

Algebras with Ternary Product and Projective Algebraic Geometry

三項演算をもつ代数系と射影代数幾何

HAJIME KAJI

梶 元

Department of Mathematical Sciences, Waseda University

早稲田大学理工学部数理科学科

INTRODUCTION

序

“三項演算をもつ代数系”というと、役に立たないもの、つまらないもの、と一般には思われがちかも知れない。しかし、実はそうではない、ということを一人でも多くの人に知ってもらいたい、というのが講演を引き受けた動機であり、本講演の目的である。

ある種の等質射影多様体の射影幾何的研究には三項演算をもつ代数系が役に立つ、ということを説明したいのであるが、現在、その概念的根拠を提示することはできない：実際のところは、次数付きリー環に関する細かい計算には、その次数付けに応じた n 項演算を導入すると便利である、というところかもしれない。ここでは役立つことの状況証拠として幾つかの例を示すことにする。具体的には、随伴多様体 (adjoint variety) とフロイデンタール多様体 (Freudenthal variety) の secant locus, tangent locus に関する結果、そして、フロイデンタール多様体の等質性について述べる：すべて、保倉理美氏 (福井大学) との共同研究によるものである。その後、証明のバックにある理論について若干の説明を与える。以下の内容に即した精確なタイトルを (冗長さをいとわずに) 付けるなら、“シンプレクティック三重系の、接触型次数付き単純リー環に付随して現れる等質射影多様体の射影幾何への応用”となるだろうが、タイトルは講演時のままとした。

1. HOW DID I FALL IN LOVE WITH TRIPLE SYSTEMS?

どうして私はこの道にハマったか？

1.0 Secant and Tangent Loci. $X \subseteq \mathbb{P}^N$ を射影多様体とする。点 $x \in \mathbb{P}^N$ に対して、

$$\Sigma_x := \overline{\{y \in X \mid \exists z \in X \setminus \{y\}, x \in y * z\}},$$

$$\Theta_x := \{y \in X \mid x \in T_y X\}$$

とおき、それぞれ、 x についての secant locus, tangent locus と呼ぶ。ただし、 $y * z$ は y と z で定まる割線 (secant line), $T_y X$ は y における X の $\mathbb{P}^N$ へ埋め込まれた接空間 (embedded tangent space) である。

1.1 Tangent Loci of Adjoint Varieties. 複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ に対して, その随伴表現から定まる作用 $G \curvearrowright \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$ の (唯一の) 閉軌道を

$$X(\mathfrak{g}) \subseteq \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$$

とする. ただし, G は $\mathfrak{g}$ をリー環にもつ連結代数群である. この射影多様体 $X(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ に付随した随伴多様体 (adjoint variety) と呼ぶ.

Theorem 1 (K-Yasukura [5]). *For general $x, y \in X(\mathfrak{g})$, we have*

$$\Theta_{[x,y]} = \{x, y\},$$

where $[x, y] := \pi([\pi^{-1}x, \pi^{-1}y]) \in \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$ and $\pi : \mathfrak{g} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_*(\mathfrak{g})$ is the projection.

Proof of Theorem 1: $\mathfrak{g}$ のカルタン部分環 $\mathfrak{h}$, そして, それに関するルート系 R の基底 Δ を取り, R に順序を定める. 最高ルートベクトル E_+ と最低ルートベクトル E_- で, $H := [E_+, E_-]$ として $[H, E_+] = 2E_+$, $[H, E_-] = -2E_-$ を満たすものを取る. このとき, $X(\mathfrak{g}) = \pi(G \cdot E_+)$ である.

証明は, 次を示すことに帰着される:

$$\Theta_{\pi H} = \{\pi E_+, \pi E_-\}.$$

対角線作用による軌道 $G \cdot (\pi E_+, \pi E_-)$ が $G \cdot \pi E_+ \times G \cdot \pi E_- = X(\mathfrak{g}) \times X(\mathfrak{g})$ の中で稠密だからである.

包含関係 $\Theta_{\pi H} \supseteq \{\pi E_+, \pi E_-\}$ は, $T_{\pi E_\pm} X(\mathfrak{g}) = \mathbb{P}_*([\mathfrak{g}, E_\pm]) \ni \pi H$ となることからわかるので, 逆の包含関係が問題となるが, $g \in G$ に対して

$$T_{\pi(g \cdot E_+)} X(\mathfrak{g}) = \mathbb{P}_*([\mathfrak{g}, g \cdot E_+])$$

となるから, 次を示せば十分である:

Claim 1. *If $H = [Y, g \cdot E_+]$ for some $Y \in \mathfrak{g}$ and $g \in G$, then $g \cdot E_+ \in \mathbb{C}E_+ \cup \mathbb{C}E_-$.*

