

射影平面における双対定理の Grassmann-Cayley algebra による考察

早稲田大学大学院基幹理工学研究科

数学応用数理専攻修士2年

福江大空

学籍番号 5122A048-6

指導教員名 楫元

2024年1月29日

目次

1	はじめに	3
2	準備	5
3	Grassmann-Cayley algebra を用いた定理の証明	9
4	パスカルの定理とブリアンションの定理の条件の同値性	12
5	Grassmann-Cayley algebra における射影平面上の双対原理	15

1 はじめに

射影平面上での幾何学において「(二次曲線に関する) 双対原理」というものが存在する。これは既約二次曲線といくつかの直線と点に関する命題に対し、直線と点をそれぞれ対応する点と直線に置き換えて新たな命題が得られるというものである。こうして得られる命題(定理)を双対命題(定理)といい命題の真偽が同値であることが分かっている。

本論文では射影平面上の幾何定理とその双対定理について Grassmann-Cayley algebra を用いて考察する。Grassmann-Cayley algebra は外積代数に演算を追加して得られる代数であり、これを用いることで射影空間の点と直線に関する幾何的条件を多項式として表示することができる。これにより幾何的条件についてグレブナー基底を用いた計算代数学の理論を適用できるようになる。

これまで、幾何的条件を多項式として表示するツールとして Grassmann-Cayley algebra の研究においては、幾何定理の自動証明のためのアルゴリズムが盛んに調べられている。

本研究ではまず射影平面上の幾何定理としてパスカルの定理とその双対定理であるブリアンションの定理について Grassmann-Cayley algebra を用いたアルゴリズムによる自動証明を行い、その過程で得られる Grassmann-Cayley algebra の式を比較することで、双対性に関する定理を得た。

主定理 1 (定理 4.2)

C を射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の非退化な二次曲線、 P, B を方程式 $P = 0, B = 0$ によりパスカルの定理、ブリアンションの定理の結論を表す Grassmann-Cayley algebra の式とする。

このとき、 C のヘッシアンを A とすると、

$$B = A^4 P$$

となり、方程式 $P = 0$ と $B = 0$ は同値である。

これは 2 つの定理の双対性が多項式としては二次曲線のヘッシアンの累乗倍として表れていることを示しており、これにより幾何的条件の同値性が保たれていることを表している。

さらに、より一般的に射影平面上での点と直線の双対関係を Grassmann-Cayley algebra を用いて記述することで「Grassmann-Cayley algebra 版双対原理」を求めた。

主定理 2 (定理 5.4)

射影平面上の二次曲線に関する双対原理において、命題が Grassmann-Cayley algebra の方程式として表されているとする。

この時、方程式に現れる点と直線を極線と極に入れ替え、さらに全ての join と meet を入れ替えることで双対命題となる方程式が得られる。

これにより Grassmann-Cayley algebra の方程式として表されている射影平面上の幾何命題について双対命題となる方程式を直接的に得ることができるようになる。

2 準備

まず、多項式計算に用いるグレブナー基底の理論について準備する。
以下の定義、定理は [1] を参照。

定義 2.1 (単項式順序)

体 k 上の多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ における単項式順序とは次の性質を満たす $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ の順序 $>$ によって定義される単項式の集合 $\{x^\alpha | \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n\}$ の順序付けである。

1. $>$ は $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ の全順序である。
2. $\alpha > \beta$ で $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ とすれば、 $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ である。
3. $>$ は $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ の整列順序である。

定義 2.2 (グレブナー基底)

多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ において単項式順序を固定する。イデアル I の有限部分集合 $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ がグレブナー基底であるとは

$$\langle \text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_t) \rangle = \langle \text{LT}(I) \rangle$$

を満たすことと定義する。

($\text{LT}(g_i): g_i$ の先頭項、 $\text{LT}(I): I$ の元先頭項で生成されるイデアル)

定理 2.3 (割り算アルゴリズム)

単項式順序を一つ固定し、 $F = (f_1, \dots, f_s)$ を $k[x_1, \dots, x_n]$ の順序付けられた s 個の多項式の組とする。このとき、どんな $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ も

