射影平面における双対定理の Grassmann-Cayley algebra による考察

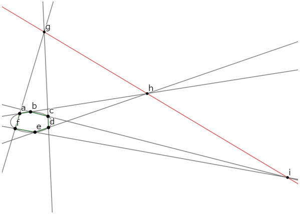
早稲田大学大学院基幹理工学研究科
数学応用数理専攻修士２年 棡研究室所属
福江大空
学籍番号　5122A048-6

2024 年 2 月 2 日

はじめに

射影平面上の幾何定理とその双対定理の関係について
Grassmann-Cayley algebra を用いて考察する。

Grassmann-Cayley algebra では点と直線に関する幾何的条件を多項式として表示できる



パスカルの定理

"3 交点が一直線上に並ぶ"

$$\Longleftrightarrow$$

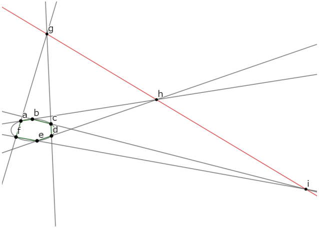
$$(af \wedge cd) \vee (ab \wedge ed) \vee (bc \wedge ef) = 0.$$

従来の研究と本研究

従来の研究

- 幾何定理のアルゴリズムによる自動証明
- 計算に用いるアルゴリズムや公式

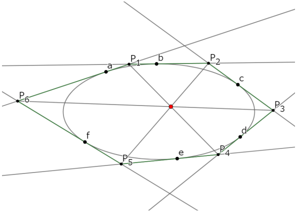
$\longrightarrow$ 本研究では双対性について考察する



パスカルの定理

$\longleftrightarrow$

双対



ブリアンションの定理

Grassmann-Cayley algebra では双対性がどのように表現されるか？

従来の研究と本研究

さらに、より一般的に

定理 (射影平面における二次曲線に関する双対原理 (難波, [4]))

射影平面上の既約二次曲線と、いくつかの点と直線に関する命題において点と直線を極と極線の対応に従い入れ替えて得られる命題を双対命題といい、これは元の命題が真であるとき真である。

$\Downarrow$

<u>”Grassmann-Cayley algebra 版” を考える</u>

主定理 1

主定理 1

C を射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の非退化な二次曲線、P, B を方程式 $P = 0, B = 0$ によりパスカルの定理、ブリアンションの定理の結論を表す *Grassmann-Cayley algebra* の式とする。
このとき、

$$B = A^4 P \quad \left(A = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \end{vmatrix} : \text{ヘッシアン}\right)$$

となる。特に方程式 $P = 0$ と $B = 0$ は同値である。

多項式として二次曲線のヘッシアン（非退化ならば $A \neq 0$）と P によって B が因数分解されることが分かった。

主定理 2

主定理 2

射影平面上の二次曲線に関する双対原理において、命題が *Grassmann-Cayley algebra* の方程式として表されているとする。このとき、方程式に現れる点と直線を極線と極に入れ替え、さらに全ての *join* と *meet* を入れ替えることで双対命題となる方程式が得られる。

パスカルの定理とブリアンションの定理

$$(af \wedge cd) \vee (ab \wedge ed) \vee (bc \wedge ef) = 0$$
$$\Leftrightarrow (P_1 \vee P_4) \wedge (P_2 \vee P_5) \wedge (P_3 \vee P_6) = 0.$$

extensor

定義 (extensor)

$\bigwedge(V)$ に定められている外積演算を $\vee$ で表す。
$A \in \bigwedge^k(V)$ が $A = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$ $(a_1, a_2, \ldots, a_k \in V)$ であるとき A を *extensor (of step k)* といい、以降これを $A = a_1 a_2 \cdots a_k$ と略記する。

定義 (extensor に対応する線型部分空間)

$A = a_1 a_2 \cdots a_k$: *nonzero extensor of step k*
$\overline{A}$: $a_1, a_2, \ldots, a_k$ を基底とする V の部分線形空間
とすると、これらは一対一に対応する。

join,meet 演算

定義 (join,meet 演算)