ここで, リー環 $\mathfrak{g}$ の $(\text{ad } H)$ -固有空間分解を考える: $j \in \mathbb{C}$ に対して

$$\mathfrak{g}_j := \{Z \in \mathfrak{g} \mid [H, Z] = jZ\}$$

とおくと, $\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$$

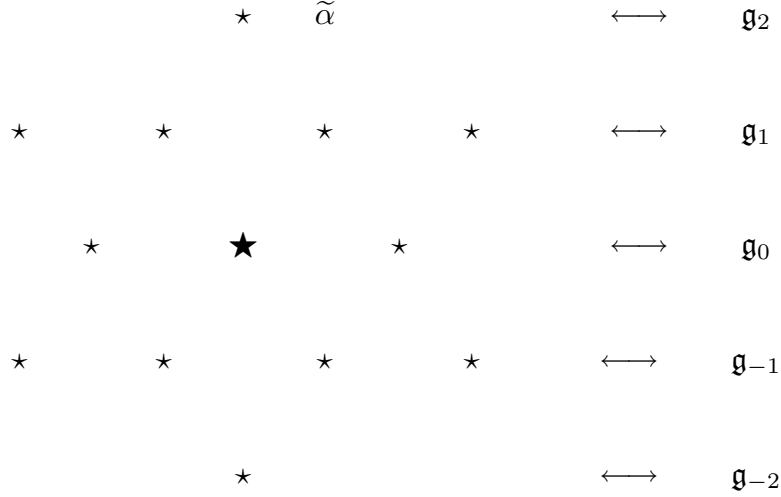
と分解され,

$$[\mathfrak{g}_j, \mathfrak{g}_k] \subseteq \mathfrak{g}_{j+k}, \quad H \in \mathfrak{g}_0, \quad \mathfrak{g}_{\pm 2} = \mathbb{C}E_\pm,$$

が成り立つことがわかる. この分解は, $\text{rk } \mathfrak{g} \geq 2$ の場合, 接触型次数分解 (graded decomposition of contact type) と呼ばれる. ただし, $\mathfrak{g} \not\cong \mathfrak{sl}_2 \Leftrightarrow \text{rk } \mathfrak{g} \geq 2 \Leftrightarrow \mathfrak{g}_1 \neq 0$ である.

双対空間 $\mathfrak{h}^*$ においてルート達 R の張る凸閉包の頂点 $\tilde{\alpha}$ を一つ選び, $\tilde{\alpha}$ から $-\tilde{\alpha}$ に向かって等間隔に, 5 つにルートを分けるとき, それに応じてカルタン分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$ を 5 つにまとめ直したものが接触型次数分解である (次頁の図参照).

THE GRADED DECOMPOSITION OF CONTACT TYPE AND
THE ROOT DIAGRAM IN CASE OF TYPE G_2



Claim 1 の証明であるが, まず

$$(\dagger) \quad G \cdot E_+ = \{Z \in \mathfrak{g} \mid Z \neq 0, (\text{ad } Z)^2 \mathfrak{g} \subseteq \mathbb{C}Z\}$$

となることを示す (証明略). これより $g \cdot E_+$ が $(\text{ad } H)$ -固有ベクトルであることが示される. つまり, $g \cdot E_+$ はある $\mathfrak{g}_i$ に含まれる. 等式 $H = [Y, g \cdot E_+]$ の次数 0 の部分を見れば, $Y \in \mathfrak{g}_{-i}$ と仮定してよいことがわかる.

このとき, $i \neq 0$ となる: というのは, $\mathfrak{D}_0 := \text{Ker}(\text{ad } E_+|_{\mathfrak{g}_0})$ とおくと $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{D}_0 \oplus \mathbb{C}H$ であり $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = [\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_0] \subseteq \mathfrak{D}_0$ となることが示され, $i = 0$ ならば $H \in [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subseteq \mathfrak{D}_0$ となるが, $\text{ad } E_+(H) = -2E_+ \neq 0$ だから, 矛盾である.

よって $i \neq \pm 1$ を示せばよい: $i \neq 1$ を示すことにする ($i \neq -1$ も同様である). 我々の証明 [5] では, 浅野 洋 [1, 2] により導入された対称 “積”

$$\times : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_0 : (P, Q) \mapsto P \times Q$$

を考えるとポイントとなっている. これは,

$$-2P \times Q = [Q, [P, E_-]] + [P, [Q, E_-]]$$

により定義される. 一方, リー環の括弧積から自然に定義される交代形式 $\langle, \rangle : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ を考える:

$$2\langle P, Q \rangle E_+ = [P, Q].$$

このとき次が成り立つ:

Lemma 1 (K-Yasukura [5]). *For $P, Q \in \mathfrak{g}_1$ and $Y \in \mathfrak{g}_{-1}$ with $Y^\# := [Y, E_+]$, we have*

- (1) $[Y, Q] = Y^\# \times Q + \langle Y^\#, Q \rangle H$ with $Y^\# \times Q \in \mathfrak{D}_0$,
- (2) $P \times Q = Q \times Q = 0 \Rightarrow \langle P, Q \rangle = 0$.