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_s f_s + r$$

と、 $a_i, r \in k[x_1, \dots, x_n]$ を使って書ける。さらに、 r は 0 であるか、または単項式の k 係数の線型結合で、どの単項式も $\text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(f_s)$ のいずれでも割り切れない。

この r を、 f を F で割った余りと呼ぶ。

さらに、もし $a_i f_i \neq 0$ ならば

$$\text{multideg}(f) \geq \text{multideg}(a_i f_i)$$

である。

Proof. 証明と具体的なアルゴリズムは [1] 参照

□

命題 2.4 (グレブナー基底による割り算)

$G = \{g_1, \dots, g_t\}$ は $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ のグレブナー基底であり、 $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ とする。

このとき、次の二つの条件を満たす多項式 $r \in k[x_1, \dots, x_n]$ がただ一つ存在する。

1. r のどの項も $\text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_t)$ のどれかで割り切れない。
2. $f = g + r$ となる $g \in I$ が存在する。

特に、割り算アルゴリズムにおいて、 G の元がどのように並んでいても r は f を G で割ったときの余りである。

Proof. [1] 参照

□

次に、Grassmann-Cayley algebra を用いるために必要な定義・定理を述べる。

定義 2.5 (外積代数 (W. H. Greub, [3]))

V を d 次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間とする。 V の k 次外積代数 $\bigwedge^k(V)$ と k 次 join $\bigwedge^k$ とは V ベクトル空間と $V \times \dots \times V$ から $\bigwedge^k(V)$ への歪対称 k 重線形写像で以下の普遍性を持つものである。

任意の歪対称 k 重線型写像 $\psi = V \times \dots \times V \rightarrow F$ について線形写像 $f : \bigwedge^k(V) \rightarrow F$ で $\psi = f \circ \bigwedge^k$ となるものが一意に存在する。

詳しくは [3] を参照

ここで $(a_1, \dots, a_k) \in V^k$ について $\bigwedge^k(a_1, \dots, a_k) = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k$ と書き、 $\bigwedge(V) := \bigoplus_{k=0}^d \bigwedge^k(V)$ を V の外積代数と定義する。

ここで $\{e_1, \dots, e_d\}$ を V の任意の基底とすると $\bigwedge^k(V)$ は

$$\{e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \dots \vee e_{j_k} \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq d\}$$

を基底とする部分空間あり $\bigwedge(V)$ は次数付き $\mathbb{C}$ ベクトル空間となる。

この時

$$\dim \bigwedge^k(V) = \binom{d}{k}, \quad \dim \bigwedge(V) = 2^d$$

となる。

以下の定義、定理は [2] を参照。

定義 2.6 (extensor)

任意の $a_1, \dots, a_k \in V$ ($k \geq d$) について $a_i = \sum_{j=1}^d a_{ij} e_j$ であるとする。多重線型性、反対称性より

$$a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq d} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_k} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \dots & a_{2j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{kj_1} & a_{kj_2} & \dots & a_{kj_k} \end{vmatrix} e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \dots \vee e_{j_k}$$

となり、 $A \in \bigwedge^k(V)$ が $A = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k$ ($a_1, a_2, \dots, a_k \in V$) であるとき A を *extensor (of step k)* といい、以降これを $A = a_1 a_2 \dots a_k$ と略記する。

定義 2.7 (Corresponding linear subspace)

$A = a_1 a_2 \dots a_k$ を 0 でない step k の extensor とする。

$\overline{A}$ を $a_1, a_2, \dots, a_k$ を基底とする V の部分線形空間とする。

この時 $\overline{A}$ は $\overline{A} = \{\nu \in V : A \vee \nu = 0\}$ として extensor A により定まり、また A もスカラー倍を除いて $\overline{A}$ により定まるので、これらは一対一に対応する。

補題 2.8

extensor $A \vee B$ が 0 でないことと $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_j$ が相異なる一次独立なベクトルであることは同値

また、この時

$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{A \vee B} = \text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_j\}.$$

Proof. [2] 参照 □

注意 2.9

以降は対応 $e_1 e_2 \dots e_d \mapsto 1$ によって 1 次元ベクトル空間 $\bigwedge^d(V)$ を基礎体 $\mathbb{C}$ と同一視する。