$A = a_1 a_2 \cdots a_j, B = b_1 b_2 \cdots b_k$ について 2 つの演算を定義する。

$$A \vee B \quad (j + k \leq d)$$
$$:= a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_j \vee b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_k = a_1 \cdots a_j b_1 \cdots b_k.$$
$$A \wedge B \quad (j + k \geq d)$$
$$:= \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma) \left[a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(d-k)}, b_1, \ldots, b_k \right] a_{\sigma(d-k+1)} \cdots a_{\sigma(j)}.$$

ただし $\sum$ は $\{1, \ldots, j\}$ の置換 σ で $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(d-k)$ かつ $\sigma(d-k+1) < \sigma(d-k+2) < \cdots < \sigma(j)$ となるものの総和とする。
(この置換を $(d-k, j-(d-k))$ の shuffles という)
$[a_1, \ldots a_d]$ は $a_1, \ldots, a_d$ がなす $d \times d$ の行列式である。
ここで、$\vee$ を *join*、$\wedge$ を *meet* と呼ぶ。

d 次の場合

注意

$e_1, \ldots, e_d$ を V の基底ベクトルとすると $(k \leq d)$

$$
\begin{aligned}
& a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k \\
& = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq d} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \ldots & a_{1j_k} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \ldots & a_{2j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{kj_1} & a_{kj_2} & \cdots & a_{kj_k} \end{vmatrix} e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \cdots \vee e_{j_k}.
\end{aligned}
$$

$e_1 e_2 \cdots e_d \mapsto 1$ により $a_1 \vee \cdots \vee a_d$ を $[a_1, a_2, \ldots, a_d]$ と同一視する。($\textit{これにより}$ $j + k = d$ の時スカラーとして $A \vee B = A \wedge B$)

Grassmann-Cayley algebra と線型部分空間の対応

定義 (Grassmann-Cayley algebra)

Grassmann-Cayley algebra とはベクトル空間 V の外積代数 $\bigwedge(V)$ 上に 2 つの演算 $\vee, \wedge$ を定めた代数である。

演算の線型部分空間との対応

- $A \vee B \neq 0 \iff a_1, a_2, \ldots, a_j, b_1, b_2, \ldots, b_k$ が一次独立。
  $\overline{A} + \overline{B} = \overline{A \vee B} = \mathrm{span}\{a_1, a_2, \ldots, a_j, b_1, b_2, \ldots, b_k\}.$
  $\longrightarrow$join は張る空間に対応。

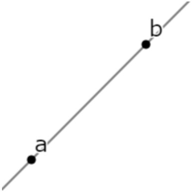
- $A \wedge B \neq 0 \iff \overline{A} + \overline{B} = V.$
  $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$
  $\longrightarrow$meet は共通部分に対応。

射影平面との対応

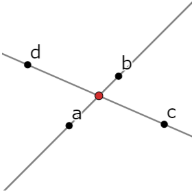
$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{P}^2$ については以下のことが言える。

$\mathbb{P}^2$ での対応

- $\overline{ab} \longleftrightarrow a \vee b$.
- $\overline{ab}$ と $\overline{cd}$ の交点 $\longleftrightarrow (a \vee b) \wedge (c \vee d)$ （$\overline{ab} \neq \overline{cd}$）.



$a \vee b$

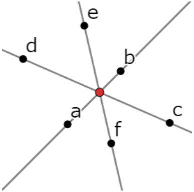


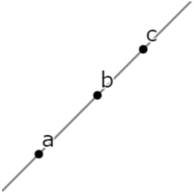
$(a \vee b) \wedge (c \vee d)$

射影平面との対応

$\mathbb{P}^2$ での対応

- $\overline{ab}, \overline{cd}, \overline{ef}$ が一点で交わる
  $\iff (a \vee b) \wedge (c \vee d) \wedge (e \vee f) = 0.$
- a, b, c が同一直線上にある $\iff a \vee b \vee c = 0.$



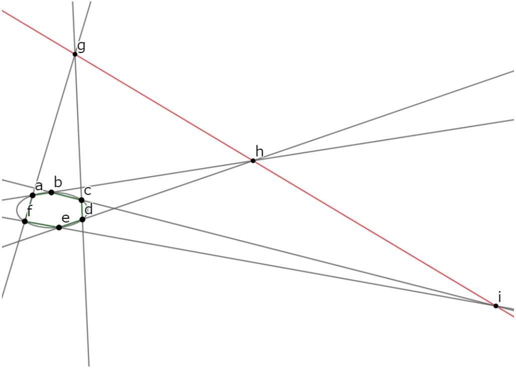


$(a \vee b) \wedge (c \vee d) \wedge (e \vee f) = 0$ 　　　 $a \vee b \vee c = 0$

準備

定理 (パスカルの定理)