“ $i \neq 1$ ” の証明に戻ると, $i = 1$ ならば, Lemma 1 (1) により

$$H = [Y, g \cdot E_+] = Y^\# \times g \cdot E_+ + \langle Y^\#, g \cdot E_+ \rangle H.$$

となるが、直和分解 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{D}_0 \oplus \mathbb{C}H$ に注意して両辺を比べると、

$$Y^\# \times g \cdot E_+ = 0, \quad \langle Y^\#, g \cdot E_+ \rangle = 1$$

を得る。しかし、 $(\dagger)$ を用いると

$$g \cdot E_+ \times g \cdot E_+ = 0$$

となることが示されるので、Lemma 1 (2) に矛盾する。故に $i \neq 1$ である。 $\square$

Proof of Lemma 1: (1) ヤコビ恒等式により $[Y^\#, E_-] = Y$ となるので、 $[Y, Q] = [[Y^\#, E_-]Q]$ となるが、これを半分ずつにわけて片方にヤコビ恒等式を使うと、

$$\begin{aligned} [Y, Q] &= [[Y^\#, E_-]Q] \\ &= -\frac{1}{2}[Q[Y^\#, E_-]] + \frac{1}{2}([Y^\#, Q]E_- + [Y^\#[E_-, Q]]) \\ &= Y^\# \times Q + \langle Y^\#, Q \rangle H. \quad \square \end{aligned}$$

(2) 後述の公式 (S2) で $R := P$ とおくと、あっけなく証明できるが、直接証明すると以下のようになる：ヤコビ恒等式により、まず、

$$\begin{aligned} [P[Q[P, E_-]]] &= [[P, Q][P, E_-]] + [Q[P[P, E_-]]] \\ &= 2\langle P, Q \rangle(-P) + 0 \quad (\because P \times P = 0) \end{aligned}$$

そして、

$$\begin{aligned} [P[P[Q, E_-]]] &= [P[[P, Q]E_-]] + [P[Q[P, E_-]]] \\ &= -2\langle P, Q \rangle P - 2\langle P, Q \rangle P \end{aligned}$$

だから、

$$0 = -2[P, P \times Q] = [P[Q[P, E_-]]] + [P[P[Q, E_-]]] = -6\langle P, Q \rangle P$$

となり、 $\langle P, Q \rangle = 0$ を得る。 $\square$

1.2 Secant Loci of Freudenthal Varieties. 上に現れた条件 $P \times P = 0$ で定まる集合

$$\mathcal{V} := \{P \in \mathfrak{g}_1 | P \times P = 0\} \setminus \{0\}$$

の射影化 $V(\mathfrak{g}) := \pi\mathcal{V} \subseteq \mathbb{P}_*(\mathfrak{g}_1)$ を $\mathfrak{g}$ に付随したフロイデンタール多様体と呼ぶことにする。これは、フロイデンタールによる例外型単純リー環の構成では、symplectic geometry における平面のなす多様体として現れる射影多様体 (フロイデンタール [3], [4, (4.11)] 参照) の一般化に相当する。たとえば、 $V(\mathfrak{so}_8) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^7$ となることが示される。

条件

$$2q(P)E_+ = (\text{ad } P)^4 E_- \in \mathfrak{g}_2 = \mathbb{C}E_+ \quad (P \in \mathfrak{g}_1)$$

により $\mathfrak{g}_1$ 上の四次斉次式 q を定める。このとき、フロイデンタール多様体 $V(\mathfrak{g})$ の secant locus に関して、次が成り立つ：

Theorem 2 (K-Yasukura [6]). *For any $P \in \mathfrak{g}_1$ with $q(P) \neq 0$, we have*

$$\Sigma_{\pi P} = \left\{ \pi \left((\text{ad } P)^3 E_- \pm \sqrt{3q(P)} P \right) \right\}.$$

これの代わりに, 次を示す:

Claim 2. *For any $P \in \mathfrak{g}_1$ with $q(P) \neq 0$, there exists a unique pair $\{Y, Z\} \subseteq \mathcal{V}$ such that $P = Y + Z$. In that case, we have*

$$\{Y, Z\} = \left\{ \frac{1}{2} P \pm \frac{1}{2\sqrt{3q(P)}} (\text{ad } P)^3 E_- \right\}.$$

求める Y, Z の存在を示すには, $Q := \lambda P + \mu (\text{ad } P)^3 E_-$ において $Q \in \mathcal{V}$, すなわち, $Q \times Q = 0$ となる相異なる $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$ が 2 点存在することを示せばよい ($q(P) \neq 0$ により $\pi P \neq \pi((\text{ad } P)^3 E_-)$ であることに注意). だから, $Q \times Q$ を展開すればよいが, 計算は難しくはないにせよ, 括弧積の洪水となる.