これによりステップ d の extensor を d 個のベクトルによって構成される行列式として表すことができ、これを $[a_1, a_2, \dots, a_d] := a_1 a_2 \dots a_d$ と書く。

定義 2.10 (meet operation)

任意の extensor $A = a_1 a_2 \dots a_j, B = b_1 b_2 \dots b_k$ ($j + k \geq d$) の *meet* $A \wedge B$ を $\bigwedge^{j+k-d}(V)$ の元として

$$A \wedge B := \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) [a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(d-k)} \cdot b_1 \dots b_k] a_{\sigma(d-k+1)} \dots a_{\sigma(j)}$$

で定める。ここで総和 $\sum$ は $\{1, 2, \dots, j\}$ の置換 σ で $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(d-k)$ かつ $\sigma(d-k+1) < \sigma(d-k+2) < \dots < \sigma(j)$ となるものの総和とする。

この置換を $(d-k, j-(d-k))$ の *shuffles* という。

注意 2.11

任意の step j, k の extensor A, B について $j+k=d$ の時、注意 2.9 の同一視の下でスカラーとして

$$A \vee B = A \wedge B$$

となる。

以上で定めた 2 つの演算によって Grassmann-Cayley algebra を定義する。

定義 2.12 (Grassmann-Cayley algebra)

Grassmann-Cayley algebra とはベクトル空間 $\wedge(V)$ に 2 つの演算 $\vee, \wedge$ を定めた代数である。

また、meet については以下のことが言える。

定理 2.13

extensor A, B について

- (a) $A \wedge B = (-1)^{(d-k)(d-j)} B \wedge A$.
- (b) 2 つの extensor の meet は extensor.
- (c) $A \wedge B \neq 0 \iff \overline{A} + \overline{B} = V$.

この時 $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ すなわち、meet は線型部分空間の共通部分に対応する。

Proof. [2] 参照

□

以上のことから射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の点 a, b, c, d, e, f について以下のことが言える。

命題 2.14

$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{P}^2$ について

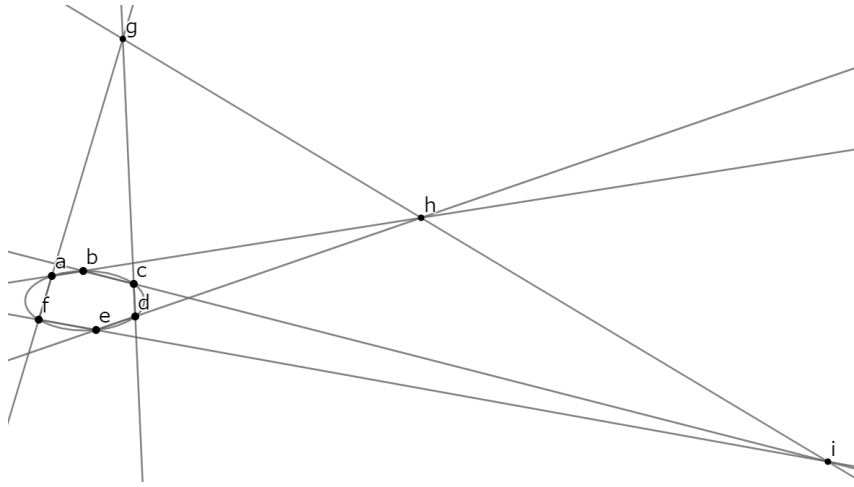
- (a) 直線 $\overline{ab}$ は step2 の extensor $(a \vee b)$ に対応する。
- (b) 直線 $\overline{ab}$ と $\overline{cd}$ の交点は step1 の extensor $(a \vee b) \wedge (c \vee d)$ に対応する。 $(\overline{ab}$ と $\overline{cd}$ は相異なる直線とする)
- (c) 3 直線 $\overline{ab}, \overline{cd}, \overline{ef}$ が一点で交わることは $(a \vee b) \wedge (c \vee d) \wedge (e \vee f) = 0$ は同値。
- (d) 3 点 a, b, c が同一直線上にあることは $a \vee b \vee c = 0$ と同値。

