

射影平面における双対定理の Grassmann-Cayley algebra による考察

数学応用数理専攻 楫研究室所属 5122A048-6 福江大空

主定理 1

C を射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の非退化な二次曲線、 P, B を方程式 $P = 0, B = 0$ によりパスカルの定理、プリアンションの定理の結論を表す Grassmann-Cayley algebra の式とする。

このとき、 C のヘッシアンを A とすると、

$$B = A^4 P$$

となり、方程式 $P = 0$ と $B = 0$ は同値である。

主定理 2

射影平面上の二次曲線に関する双対原理において、命題が Grassmann-Cayley algebra の方程式として表されているとする。

この時、方程式に現れる点と直線を極線と極に入れ替え、さらに全ての join と meet を入れ替えることで双対命題となる方程式が得られる。

$V : d$ 次元 $\mathbb{C}$ -ベクトル空間、 $\bigwedge(V) : V$ の外積代数、 $\vee : \bigwedge(V)$ に定められている外積演算

定義 1 (extensor)

$A \in \bigwedge^k(V)$ が分解可能、つまり $A = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$ ($a_1, a_2, \dots, a_k \in V$) であるとする。

このとき、 A を *extensor (of step k)* といい、以降これを $A = a_1 a_2 \cdots a_k$ と略記する。

V の基底ベクトルを $e_1, \dots, e_d$ とする。任意の $a_1, \dots, a_k \in V$ ($k \leq d$) について $a_i = \sum_{j=1}^d a_{ij} e_j$ であるとする。多重線型性、反対称性より

$$a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq d} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_k} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{kj_1} & a_{kj_2} & \cdots & a_{kj_k} \end{vmatrix} e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \cdots \vee e_{j_k}$$

となる。

ここで、 $e_1 e_2 \cdots e_d \mapsto 1$ により step d の extensor $a_1 \cdots a_d$ を $d \times d$ の行列式と同一視する。

この行列式を以降 $[a_1, \dots, a_d]$ と書く。

定義 2 (extensor に対応する線型部分空間)

任意の extensor $A = a_1 \cdots a_k$ について $a_1, \dots, a_k$ を基底とする V の部分線形空間 $\bar{A}$ が一対一に対応する。

定義 3 (join, meet 演算)

任意の extensor $A = a_1 a_2 \cdots a_j, B = b_1 b_2 \cdots b_k$ について 2 つの演算を定義する。

$$\langle \text{join 演算} \rangle A \vee B := a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_j \vee b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_k = a_1 \cdots a_j b_1 \cdots b_k \quad (j+k \leq d).$$

$$\langle \text{meet 演算} \rangle A \wedge B := \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) [a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(d-k)}, b_1, \dots, b_k] a_{\sigma(d-k+1)} \cdots a_{\sigma(j)} \quad (j+k \geq d).$$

ただし $\sum$ は $\{1, \dots, j\}$ の置換 σ で $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(d-k)$ かつ $\sigma(d-k+1) < \sigma(d-k+2) < \dots < \sigma(j)$ となるものの総和とする。(この置換を $(d-k, j-(d-k))$ の *shuffles* という)

注意 4 (線型部分空間との対応)

join, meet 演算は線型部分空間に対して以下のように対応している。

- $A \vee B \neq 0 \iff a_1, a_2, \dots, a_j, b_1, b_2, \dots, b_k$ が一次独立。
 $\overline{A + B} = \overline{A \vee B} = \text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_j, b_1, b_2, \dots, b_k\}$.
 $\longrightarrow$ join は張る空間に対応。
- $A \wedge B \neq 0 \iff \overline{A} + \overline{B} = V$.
 $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
 $\longrightarrow$ meet は共通部分に対応。

よって、 $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{P}^2$ については以下のことが言える。

$\mathbb{P}^2$ での対応

- $\overline{ab} \longleftrightarrow a \vee b$.
- $\overline{ab}$ と $\overline{cd}$ の交点 $\longleftrightarrow (a \vee b) \wedge (c \vee d)$ ($\overline{ab} \neq \overline{cd}$).
- $\overline{ab}, \overline{cd}, \overline{ef}$ が一点で交わる
 $\iff (a \vee b) \wedge (c \vee d) \wedge (e \vee f) = 0$.
- a, b, c が同一直線上にある $\iff a \vee b \vee c = 0$.

例 5 (パスカルの定理の Grassmann-Cayley algebra による表現)

パスカルの定理

$\mathbb{P}^2$ の二次曲線上の 6 点 a, b, c, d, e, f について $\overline{af}$ と $\overline{cd}$ の交点を g 、 $\overline{ab}$ と $\overline{ed}$ の交点を h 、 $\overline{bc}$ と $\overline{ef}$ の交点を i とすると g, h, i は同一直線上にある。

”3 交点 g, h, i が同一直線上” $\iff (af \wedge cd) \vee (ab \wedge ed) \vee (bc \wedge ef) = 0$.

さらにこれを展開すると、

$$\begin{aligned} (af \wedge cd) \vee (ab \wedge ed) \vee (bc \wedge ef) &= ([acd]f - [fcd]a) \vee ([aed]b - [bed]a) \vee ([bef]c - [cef]b) \\ &= -[acd][ade][bef][bcf] + [acd][bde][bef][acf] \\ &\quad - [acd][bde][cef][abf] + [cdf][ade][bef][abc] \\ &= -a_1^2 b_1 b_2 c_2^2 d_1 d_3 e_2 e_3 f_3^2 + a_1 a_2 b_1^2 c_2^2 d_1 d_3 e_2 e_3 f_3^2 \dots (720 \text{ terms}). \end{aligned}$$

参考文献

- [1] D.Cox, J.Little and D.O'Shea. Ideals, Varieties and Algorithms, Springer-Verlag International Switzerland 2015.
- [2] B. Sturmfels, Algorithms in Invariant Theory, Springer-Verlag/Wien, New York 2008.
- [3] W. H. Greub. Multilinear algebra. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics 1967.
- [4] 難波誠, 改定新版 代数曲線の幾何学, 現代数学社, 2018.