

修士論文概要書

Master's Thesis Summary

Date of submission: 2 / 2 / 2024 (MM/DD/YYYY)

専攻名（専門分野） Department	数学応用数理専攻	氏 名 Name	福江 大空	指 導 教 員 Advisor	楫 元 印 Seal
研究指導名 Research guidance	代数幾何学研究	学籍番号 Student ID number	CD 5122A048-6		
研究題目 Title	射影平面における双対定理の Grassmann-Cayley algebra による考察				

本研究では射影平面上の双対定理について Grassmann-Cayley algebra を用いて考察した。Grassmann-Cayley algebra とはベクトル空間の外積空間に線形空間の和、共通部分を取る操作に対応する2つの演算、join と meet を定義した代数である([2], § 3.3)。これを用いることで射影平面上の点と直線に関する幾何的条件を多項式として表示することができる。これにより計算代数学の理論を用いたアルゴリズムによる幾何定理の自動証明が可能になる。

本論文ではまず、双対定理の考察として具体的に射影平面上の幾何定理としてパスカルの定理とその双対定理として知られるブリアンションの定理([4], § 5.4)について考えた。その結果それら2つの定理の結論を表す Grassmann-Cayley algebra の式には以下の関係があることが分かった。

主定理1

C を射影平面 P^2 上の非退化な二次曲線、 P, B を方程式 $P = 0, B = 0$ によりパスカルの定理、ブリアンションの定理の結論を表す Grassmann-Cayley algebra の式とする。
このとき、 C のヘッシアンを A とすると

$$B = A^4 P$$

となり、方程式 $P = 0$ と $B = 0$ は同値である。

これは2つの定理の双対性が多項式としては二次曲線のヘッシアンの累乗倍として表れていることを示しており、これによりパスカルの定理とブリアンションの定理の結論の同値性が保たれることを表している。

さらにパスカルの定理とブリアンションの定理に付いての考察を踏まえ、一般的に「射影平面上の二次曲線に関する双対原理」([4], § 5.3)における点と直線の対応について Grassmann-Cayley algebra を用いて考察した。

具体的には P^2 における Grassmann-Cayley algebra に対して双対空間での Grassmann-Cayley algebra がどのように対応しているのかを調べることで、Grassmann-Cayley algebra の方程式によって表される幾何定理について「Grassmann-Cayley algebra 版双対原理」を得た。

主定理2

射影平面上の二次曲線に関する双対原理において、命題が Grassmann-Cayley algebra の方程式として表されているとする。

このとき、方程式に現れる点と直線を極線と極に入れ替え、さらに全ての join と meet を入れ替えることで双対命題となる方程式が得られる。

ここで join と meet は線形空間の和、共通部分に対応する Grassmann-Cayley algebra の演算であり([2], § 3.3)、これらが双対空間では逆転することが分かった。

これらの結果から射影平面上の幾何定理について、双対空間の Grassmann-Cayley algebra との対応は演算を入れ替えることで得られる事がわかり、さらにパスカルの定理とブリアンションの定理については双対性がヘッシアンの累乗倍という形で表れることがわかった。

参考文献

[1] D.Cox, J.Little and D.O'Shea. Ideals, Varieties and Algorithms, Springer-Verlag International Switzerland 2015.

[2] B. Sturmfels, Algorithms in Invariant Theory, Springer-Verlag/Wien, New York 2008.

[3] W. H. Greub. Multilinear algebra. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics 1967.

[4] 難波誠, 改定新版 代数曲線の幾何学, 現代数学社, 2018.