3 Grassmann-Cayley algebra を用いた定理の証明

Grassmann-Cayley algebra を用いて実際に以下の定理を証明する。

定理 3.1 (パスカルの定理 (難波, [4]))

$\mathbb{P}^2$ の二次曲線上の 6 点 a, b, c, d, e, f について $\overline{af}$ と $\overline{cd}$ の交点を g 、 $\overline{ab}$ と $\overline{ed}$ の交点を h 、 $\overline{bc}$ と $\overline{ef}$ の交点を i とすると g, h, i は同一直線上にある。



この定理は代数的方法、射影幾何的方法、さらにユークリッド幾何的証明を行ったのちそれを射影する等様々な方法で証明されているが [4]、Grassmann-Cayley algebra を用いて証明することでこの定理がアルゴリズムを用いた自動証明が可能であることが示される。

Proof. ” g, h, i が同一直線上にある”という条件を Grassmann-Cayley algebra を用いて表すと、 $(af \wedge cd) \vee (ab \wedge ed) \vee (bc \wedge ef) = 0$ となり左辺を展開すると、

$$\begin{aligned}
 (af \wedge cd) \vee (ab \wedge ed) \vee (bc \wedge ef) &= ([acd]f - [fcd]a) \vee ([aed]b - [bed]a) \\
 &\quad \vee ([bef]c - [cef]b) \\
 &= [acd][aed][bef][fbc] - [acd][aed][cef][fbb] \\
 &\quad - [acd][bed][bef][fac] + [acd][bed][cef][fab] \\
 &\quad - [fcd][aed][bef][abc] + [fcd][aed][cef][abb] \\
 &\quad + [fcd][bed][bef][aac] - [fcd][bed][cef][aab] \\
 &= -[acd][ade][bef][bcf] + [acd][bde][bef][acf] \\
 &\quad - [acd][bde][cef][abf] + [cdf][ade][bef][abc]
 \end{aligned}$$

となる。さらに行列式を展開すると、

$$\begin{aligned}
& -[acd][ade][bef][bcf] + [acd][bde][bef][acf] \\
& -[acd][bde][cef][abf] + [cdf][ade][bef][abc] \\
& = -a_1^2 b_1 b_2 c_2^2 d_1 d_3 e_2 e_3 f_3^2 + a_1 a_2 b_1^2 c_2^2 d_1 d_3 e_2 e_3 f_3^2 \cdots (720 \text{ terms}) \quad (3.1.1)
\end{aligned}$$

が得られ、これを 6 点 a, b, c, d, e, f が二次曲線 F 上にあることを表す 6 式

$$\begin{aligned}
u_{200}a_1^2 + u_{020}a_2^2 + u_{002}a_3^2 + u_{110}a_1a_2 + u_{101}a_1a_3 + u_{011}a_2a_3 &= 0, \\
u_{200}b_1^2 + u_{020}b_2^2 + u_{002}b_3^2 + u_{110}b_1b_2 + u_{101}b_1b_3 + u_{011}b_2b_3 &= 0, \\
u_{200}c_1^2 + u_{020}c_2^2 + u_{002}c_3^2 + u_{110}c_1c_2 + u_{101}c_1c_3 + u_{011}c_2c_3 &= 0, \\
u_{200}d_1^2 + u_{020}d_2^2 + u_{002}d_3^2 + u_{110}d_1d_2 + u_{101}d_1d_3 + u_{011}d_2d_3 &= 0, \\
u_{200}e_1^2 + u_{020}e_2^2 + u_{002}e_3^2 + u_{110}e_1e_2 + u_{101}e_1e_3 + u_{011}e_2e_3 &= 0, \\
u_{200}f_1^2 + u_{020}f_2^2 + u_{002}f_3^2 + u_{110}f_1f_2 + u_{101}f_1f_3 + u_{011}f_2f_3 &= 0
\end{aligned}$$

