \ldots], & \textit{if } p|a, \\ [a-1^{r_{-1}+2}, a^{r_0}, a+1^{r_1}, a+2^{r_2}, \ldots, a+i^{r_i}, \ldots], & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

証明. これは補題 3.13, 3.15 から従う. □

補題 3.15 (FFK [**8**, Lemma 1.3])**.** 命題 3.14 と同じ仮定のもと, X 上の直線束 $\mathcal{L}$ に対して次の分裂完全系列がある:

$$0 \to N_f^\vee \otimes f^*\mathcal{L} \to f^*\mathcal{P}^1_X(\mathcal{L}) \to \mathcal{P}^1_{\mathbb{P}^1}(f^*\mathcal{L}) \to 0. \tag{ζ}$$

証明. 準同型写像 $f^*\mathcal{P}^1_X(\mathcal{L}) \to \mathcal{P}^1_{\mathbb{P}^1}(f^*\mathcal{L})$ が自然に誘導され f の仮定により全射となる. X 上の $\mathcal{L}$ と $\mathbb{P}^1$ 上の $f^*\mathcal{L}$ に対する完全列 (ξ) から上の完全列 (ζ) を得る. 補題 3.13 と $N_f^\vee$ に対する仮定から $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{P}^1_{\mathbb{P}^1}(f^*\mathcal{L}), N_f^\vee \otimes f^*\mathcal{L}) = 0$ となるので (ζ) は分裂する. □

命題 3.16 (FFK [**8**, Proposition 1.4])**.** 命題 3.14 と同じ仮定のもと, X が (GMRZ) をみたすならば標数 p を法として $f^*\mathcal{P}^1_X(\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(1)) \equiv [0^{n+1}]$ となる.

証明. $H^0(\mathbb{P}^M, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}(n,\mathbb{P}^M)} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ を $\mathbb{G}(n, \mathbb{P}^M)$ 上の普遍商束とする. ガウス写像 γ の定義により $f(\mathbb{P}^1)$ の近傍では $\mathcal{P}^1_X(\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(1)) \simeq \gamma^*\mathcal{Q}$ が成り立つ. $\dim\gamma(f(\mathbb{P}^1)) = 0$ とすると $f^*\mathcal{P}^1_X(\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(1))$ は自明なベクトル束となり結論は明らかに成り立つので, $\dim\gamma(f(\mathbb{P}^1)) = 1$ としてよい. L' を $\gamma(f(\mathbb{P}^1))$ の正規化とし, $\gamma' : \mathbb{P}^1 \to L'$ を γ から誘導される射とすると

$$f^*\mathcal{P}^1_X(\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(1)) \simeq \gamma'^*\mathcal{Q}_{L'},$$

が成り立つ. ただし $\mathcal{Q}_{L'}$ は $\mathcal{Q}$ の L' への引き戻しである. $d\gamma$ は恒等的に零なので $d\gamma'$ も恒等的に零となり, したがって γ' の次数は p の倍数となる. $f^*\mathcal{P}^1_X(\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(1))$ の分解型は $\mathcal{Q}_{L'}$ の分解型に γ' の次数を乗じたものと一致するので結論が従う. □

定理 **3.4** の証明. 命題 3.14, 3.16 から従う. □

4. 応用: 射影多様体上の有理曲線の幾何

定義 4.1. 射影多様体 X において有理曲線 $f : \mathbb{P}^1 \to X$ が**自由 (free)** であるとは接束の引き戻し f^*T_X が大域切断で生成されることをいう. 自由な有理曲線 f が**極小 (minimal)**[4] であるとは, $f^*T_X = [2, 1^{d-2}, 0^{n-d+1}]$ となることをいう. ただし, $d := \deg(-f^*K_X)$, $n := \dim X$ とする.

[4] [**14**] においては "標準的 (standard)" とよばれている.

注意 4.2. 極小有理曲線族は, 射影空間や2次超曲面の特徴付け ([**1**], [**4**], [**5**], [**6**], [**25**], [**26**]), ファノ多様体の研究 ([**2**], [**3**], [**27**]), VMRT (:= variety of minimal rational tangents) の理論 ([**14**], [**15**], [**16**], [**17**], [**21**]) において, 重要な役割を果たしている.