計算を見通しよく行なうための記法として, 浅野 [1, 2] により導入された $\mathfrak{g}_1$ 上の三項演算を用いる:

$$[PQR] := [P \times Q, R] \quad (P, Q, R \in \mathfrak{g}_1)$$

明らかに,

$$(S1) \quad [PQR] = [QPR]$$

である. [1, 2] において, 次の公式が証明されている:

$$(S2) \quad [PQR] = [PRQ] + \langle P, R \rangle Q - \langle P, Q \rangle R + 2\langle Q, R \rangle P$$

$$(S3) \quad [PQ[RST]] = [[PQR]ST] + [R[PQS]T] + [RS[PQT]]$$

(S2) はさほど難しくはないが, (S3) の証明はかなり複雑である.

さて, この記法を用いると, $P \times P = -(\text{ad } P)^2 E_-$ より

$$(\text{ad } P)^3 E_- = [PPP]$$

となり, また, $2q(P)E_+ = (\text{ad } P)^4 E_- = [P, [PPP]] = 2\langle P, [PPP] \rangle E_+$ だから,

$$q(P) = \langle P, [PPP] \rangle$$

となる. さて, $Q = \lambda P + \mu [PPP]$ として $Q \times Q$ を展開してみると, 以下の Lemma 2 により

$$\begin{aligned} Q \times Q &= \lambda^2 P \times P + 2\lambda\mu P \times [PPP] + \mu^2 [PPP] \times [PPP] \\ &= (\lambda^2 - 3q(P)\mu^2) P \times P \end{aligned}$$

となり, 求める Y, Z の存在, および, 具体的な形がわかる.

一方, 以下の Lemma 3 により $P = Y + Z$ ($Y, Z \in \mathcal{V}$) ならば

$$Y - Z = \pm \frac{1}{\sqrt{3q(P)}} [PPP].$$

となり, Y, Z は P により決ってしまうので, 存在すれば一意的である. $\square$

Lemma 2 (K-Yasukura [6]). *For $P \in \mathfrak{g}_1$, we have*

- (1) $P \times [PPP] = 0$,
- (2) $[PPP] \times [PPP] = -3q(P)P \times P$.

Proof of Lemma 2: (1) (S3) より

$$[PP[PPT]] = [[PPP]PT] + [P[PPP]T] + [PP[PPT]]$$

となり, (S1) を使うと $2[P[PPP]T] = 0$ を得る. よって $P \times [PPP] = 0$ である. $\square$
(2) (S3) より

$$\begin{aligned} [PP[[PPP]PT]] &= [[PP[PPP]]PT] + [[PPP][PPP]T] + [[PPP]P[PPT]] \end{aligned}$$

となるが, $P \times [PPP] = 0$ なので, 左辺と右辺第3項は0である. したがって,

$$[[PPP][PPP]T] = -[[PP[PPP]]PT]$$

となる. ここで, (S2) と $P \times [PPP] = 0$ により

$$\begin{aligned} [PP[PPP]] &= [P[PPP]P] + \langle P, [PPP] \rangle P - \langle P, P \rangle [PPP] + 2\langle P, [PPP] \rangle P \\ &= [P[PPP]P] + 3\langle P, [PPP] \rangle P \\ &= 3\langle P, [PPP] \rangle P \end{aligned}$$

である. ゆえに, $[[PPP][PPP]T] = -3\langle P, [PPP] \rangle [PPT]$ となり, $[PPP] \times [PPP] = -3q(P)P \times P$ を得る. $\square$

Lemma 3 (K-Yasukura [6]). *If $P = Y + Z$ for some $Y, Z \in \mathcal{V}$, then*

- (1) $[PPP] = -6\langle Y, Z \rangle (Y - Z)$,
- (2) $q(P) = 12\langle Y, Z \rangle^2$.