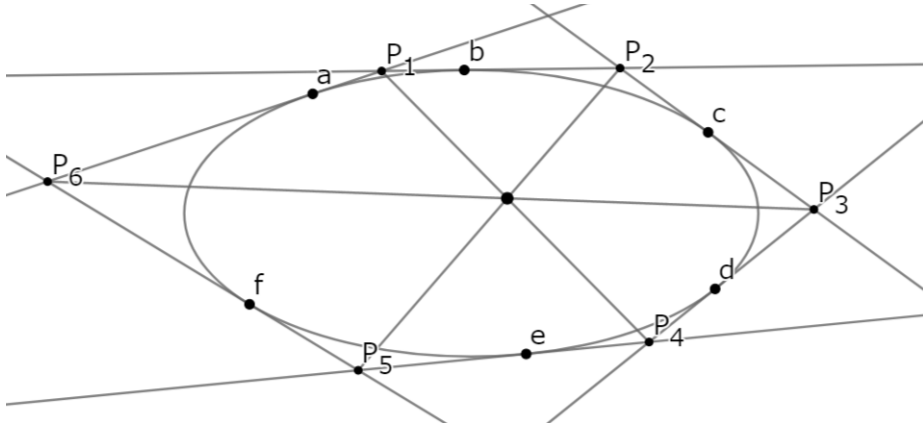
で生成されるイデアルのグレブナー基底で割ると余りは 0 になる。

よって 6 点 a, b, c, d, e, f が二次曲線 F 上にあるとき $\overline{af}$ と $\overline{cd}$ の交点、 $\overline{ab}$ と $\overline{ed}$ の交点、 $\overline{bc}$ と $\overline{ef}$ の交点は一直線上にある。 $\square$

次の定理はパスカルの定理の双対定理として知られており、これについても同様に Grassmann-Cayley algebra による証明を与える。

定理 3.2 (ブリアンションの定理 (難波, [4]))

$\mathbb{P}^2$ の二次曲線上の 6 点での接線で構成される六角形を $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ とすると直線 $\overline{P_1P_4}, \overline{P_2P_5}, \overline{P_3P_6}$ は一点で交わる。



Proof. 二次曲線を $F = u_{200}x^2 + u_{020}y^2 + u_{002}z^2 + u_{110}xy + u_{101}xz + u_{011}yz$ とし、六角形を構成する接線の接点をそれぞれ a, b, c, d, e, f ($a = (a_1, a_2, a_3, \dots, f = f_1, f_2, f_3)$)

とすると点 P_1 は

a での接線

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a)x + \frac{\partial F}{\partial y}(a)y + \frac{\partial F}{\partial z}(a)z = 0$$

と b での接線

$$\frac{\partial F}{\partial x}(b)x + \frac{\partial F}{\partial y}(b)y + \frac{\partial F}{\partial z}(b)z = 0$$

の交点であるので $\frac{\partial F}{\partial x}(a) \neq 0$ ($\because P_1 \neq 0$) として整理すると

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{\partial F}{\partial z}(a) \frac{\partial F}{\partial y}(b) - \frac{\partial F}{\partial y}(a) \frac{\partial F}{\partial z}(b), \frac{\partial F}{\partial x}(a) \frac{\partial F}{\partial z}(b) - \frac{\partial F}{\partial z}(a) \frac{\partial F}{\partial x}(b), \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial F}{\partial y}(a) \frac{\partial F}{\partial x}(b) - \frac{\partial F}{\partial x}(a) \frac{\partial F}{\partial y}(b) \right) \\ &= ((2u_{002}a_3 + u_{101}a_1 + u_{011}a_2)(2u_{020}b_2 + u_{110}b_1 + u_{011}b_3) \\ &\quad - (2u_{020}a_2 + u_{110}a_1 + u_{011}a_3)(2u_{002}b_3 + u_{101}b_1 + u_{011}b_2), \\ &\quad (2u_{200}a_1 + u_{110}a_2 + u_{101}a_3)(2u_{002}b_3 + u_{101}b_1 + u_{011}b_2) \\ &\quad - (2u_{002}a_3 + u_{101}a_1 + u_{011}a_2)(2u_{200}b_1 + u_{110}b_2 + u_{101}b_3), \\ &\quad (2u_{020}a_2 + u_{110}a_1 + u_{011}a_3)(2u_{200}b_1 + u_{110}b_2 + u_{101}b_3) \\ &\quad - (2u_{200}a_1 + u_{110}a_2 + u_{101}a_3)(2u_{020}b_2 + u_{110}b_1 + u_{011}b_3)). \end{aligned}$$