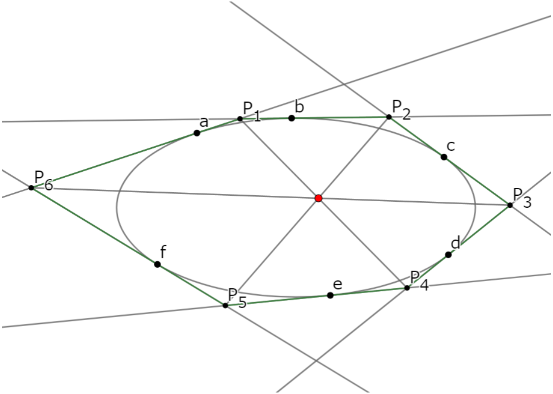
$\mathbb{P}^2$ の二次曲線上の 6 点 a, b, c, d, e, f について $\overline{af}$ と $\overline{cd}$ の交点を g、$\overline{ab}$ と $\overline{ed}$ の交点を h、$\overline{bc}$ と $\overline{ef}$ の交点を i とすると g, h, i は同一直線上にある。



準備

定理 (ブリアンションの定理)

$\mathbb{P}^2$ の二次曲線上の 6 点での接線で構成される六角形を $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ とすると直線 $\overline{P_1P_4}, \overline{P_2P_5}, \overline{P_3P_6}$ は一点で交わる。



準備

この 2 つの定理の幾何的条件を Grassmann-Cayley algebra で表示すると

パスカルの定理

g, h, i が同一直線上。

$$\iff g \vee h \vee i = 0 \quad (g = af \wedge cd, h = ab \wedge ed, i = bc \wedge ef).$$

$$\iff (af \wedge cd) \vee (ab \wedge ed) \vee (bc \wedge ef) = 0.$$

ブリアンションの定理

$\overline{P_1P_4}, \overline{P_2P_5}, \overline{P_3P_6}$ が一点で交わる。

$$\iff (P_1 \vee P_4) \wedge (P_2 \vee P_5) \wedge (P_3 \vee P_6) = 0.$$

主定理

主定理 1

C を射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の非退化な二次曲線、P, B を方程式 $P = 0, B = 0$ によりパスカルの定理、ブリアンションの定理の結論を表す *Grassmann-Cayley algebra* の式とする。
このとき、

$$B = A^4 P \quad \left(A = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \end{vmatrix} : \text{ヘッシアン}\right)$$

となる。特に方程式 $P = 0$ と $B = 0$ は同値である。

<u>証明</u>
まず、$P = (af \wedge cd) \vee (ab \wedge ed) \vee (bc \wedge ef)$,
$B = (P_1 \vee P_4) \wedge (P_2 \vee P_5) \wedge (P_3 \vee P_6)$ を展開する。

主定理

演算の定義より

$$
\begin{aligned}
P &= (af \wedge cd) \vee (ab \wedge ed) \vee (bc \wedge ef) \\
&= ([acd]\,f - [fcd]\,a) \vee ([aed]\,b - [bed]\,a) \vee ([bef]\,c - [cef]\,b) \\
&= [acd]\,[aed]\,[bef]\,[fbc] - [acd]\,[aed]\,[cef]\,[fbb] \\
&\quad - [acd]\,[bed]\,[bef]\,[fac] + [acd]\,[bed]\,[cef]\,[fab] \\
&\quad - [fcd]\,[aed]\,[bef]\,[abc] + [fcd]\,[aed]\,[cef]\,[abb] \\
&\quad + [fcd]\,[bed]\,[bef]\,[aac] - [fcd]\,[bed]\,[cef]\,[aab] \\
&= -[acd]\,[ade]\,[bef]\,[bcf] + [acd]\,[bde]\,[bef]\,[acf] \\
&\quad - [acd]\,[bde]\,[cef]\,[abf] + [cdf]\,[ade]\,[bef]\,[abc] \\
&= -a_1^2 b_1 b_2 c_2^2 d_1 d_3 e_2 e_3 f_3^2 + a_1 a_2 b_1^2 c_2^2 d_1 d_3 e_2 e_3 f_3^2 \ldots (720 \text{ terms}).
\end{aligned}
$$