Proof of Lemma 3:

$$\begin{aligned} [PPP] &= [YYP] + [YZP] + [ZYP] + [ZZP] \\ &= [YZP] + [ZYP] \quad (\because Y \times Y = Z \times Z = 0) \\ &= 2[YZY] + 2[ZYZ] \quad (\because (S1)) \\ &= 2([YYZ] + \langle Y, Y \rangle Z - \langle Y, Z \rangle Y + 2\langle Z, Y \rangle Y) \\ &\quad + 2([ZZY] + \langle Z, Z \rangle Y - \langle Z, Y \rangle Z + 2\langle Y, Z \rangle Z) \quad (\because (S2)) \\ &= -6\langle Y, Z \rangle Y - 6\langle Z, Y \rangle Z \quad (\because Y \times Y = Z \times Z = 0) \\ &= -6\langle Y, Z \rangle (Y - Z), \end{aligned}$$

したがって, $q(P) = \langle P, [PPP] \rangle = 12\langle Y, Z \rangle^2$ となる. $\square$

1.3 The Homogeneity of Freudenthal Varieties. 等質性は, 射影空間への埋込には直接関係はしない内在的性質であるが, それからフロイデンタール多様体と接多様体との双対性などの射影幾何的性質が導かれることに注意しておく (詳しくは, [6] 参照のこと).

Theorem 3 (K-Yasukura [6]). *The closed connected subgroup of $G = \text{Int } \mathfrak{g}$ with Lie algebra $\mathfrak{D}_0 = \text{Ker}(\text{ad } E_+|_{\mathfrak{g}_0})$ acts transitively on each irreducible component of $V(\mathfrak{g})$.*

これは, Theorem 2 と下の Claim 3 から導かれる. 証明の概略は次の通り:

$$\mathcal{S} := \{P \in \mathfrak{g}_1 | q(P) \neq 0\} = \{P \in \mathfrak{g}_1 | (\text{ad } P)^4 E_- \neq 0\},$$

とおき, $\mathfrak{g}_0$ をリー環にもつ G の連結部分代数群を G_0 とする. このとき, Claim 3 から $\mathcal{S}$ は, G_0 の自然な作用の下, 等質であることが示される. Theorem 2 を用いると, Theorem 3 が $\mathcal{S}$ の等質性から導かれる. $\square$

Claim 3. *A linear map*

$$L(P, P) : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_1; Q \mapsto [Q, (\text{ad } P)^2 E_-] = [PPQ]$$

is surjective (i.e., an isomorphism) if $q(P) \neq 0$.

Claim 3 は以下の Theorem 4 から容易に導かれる: というのは,

$$W := \mathbb{C}P + \mathbb{C}[PPP] \subseteq \mathfrak{g}_1,$$

$$W^\perp := \{Q \in \mathfrak{g}_1 | \langle Q, R \rangle = 0, \forall R \in W\}$$

とおくと, $q(P) \neq 0$ より $\mathfrak{g}_1 = W \oplus W^\perp$ となり, Theorem 4 により

$$L(P, P)^2|_W = 3q(P) \text{id}_W, \quad L(P, P)^2|_{W^\perp} = \frac{1}{3}q(P) \text{id}_{W^\perp}$$

となるからである. $\square$

Theorem 4 (K-Yasukura [6]). *For $P, Q \in \mathfrak{g}_1$, we have*

$$3L(P, P)^2 Q = 8\langle Q, [PPP] \rangle P + 8\langle P, Q \rangle [PPP] + \langle P, [PPP] \rangle Q.$$

Proof of Theorem 4: まず, (S2) より, $[PPQ] = [PQP] + 3\langle P, Q \rangle P$ となる. したがって, $\langle P, [PQP] \rangle = \langle P, [PPQ] \rangle$ であり

$$(*) \quad L(P, P)^2 Q = [PP[PQP]] + 3\langle P, Q \rangle [PPP]$$

となるが, (S2) により

$$[PP[PQP]] = [P[PQP]P] + 3\langle P, [PQP] \rangle P$$

となる. ここで, リー環のヤコビ恒等式から $\langle P, [PPQ] \rangle = \langle Q, [PPP] \rangle$ が示されるので $\langle P, [PQP] \rangle = \langle Q, [PPP] \rangle$ となる. ゆえに, 以上から

$$(\star) \quad [PP[PQP]] = [P[PQP]P] + 3\langle Q, [PPP] \rangle P$$

を得る. 一方, (S1) と (S3) から

$$[PQ[PPP]] = 2[P[PQP]P] + [PP[PQP]]$$

となるが, (S2) と Lemma 2 (1) から

$$[PQ[PPP]] = \langle P, [PPP] \rangle Q - \langle P, Q \rangle [PPP] + 2\langle Q, [PPP] \rangle P$$

となるので,

$$(\star\star) \quad 2[P[PQP]P] + [PP[PQP]] = \langle P, [PPP] \rangle Q - \langle P, Q \rangle [PPP] + 2\langle Q, [PPP] \rangle P$$

を得る. $(\star)$ と $(\star\star)$ を合わせると,

$$(**) \quad 3[PP[PQP]] = \langle P, [PPP] \rangle Q - \langle P, Q \rangle [PPP] + 8\langle Q, [PPP] \rangle P$$

を得る. $(*)$ と $(**)$ を合わせると, 求める式を得る. $\square$

Problem. 三項演算を持ち出さずに直接 Claim 3 を証明せよ.