同様にして $P_2, \dots, P_6$ も a, b, c, d, e, f によって表される。

ここで”直線 $\overline{P_1P_4}, \overline{P_2P_5}, \overline{P_3P_6}$ が一点で交わる”という条件は Grassmann-Cayley algebra において $P_1P_4 \wedge P_2P_5 \wedge P_3P_6 = 0$ と表され、この左辺を meet の定義によって展開すると前節で述べた同一視の下で

$$\begin{aligned} (P_1P_4 \wedge P_2P_5) \wedge P_3P_6 &= ([P_1P_2P_5]P_4 - [P_4P_2P_5]P_1) \wedge P_3P_6 \\ &= [P_1P_2P_5][P_4P_3P_6] - [P_4P_2P_5][P_1P_3P_6] \\ &= [P_1P_3P_6][P_2P_4P_5] - [P_1P_2P_5][P_3P_4P_6]. \end{aligned}$$

これに a, b, c, d, e, f で表した $P_1, \dots, P_6$ の座標を代入し、行列式を展開すると

$$\begin{aligned} &[P_1P_3P_6][P_2P_4P_5] - [P_1P_2P_5][P_3P_4P_6] \\ &= 4096u_{200}^4u_{020}^4u_{002}^4a_1^2b_1b_2c_2^2d_1d_3e_2e_3f_3^2 - \dots (46080 \text{ terms}) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

が得られこれを前定理の証明と同じグレブナー基底で割ると余りは 0 となる。

よって 6 点 a, b, c, d, e, f が二次曲線 F 上にあるときそれらの接線で構成される六角形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ について直線 $\overline{P_1P_4}, \overline{P_2P_5}, \overline{P_3P_6}$ は一点で交わる。 $\square$

さらにパスカルの定理については射影平面上の 6 点 $a, b, \dots, f$ がパスカルの定理の条件を満たすことと 6 点を通る二次曲線が存在することが同値であることも以下のようにして示される。

Proof. (B. Sturmfels, [2])

6 式

$$\begin{aligned} u_{200}a_1^2 + u_{020}a_2^2 + u_{002}a_3^2 + u_{110}a_1a_2 + u_{101}a_1a_3 + u_{011}a_2a_3 &= 0, \\ u_{200}b_1^2 + u_{020}b_2^2 + u_{002}b_3^2 + u_{110}b_1b_2 + u_{101}b_1b_3 + u_{011}b_2b_3 &= 0, \\ u_{200}c_1^2 + u_{020}c_2^2 + u_{002}c_3^2 + u_{110}c_1c_2 + u_{101}c_1c_3 + u_{011}c_2c_3 &= 0, \\ u_{200}d_1^2 + u_{020}d_2^2 + u_{002}d_3^2 + u_{110}d_1d_2 + u_{101}d_1d_3 + u_{011}d_2d_3 &= 0, \\ u_{200}e_1^2 + u_{020}e_2^2 + u_{002}e_3^2 + u_{110}e_1e_2 + u_{101}e_1e_3 + u_{011}e_2e_3 &= 0, \\ u_{200}f_1^2 + u_{020}f_2^2 + u_{002}f_3^2 + u_{110}f_1f_2 + u_{101}f_1f_3 + u_{011}f_2f_3 &= 0 \end{aligned}$$

について $(u_{200}, u_{020}, u_{002}, u_{110}, u_{101}, u_{011}) \neq 0$ である必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & a_2a_3 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_1b_2 & b_1b_3 & b_2b_3 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_1c_2 & c_1c_3 & c_2c_3 \\ d_1^2 & d_2^2 & d_3^2 & d_1d_2 & d_1d_3 & d_2d_3 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 & e_1e_2 & e_1e_3 & e_2e_3 \\ f_1^2 & f_2^2 & f_3^2 & f_1f_2 & f_1f_3 & f_2f_3 \end{vmatrix} = 0$$