標数 $p = 0$ において極小自由有理曲線の存在を保証する最も基本的な結果のひとつは次であろう:

定理 4.3 ([**22**, (IV.2.10)])**.** 標数 $p = 0$ の射影多様体 X においては, 自由有理曲線が存在すれば, 極小自由有理曲線が存在する.

正標数においてはこの基本的定理の結論は成り立たない:

定理 4.4 (FFK [**8**, Theorem 3.2])**.** 標数 $p > 0$ における次数 $ep + 1$ ($p > 0$, $e \in \mathbb{N}$) のフェルマー超曲面 $X \subseteq \mathbb{P}^N$ に対して, $N \geq 2ep + 1$ ならば, X 上に自由有理曲線は存在するが, 極小自由有理曲線は存在しない.

その証明には次の結果が鍵となる:

定理 4.5 (FFK [**8**, Theorem 0.1])**.** 標数 $p > 0$ の射影多様体 X が極小自由有理曲線に対して $f(\mathbb{P}^1)$ の各点において非特異であるとする. X が (GMRZ) をみたし $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^M$ のガウス写像の階数が零であるとする. このとき, 以下のいずれかが成り立つ:

(1) $\deg(-f^*K_X) = n + 1$, $a > p$ かつ $p|a - 1$;
(2) $\deg(-f^*K_X) = p = 2$ かつ $2|a$,

ただし, $a = \deg f^*\iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(1)$, $n = \dim X$ である.

なお, 定理 4.5 における両方の場合は確かに起きる:

例 4.6 (FFK [**8**, Example 3.1])**.** (1) 標数 $p > 0$ における射影空間 $\mathbb{P}^n$ は (GMRZ) をみたし, 直線 $L \subseteq \mathbb{P}^n$ は極小自由で $\deg(-K_{\mathbb{P}^n}|_L) = n + 1$ となる.
(2) 標数 $p = 2$ におけるセグレ多様体 $(\mathbb{P}^1)^n$ は (GMRZ) をみたし, ファイバー $L := \mathbb{P}^1 \times \{\text{一点}\} \subseteq (\mathbb{P}^1)^n$ は極小自由で $\deg(-K_{(\mathbb{P}^1)^n}|_L) = 2 = p$ となる.

例 4.7 (FFK [**8**, Example 3.5])**.** 標数 $p = 2$ のフェルマー3次曲面 $X \subseteq \mathbb{P}^3$ は (GMRZ) をみたす. さらに

(1) 捩じれ3次曲線 $C_3 \subseteq X$ は極小自由で $\deg(-K_X|_{C_3}) = 3 = 2 + 1$ となる.
(2) 2次曲線 $C_2 \subseteq X$ は極小自由で $\deg(-K_X|_{C_2}) = 2 = p$ となる.

謝辞. 講演の機会を下さった研究集会世話人の福間慶明先生, 小島秀雄先生に感謝します.

参考文献

1. M. Andreatta, J. A. Wiśniewski: *On manifolds whose tangent bundle contains an ample subbundle*, Invent. Math. **146** (2001), 209–217.
2. M. Andreatta, E. Chierici, G. Occhetta: *Generalized Mukai conjecture for special Fano varieties*, Cent. Eur. J. Math. **2** (2004), 272–293
3. C. Araujo: *Rational curves of minimal degree and characterizations of projective spaces*, Math. Ann. **335** (2006), 937–951.
4. C. Araujo, S. Druel, S. Kovács: *Cohomological characterizations of projective spaces and hyperquadrics*, Invent. Math. **174** (2008), 233–253.
5. K. Cho, Y. Miyaoka, N. I. Shepherd-Barron: *Characterizations of projective space and applications to complex symplectic manifolds*, "Higher dimensional birational geometry (Kyoto, 1997)," Adv. Stud. Pure Math., **35**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002, pp. 1–88.
6. K. Cho, E. Sato: *Smooth projective varieties with the ample vector bundle $\bigwedge^2 T_X$ in any characteristic*, J. Math. Kyoto Univ. **35** (1995), 1–33.
7. S. Fukasawa, H. Kaji: *Any algebraic variety in positive characteristic admits a projective model with an inseparable Gauss map*, J. Pure and Applied Algebra **214** (2010), 297–300.
8. S. Fukasawa, K. Furukawa, H. Kaji: *Projective varieties admitting an embedding with Gauss map of rank zero*, preprint (2009).