2. TRIPLE SYSTEMS

三重系

まずは一般的用語の定義から (浅野 [1] 参照): K を標数 0 の体とする. K 上の線型空間 S が 3 重線型写像

$$[, ,] : T \times T \times T \rightarrow T; (x, y, z) \mapsto [x, y, z],$$

をもつとき, $(T, [, ,])$ (または, 簡単に T) を三重系 (triple system) という. 三重系 T に対して, その部分空間 I が $[ITT] + [TIT] + [TTI] \subseteq I$ をみたすとき, I は T のイデアルであるという. T が 0 ではない真のイデアルをもたないとき, T は単純 (simple) であるという. 線型写像 $D : T \rightarrow T$ が任意の $x, y, z \in T$ に対して $D[xyz] = [(Dx)yz] + [x(Dy)z] + [xy(Dz)]$ をみたすとき, D は T の微分 (derivation) であるという. T の微分の全体を $\mathfrak{D}(T)$ と書くことにする. 容易にわかるように, $\mathfrak{D}(T)$ は交換子積によりリー環をなす.

主だった三重系をいくつか紹介する:

Lie Triple System (N. Jacobson (1941), W. G. Lister (1952)). 三重系 T が公理

$$(L1) \quad [xyz] = -[yxz]$$

$$(L2) \quad [xyz] + [yzx] + [zxy] = 0$$

$$(L3) \quad [vw[xyz]] = [[vwx]yz] + [x[vwy]z] + [xy[vwz]]$$

を満たすとき, T はリー三重系 (Lie triple system) をなすという.

公理 (L3) により線型写像 $L(a, b) : T \rightarrow T; c \mapsto [abc]$ は T の微分である.

$$\mathfrak{D}_0(T) := \langle L(a, b) | a, b \in T \rangle \subseteq \mathfrak{D}(T)$$

とおくと, $\mathfrak{D}_0(T)$ は $\mathfrak{D}(T)$ のイデアルとなる. さらに,

$$\mathfrak{g}(T) := T \oplus \mathfrak{D}_0(T)$$

とおき, $\mathfrak{g}(T)$ 上の括弧積 $[\cdot, \cdot]$ を次のように定義する:

$$[t_1 + D_1, t_2 + D_2] := (D_1 t_2 - D_2 t_1) + (L(t_1, t_2) + [D_1, D_2])$$

($t_1, t_2 \in T, D_1, D_2 \in \mathfrak{D}_0(T)$). このとき, $\mathfrak{g}(T)$ は, この $[\cdot, \cdot]$ をもってリー環となる. T が単純ならば $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}_0(T)$ となるが, そのとき $\mathfrak{g}(T)$ がリー環として単純となるとは限らない.

次の三種の三重系は, フロイデンタールによる例外型リー環の構成 [3] をヒントに考え出されたものである ([4] も参照のこと):

Freudenthal Triple System (K. Meyberg (1968)). 交代形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ をもつ三重系 S が公理

$$(M1) \quad [xyz] = [yxz] = [xzy]$$

$$(M2) \quad (w, x, y, z) \mapsto \langle w, [xyz] \rangle \text{ は四重対称形式}$$

$$(M3) \quad [[xxx]xy] = \langle y, x \rangle [xxx] + \langle y, [xxx] \rangle x$$

をみたすとき, S はフロイデンタール三重系 (Freudenthal triple system) をなすという.

Faulkner Triple System (J. R. Faulkner (1971)). 交代形式 $\langle, \rangle$ をもつ三重系 S が公理

- (F1) $[xyz] = [yxz] + \langle x, y \rangle z$
- (F2) $[xyz] = [xzy] + \langle y, z \rangle x$
- (F3) $\langle [wxy], z \rangle + \langle y, [wxz] \rangle = \langle w, x \rangle \langle y, z \rangle$
- (F4) $[[vwx]yz] = [[vyz]wx] + [v[wyz]x] + [vw[xyz]]$

をみたすとき, S はフォークナー三重系 (Faulkner triple system) をなすという.

Symplectic Triple System (山口 清-浅野 洋 [7]). 自明ではない交代形式 $\langle, \rangle$ をもつ三重系 S が公理

- (S1) $[xyz] = [yxz]$
- (S2) $[xyz] = [xzy] + \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z + 2\langle y, z \rangle x$
- (S3) $[vw[xyz]] = [[vwx]yz] + [x[vwy]z] + [xy[vwz]]$

をみたすとき, S はシンプレクティック三重系 (symplectic triple system) をなすという.