$$
\left([abc] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right)
$$

主定理

$$
\begin{aligned}
B &= (P_1 \vee P_4) \wedge (P_2 \vee P_5) \wedge (P_3 \vee P_6) \\
&= ([P_1 P_2 P_5]\, P_4 - [P_4 P_2 P_5]\, P_1) \wedge P_3 P_6 \\
&= [P_1 P_2 P_5]\, [P_4 P_3 P_6] - [P_4 P_2 P_5]\, [P_1 P_3 P_6] \\
&= [P_1 P_3 P_6]\, [P_2 P_4 P_5] - [P_1 P_2 P_5]\, [P_3 P_4 P_6]\,.
\end{aligned}
$$

ここで二次曲線 C を
$C = u_{200}x^2 + u_{020}y^2 + u_{002}z^2 + u_{110}xy + u_{101}xz + u_{011}yz$ とする。

主定理

点 P_i は 2 接線の交点であるため $a, b, \ldots, f$ による表示として

$$
\begin{aligned}
P_1 = &(\frac{\partial F}{\partial z}(a)\frac{\partial F}{\partial y}(b) - \frac{\partial F}{\partial y}(a)\frac{\partial F}{\partial z}(b)\\
&, \frac{\partial F}{\partial x}(a)\frac{\partial F}{\partial z}(b) - \frac{\partial F}{\partial z}(a)\frac{\partial F}{\partial x}(b), \frac{\partial F}{\partial y}(a)\frac{\partial F}{\partial x}(b) - \frac{\partial F}{\partial x}(a)\frac{\partial F}{\partial y}(b))\\
= &((2u_{002}a_3 + u_{101}a_1 + u_{011}a_2)(2u_{020}b_2 + u_{110}b_1 + u_{011}b_3)\\
&- (2u_{020}a_2 + u_{110}a_1 + u_{011}a_3)(2u_{002}b_3 + u_{101}b_1 + u_{011}b_2),\\
&(2u_{200}a_1 + u_{110}a_2 + u_{101}a_3)(2u_{002}b_3 + u_{101}b_1 + u_{011}b_2)\\
&- (2u_{002}a_3 + u_{101}a_1 + u_{011}a_2)(2u_{200}b_1 + u_{110}b_2 + u_{101}b_3),\\
&(2u_{020}a_2 + u_{110}a_1 + u_{011}a_3)(2u_{200}b_1 + u_{110}b_2 + u_{101}b_3)\\
&- (2u_{200}a_1 + u_{110}a_2 + u_{101}a_3)(2u_{020}b_2 + u_{110}b_1 + u_{011}b_3))
\end{aligned}
$$

（$P_2, \ldots, P_6$ も同様）
が得られる。

主定理

これを先程の式に代入すると

$$
\begin{aligned}
&[P_1P_3P_6][P_2P_4P_5]-[P_1P_2P_5][P_3P_4P_6] \\
&\quad = 4096u_{200}^4u_{020}^4u_{002}^4a_1^2b_1b_2c_2^2d_1d_3e_2e_3f_3^2-\ldots(46080\,\text{terms})
\end{aligned}
$$

となる。
ここで B を P で割ると、

$$
\begin{aligned}
B = 16(&4u_{200}u_{020}u_{002}-u_{200}u_{011}^2 \\
&-u_{020}u_{101}^2-u_{002}u_{110}^2+u_{110}u_{101}u_{011})^4P
\end{aligned}
$$

が得られる。

主定理

また、

$$2(4u_{200}u_{020}u_{002} - u_{200}u_{011}^2 - u_{020}u_{101}^2 - u_{002}u_{110}^2 + u_{110}u_{101}u_{011})$$

$$= \begin{vmatrix} 2u_{200} & u_{110} & u_{101} \\ u_{110} & 2u_{020} & u_{011} \\ u_{101} & u_{011} & 2u_{002} \end{vmatrix} : C\text{ のヘッシアン}.$$

$$C\text{ が非退化} \iff \begin{vmatrix} 2u_{200} & u_{110} & u_{101} \\ u_{110} & 2u_{020} & u_{011} \\ u_{101} & u_{011} & 2u_{002} \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\therefore P = 0 \iff B = 0.$$