9. P. Griffiths, J. Harris: *Algebraic geometry and local differential geometry*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **12** (1979), 355–432.
10. A. Grothendieck and J. A. Dieudonné: “Éléments de géométrie algébrique, IV, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas,” Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **32** (1967).
11. R. Hartshorne: “Algebraic Geometry,” Graduate Texts in Math. **52**, Springer, New York, 1977.
12. A. Hefez: *Duality for projective varieties*, Ph. D. Thesis, M.I.T., 1984.
13. A. Hefez, S. L. Kleiman: *Notes on the duality of projective varieties*, “Geometry Today,” Progr. Math. **60**, Birkhäuser, Boston, 1985, pp. 143–183.
14. J.-M. Hwang: *Geometry of minimal rational curves on Fano manifolds*, “School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry (Trieste, 2000),” ICTP Lect. Notes, **6**, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2001, 335–393.
15. J.-M. Hwang, S. Kebekus: *Geometry of chains of minimal rational curves*, J. Reine Angew. Math. **584** (2005), 173–194.
16. J.-M. Hwang, N. Mok: *Uniruled projective manifolds with irreducible reductive G-structures*, J. Reine Angew. Math. **490** (1997), 55-64.
17. ———: *Rigidity of irreducible Hermitian symmetric spaces of the compact type under Kähler deformation*, Invent. Math. **131** (1998), 393-418.
18. H. Kaji: *On the normal bundles of rational space curves*, Math. Ann. **273** (1985), 163–176.
19. ———: *On the Gauss maps of space curves in characteristic p*, Compos. Math. **70** (1989), 177–197.
20. ———: *On the Gauss maps of space curves in characteristic p, II*, Compos. Math. **78** (1991), 261–269.
21. S. Kebekus, L. Solá Conde: *Existence of rational curves on algebraic varieties, minimal rational tangents, and applications*, “Global aspects of complex geometry,” Springer, Berlin, 2006, pp. 359–416.
22. J. Kollár: *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse Der Mathematik Und Ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Bd. **32**, Springer, Berlin, 1996.
23. E. Lluis: *Variedades algebraicas con ciertas condiciones en sus tangentes*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) **7** (1962), 47–56.
24. H. Matsumura: “Commutative ring theory,” Cambridge Stud. in Adv. Math. **8**, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1986.
25. Y. Miyaoka: *Numerical characterisations of hyperquadrics*, “Complex analysis in several variables—Memorial Conference of Kiyoshi Oka’s Centennial Birthday,” Adv. Stud. Pure Math., **42**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004, pp. 209–235
26. S. Mori: *Projective manifolds with ample tangent bundles*, Ann. Math. (2) **110** (1979), 593-606
27. G. Occhetta: *A note on the classification of Fano manifolds of middle index*, Manuscripta Math. **117** (2005), 43–49.
28. R. Pardini: *Some remarks on plane curves over fields of finite characteristic*, Compos. Math. **60** (1986), 3–17.
29. R. Piene: *Numerical characters of a curve in projective n-space*, “Real and Complex Singularities,” Oslo 1976, pp. 475–495.
30. M. Raynaud: *Contre-exemple au “vanishing theorem” en caractŕistique* $p > 0$. “C. P. Ramanujam—a tribute,” pp. 273–278, Tata Inst. Fund. Res. Studies in Math., **8**, Springer, Berlin-New York, 1978.
31. P. Samuel: “Lectures on old and new results on algebraic curves (notes by S. Anantharaman),” Tata Inst. Fund. Res. Lectures on Math. **36**, Tata Inst. Fund. Res., Bombay 1966.
32. H. Tango: *On the behavior of extensions of vector bundles under the Frobenius map*, Nagoya Math. J. **48** (1972), 73–89.
33. A. H. Wallace: *Tangency and duality over arbitrary fields*, Proc. London Math. Soc. (3) **6** (1956), 321–342.
34. F. L. Zak: “Tangents and Secants of Algebraic Varieties,” Transl. Math. Monogr. **127**, Amer. Math. Soc., Providence, 1993.

早稲田大学理工学術院基幹理工学部数学科
`kaji@waseda.jp`