さて, これらの三重系間の関係については, フロイデンタール三重系 $(S, \{, \}, \langle, \rangle)$ に対して,

$$\langle xyz \rangle := \frac{1}{2}(\{xyz\} + \langle y, z \rangle x + \langle z, x \rangle y - \langle x, y \rangle z)$$

と定めれば $(S, \langle, \rangle, \langle, \rangle)$ はフォークナー三重系となり, フォークナー三重系 $(S, \langle, \rangle, \langle, \rangle)$ に対して

$$[xyz] := \langle zxy \rangle + \langle zyx \rangle$$

と定めれば $(S, [,], \langle, \rangle)$ はシンプレクティック三重系となり, また, シンプレクティック三重系 $(S, [,], \langle, \rangle)$ に対して,

$$\{xyz\} := [xyz] - \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x$$

と定めれば $(S, \{, \}, \langle, \rangle)$ はフロイデンタール三重系となる, という具合である.

したがってこれらの三重系は本質的には同値である, とも言えなくもないが, 実は微妙な違いがある: たとえば, 上の対応において, $(S, [,], \langle, \rangle)$ が単純であることと, $(S, \{, \}, \langle, \rangle)$ が単純であることは同値ではない (浅野氏の注意).

その他の重要な三重系としては,

Jordan Triple System (N. Jacobson (1949), K. Meyberg (1972)). 三重系 S が公理

- (J1) $[xyz] = [zyx]$
- (J2) $[vw[xyz]] = [[vwx]yz] - [x[vwy]z] + [xy[vwz]]$

をみたすとき, S はジョルダン三重系 (Jordan triple system) をなすという.

Generalized Jordan Triple System (I. L. Kantor (1973)). ジョルダン三重系の公理のうち, (J2) だけを満たすものは, 一般化されたジョルダン三重系 (generalized Jordan triple system) と呼ばれる.

3. THE THEORY OF HIROSHI ASANO

浅野 洋の理論

最後に, シンプレクティック三重系とリー環との関係について簡単に解説する.

シンプレクティック三重系 $(S, [,], \langle, \rangle)$ に対して, S_+, S_- を S のコピーとして, $T := S_+ \oplus S_-$ とおく. T 上の三重線型写像 $\{, , \}$ を次のように定義する:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \right\} := \begin{bmatrix} [x_1 y_2 x_3] - [y_1 x_2 x_3] - \langle x_1, y_2 \rangle x_3 - \langle y_1, x_2 \rangle x_3 + 2\langle x_1, x_2 \rangle y_3 \\ -[y_1 x_2 y_3] + [x_1 y_2 y_3] + \langle y_1, x_2 \rangle y_3 + \langle x_1, y_2 \rangle y_3 - 2\langle y_1, y_2 \rangle x_3 \end{bmatrix}$$

ただし, $x_i \in S_+, y_j \in S_-$ である. このとき, 次が成り立つ:

Theorem (Asano [1, 2], Yamaguti-Asano [7]). $(T, \{, , \})$ is a Lie triple system.

このリー三重系 $(T, \{, , \})$ から得られるリー環を $\mathfrak{g}(S) := T \oplus \mathfrak{D}_0(T)$ と書くことにすると, 次が成り立つ:

Theorem (Asano [1, 2], Yamaguti-Asano [7]).

$$\langle, \rangle : \text{non-degenerate} \Leftrightarrow S : \text{simple} \Leftrightarrow T : \text{simple} \Leftrightarrow \mathfrak{g}(S) : \text{simple}.$$

これより, シンプレクティック三重系の場合, 三重系としての単純性とそれから構成されるリー環の単純性とは見事に対応していることがわかる.

$\mathfrak{D}_0(T), \mathfrak{g}(S)$ の具体的な形について見てみよう. 三つの線型写像 $H, E_+, E_- : T \rightarrow T$ を次のように定義する:

$$H : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}, \quad E_+ : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_- : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}.$$

このとき,

$$[E_+, E_-] = H, \quad [H, E_+] = 2E_+, \quad [H, E_-] = -2E_-$$

となるが, さらに, $H, E_+, E_- \in \mathfrak{D}(T)$ であることが示される. S の微分 D を次のようにして T の微分へ拡張する:

$$D : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} Dx \\ Dy \end{bmatrix}.$$

このとき, 次が成り立つ:

Theorem (Asano [1, 2]). If S is a simple symplectic triple system, then

$$\mathfrak{D}_0(T) = \mathfrak{D}_0(S) \oplus \langle H, E_+, E_- \rangle.$$

したがって, 単純シンプレクティック三重系 S から構成されたリー環 $\mathfrak{g}(S)$ は

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(S) &= T \oplus \mathfrak{D}_0(T) \\ &= (S_+ \oplus S_-) \oplus (\mathfrak{D}_0(S) \oplus \langle H, E_+, E_- \rangle) \end{aligned}$$