□

主定理

主定理 2

射影平面上の二次曲線に関する双対原理において、命題が *Grassmann-Cayley algebra* の方程式として表されているとする。このとき、方程式に現れる点と直線を極線と極に入れ替え、さらに全ての *join* と *meet* を入れ替えることで双対命題となる方程式が得られる。

射影平面における二次曲線に関する双対原理 (難波, [4])

射影平面上の既約二次曲線と、いくつかの点と直線に関する命題において点と直線を極と極線の対応に従い入れ替えて得られる命題を双対命題といい、これは元の命題が真であるとき真である。

主定理

定義 (極・極線)

$\forall \overline{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{P}^2 (\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^3)$、$C : \mathbb{P}^2$ 上の非退化二次曲線

$$[\cdot,\cdot] : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}\,;\ [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = \frac{\partial C}{\partial x}(\boldsymbol{v}) w_1 + \frac{\partial C}{\partial y}(\boldsymbol{v}) w_2 + \frac{\partial C}{\partial z}(\boldsymbol{v}) w_3$$

$$\phi_{[\cdot,\cdot]} : \mathbb{C}^3 \to \check{\mathbb{C}}^3\,;\ \phi_{[\cdot,\cdot]}(\boldsymbol{v}) = (\frac{\partial C}{\partial x}(\boldsymbol{v}), \frac{\partial C}{\partial y}(\boldsymbol{v}), \frac{\partial C}{\partial z}(\boldsymbol{v}))$$

$$\Phi_{[\cdot,\cdot]} : \mathbb{P}^2 \to \check{\mathbb{P}}^2\,;\ \Phi_{[\cdot,\cdot]}(\overline{\boldsymbol{v}}) = (\frac{\partial C}{\partial x}(\overline{\boldsymbol{v}}) : \frac{\partial C}{\partial y}(\overline{\boldsymbol{v}}) : \frac{\partial C}{\partial z}(\overline{\boldsymbol{v}}))$$

ここで、$\Phi_{[\cdot,\cdot]}(\overline{\boldsymbol{v}})$（対応する $\mathbb{P}^2$ の直線 $\Phi_{[\cdot,\cdot]}(\overline{\boldsymbol{v}})^*$）を C における $\mathbb{P}^2$ の点 $\overline{\boldsymbol{v}}$ の極線といい、逆に $\check{\mathbb{P}}^2$ の点 L^* に対応する $\mathbb{P}^2$ の点を C における $\mathbb{P}^2$ の直線 L の極という。
(ex. 二次曲線上の点に対して極線は接線)

主定理

定理

$\mathbb{P}^2$ 上の *Grassmann-Cayley algebra* において任意の *extensor* A, B の *meet* 及び *join*

$$A \vee B\,,\; A \wedge B$$

は $\check{\mathbb{P}}^2$ 上の *Grassmann-Cayley algebra* において

$$A^* \wedge B^*\,,\; A^* \vee B^*$$

に対応する。
ここで、A^*, B^* は A, B に対応する $\mathbb{P}^2$ の点もしくは直線の極線、極を $\check{\mathbb{P}}^2$ 上の *Grassmann-Cayley algebra* における *extensor* として表したものとする。

主定理

証明
2 つの点の join が対応する 2 つの極線の meet に対応することを示す。
2 つの点を $\boldsymbol{a} = (a_1 : a_2 : a_3), \boldsymbol{b} = (b_1 : b_2 : b_3)$ とする。このとき、対応する極線は非退化二次曲線を C とすると

$$\Phi_{[\cdot,\cdot]}(\boldsymbol{a})^* = \frac{\partial C}{\partial x}(\boldsymbol{a})x + \frac{\partial C}{\partial y}(\boldsymbol{a})y + \frac{\partial C}{\partial z}(\boldsymbol{a})z$$
$$\Phi_{[\cdot,\cdot]}(\boldsymbol{b})^* = \frac{\partial C}{\partial x}(\boldsymbol{b})x + \frac{\partial C}{\partial y}(\boldsymbol{b})y + \frac{\partial C}{\partial z}(\boldsymbol{u})z$$