という形をしている. 直和の順序を変えて

$$\mathfrak{g}(S) = KE_- \oplus S_- \oplus (\mathfrak{D}_0(S) \oplus KH) \oplus S_+ \oplus KE_+$$

とすれば, これは丁度, $(\text{ad } H)$ -固有空間分解で得られる接触型次数分解

$$\mathfrak{g}(S) = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$$

と一致する. さらに, 次が成り立つ:

Theorem (Asano [1, 2]). *Every simple Lie algebra of rank ≥ 2 over $K = \overline{K}$ is obtained from some simple symplectic triple system by the construction above.*

これは次のように証明される: K 上の $\text{rk} \geq 2$ の単純リー環 $\mathfrak{g}$ に対して, $\mathfrak{sl}_2$ -triple (E_+, H, E_-) を一つ取り, $(\text{ad } H)$ -固有空間分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ を考える. そして, 前と同様に $\mathfrak{g}_1$ 上に, 次の式で三項演算 $[\cdot, \cdot]$ と交代形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を定める:

$$\begin{aligned} 2[xyz] &= [z[y[x, E_-]]] + [z[x[y, E_-]]], \\ 2\langle x, y \rangle E_+ &= [x, y]. \end{aligned}$$

このとき, $(\mathfrak{g}_1, [\cdot, \cdot], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ がシンプレクティック三重系となること, すなわち, (S1), (S2), (S3) が成り立つことが示される. さらに, 前述の方法で $(\mathfrak{g}_1, [\cdot, \cdot], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ から構成したリー環 $\mathfrak{g}(\mathfrak{g}_1)$ が元の $\mathfrak{g}$ と同型であることが示される. $\square$

POSTSCRIPT

あとがき

Theorem 1 の証明を考えていたとき共同研究者の保倉理美氏から, こんなものがあります, という感じでシンプレクティック三重系のことを教わった. 三項演算を持つ代数系を知った最初のときである. その時の第一印象は, 大変失礼ながら, そんなもの絶対に役に立たない, だった. また, 二項演算しか慣れ親しんでいないためか, 正直言って何となくグロテスクな印象さえ持った. しかし, しばらくして, それは大きな間違いである, と思うようになった. 自分の興味を持つ対象分野での証明や計算に非常に役立つことを身に沁みただけである.

二項演算が代数系の演算としてもっとも基本的であることは間違いないが, だからといってそれだけに拘泥するのではなく, 必要に応じて, 三項演算, 四項演算, ... など導入することにより, 新しい世界が広がると思われる.

本原稿を書く際には, 浅野 洋氏, 神谷徳昭氏, そして, 保倉理美氏から頂いたコメント, アドバイスなどが参考になりました. ありがとうございます. また, 講演の機会を下さったシンポジウム organizer の小林正典さん, 徳永浩雄さんに感謝します. 海外で英語で講演するよりも緊張してしまい, ■■■■ 気味でしたが, 我慢強く注意深く聴いてくださった方々に感謝します. また, 講演後いろいろな方々から様々な質問, コメント, アドバイスなどを頂きました. ありがとうございます.

REFERENCES

参考文献

1. 浅野 洋, *Triple systems* について, 横浜市立大学論叢自然科学系列, 第 27 巻第 1 号 (1975), 7–31.
2. 浅野 洋, *Symplectic Triple Systems* と単純リー環, 京都大学数理解析研究所講究録, 第 308 巻 (1977), 41–54.
3. H. Freudenthal, *Beziehungen der E_8 und E_7 zur Oktavenebene, I–II; III–IV; V–IX; X–XI*, Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. **A57** (1954); **A58** (1955); **A62** (1959); **A66** (1963).
4. H. Freudenthal, *Lie groups in the foundations of geometry*, Advances in Math. **1** (1964), 145–190.
5. H. Kaji, O. Yasukura, *Tangent loci and certain linear sections of adjoint varieties*, Nagoya Math. J. **158** (2000), 63–72.
6. H. Kaji, O. Yasukura, *Secants, tangents and the homogeneity of Freudenthal varieties*, Preprint 2001/03/28; IMPA Preprint Server, Serie A 2001/29.

7. K. Yamaguti, H. Asano, *On Freudenthal's construction of exceptional Lie algebras*, Proc. Japan Acad. **51** (1975), 253–258.

早稲田大学理工学部数理科学科, 〒 169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1

kaji@mse.waseda.ac.jp

<http://pc193097.pc.waseda.ac.jp/>