となる。
ここで、この 2 直線を step 2 の extensor としてみると 2 直線の meet は共通部分、つまり交点に対応する。さらに、部分線形空間の対応の一意性よりこれは交点を P とすると step 1 の extensor a と等しい。

主定理

また、この交点の座標は
$C = u_{200}x^2 + u_{020}y^2 + u_{002}z^2 + u_{110}xy + u_{101}xz + u_{011}yz$ とすると

$$
\begin{aligned}
P = (&\frac{\partial C}{\partial z}(a)\frac{\partial C}{\partial y}(b) - \frac{\partial C}{\partial y}(a)\frac{\partial C}{\partial z}(b),\\
&\frac{\partial C}{\partial x}(a)\frac{\partial C}{\partial z}(b) - \frac{\partial C}{\partial z}(a)\frac{\partial C}{\partial x}(b), \frac{\partial C}{\partial y}(a)\frac{\partial C}{\partial x}(b) - \frac{\partial C}{\partial x}(a)\frac{\partial C}{\partial y}(b))\\
= (&(2u_{002}a_3 + u_{101}a_1 + u_{011}a_2)(2u_{020}b_2 + u_{110}b_1 + u_{011}b_3)\\
&- (2u_{020}a_2 + u_{110}a_1 + u_{011}a_3)(2u_{002}b_3 + u_{101}b_1 + u_{011}b_2),\\
&(2u_{200}a_1 + u_{110}a_2 + u_{101}a_3)(2u_{002}b_3 + u_{101}b_1 + u_{011}b_2)\\
&- (2u_{002}a_3 + u_{101}a_1 + u_{011}a_2)(2u_{200}b_1 + u_{110}b_2 + u_{101}b_3),\\
&(2u_{020}a_2 + u_{110}a_1 + u_{011}a_3)(2u_{200}b_1 + u_{110}b_2 + u_{101}b_3)\\
&- (2u_{200}a_1 + u_{110}a_2 + u_{101}a_3)(2u_{020}b_2 + u_{110}b_1 + u_{011}b_3))
\end{aligned}
$$

主定理

として得られ、この極に対する極線は

$$\Phi_{[\cdot,\cdot]}(P)^* = \frac{\partial C}{\partial x}(P)x + \frac{\partial C}{\partial y}(P)y + \frac{\partial C}{\partial z}(P)z.$$

ここに $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\Phi_{[\cdot,\cdot]}(P)^*(\boldsymbol{a}) &= \frac{\partial C}{\partial x}(P)a_1 + \frac{\partial C}{\partial y}(P)a_2 + \frac{\partial C}{\partial z}(P)a_3 \\ &= 0 \\ \Phi_{[\cdot,\cdot]}(P)^*(\boldsymbol{b}) &= \frac{\partial C}{\partial x}(P)b_1 + \frac{\partial C}{\partial y}(P)b_2 + \frac{\partial C}{\partial z}(P)b_3 \\ &= 0\end{aligned}$$

となるのでこれは直線 $\overline{\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}}$ である。 $\square$

まとめ

主定理 1

$$B = A^4 P \quad \left(A = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \end{vmatrix} : \text{ヘッシアン}\right).$$

特に、$P = 0 \iff B = 0.$

主定理 2

射影平面上の二次曲線に関する双対原理において、命題が *Grassmann-Cayley algebra* の方程式として表されているとする。このとき、方程式に現れる点と直線を極線と極に入れ替え、さらに全ての *join* と *meet* を入れ替えることで双対命題となる方程式が得られる。

参考文献

[1] D.Cox, J.Little and D.O'Shea. Ideals,Varieties and Algorithms, Springer-Verlag International Switzerland 2015.

[2] B. Sturmfels, Algorithms in Invariant Theory, Springer-Verlag/Wien, New York 2008.

[3] W. H. Greub. Multilinear algebra. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics 1967.

[4] 難波誠, 改定新版 代数曲線の幾何学, 現代数学社, 2018.