でありこの行列式を展開すると (3.2.1) と一致する為、パスカルの定理の逆も成り立つ。 $\square$

4 パスカルの定理とブリアンションの定理の条件の同値性

Grassmann-Cayley algebra を用いてパスカルの定理とブリアンションの定理の幾何的条件の同値性を証明する。

まず、事実として双対性よりパスカルの定理とブリアンションの定理は幾何命題として同値であることが知られている。

定理 4.1 (難波, [4])

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の非退化な二次曲線においてパスカルの定理とブリアンションの定理は幾何命題として同値。

これについて Grassmann-Cayley algebra を用いることで以下のことが言える。

定理 4.2

C を射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の非退化な二次曲線、 P, B を方程式 $P = 0, B = 0$ によりパスカルの定理、ブリアンションの定理の結論を表す Grassmann-Cayley algebra の式とするこのとき、 C のヘッシアンを A とすると、

$$B = A^4 P$$

となり、方程式 $P = 0$ と $B = 0$ は同値である。

Proof. 前節で得られたブリアンションの定理の条件式 (3.2.1) をパスカルの定理の条件式

(3.1.1) で割ると、(3.2.1)= B 、(3.1.1)= P として

$$\begin{aligned}
B = & (4096u_{200}^4u_{020}^4u_{002}^4 - 4096u_{200}^4u_{020}^3u_{002}^3u_{011}^2 + 1536u_{200}^4u_{020}^2u_{002}^2u_{011}^4 \\
& - 256u_{200}^4u_{020}u_{002}u_{011}^6 + 16u_{200}^4u_{011}^8 - 4096u_{200}^3u_{020}^4u_{002}^3u_{101}^2 \\
& - 4096u_{200}^3u_{020}^3u_{002}^4u_{110}^2 + 4096u_{200}^3u_{020}^3u_{002}^3u_{110}u_{101}u_{011} \\
& + 3072u_{200}^3u_{020}^3u_{002}^2u_{101}^2u_{011}^2 + 3072u_{200}^3u_{020}^2u_{002}^3u_{110}^2u_{011}^2 \\
& - 3072u_{200}^3u_{020}^2u_{002}^2u_{110}u_{101}u_{011}^3 - 768u_{200}^3u_{020}^2u_{002}^2u_{101}^2u_{011}^4 \\
& - 768u_{200}^3u_{020}u_{002}^2u_{110}^4u_{011} + 768u_{200}^3u_{020}u_{002}u_{110}u_{101}u_{011}^5 \\
& + 64u_{200}^3u_{020}u_{101}^2u_{011}^6 + 64u_{200}^3u_{002}^2u_{110}^6u_{011} - 64u_{200}^3u_{110}u_{101}u_{011}^7 \\
& + 1536u_{200}^2u_{020}^4u_{002}^2u_{101}^4 + 3072u_{200}^2u_{020}^3u_{002}^3u_{110}^2u_{101}^2 \\
& - 3072u_{200}^2u_{020}^3u_{002}^2u_{110}u_{101}^3u_{011} - 768u_{200}^2u_{020}^3u_{002}^4u_{101}^2u_{011}^2 \\
& + 1536u_{200}^2u_{020}^2u_{002}^4u_{110}^4 - 3072u_{200}^2u_{020}^2u_{002}^3u_{110}^3u_{101}u_{011} \\
& + 1536u_{200}^2u_{020}^2u_{002}u_{110}u_{101}^3u_{011}^3 + 96u_{200}^2u_{020}^2u_{101}^4u_{011}^4 \\
& - 768u_{200}^2u_{020}u_{002}^3u_{110}^4u_{011}^2 + 1536u_{200}^2u_{020}u_{002}^3u_{110}^3u_{101}u_{011}^3 \\
& - 576u_{200}^2u_{020}u_{002}^2u_{110}^2u_{101}^2u_{011}^4 - 192u_{200}^2u_{020}u_{110}u_{101}^3u_{011}^5 \\
& + 96u_{200}^2u_{002}^2u_{110}^4u_{011}^4 - 192u_{200}^2u_{002}^3u_{110}^3u_{101}u_{011}^5 + 96u_{200}^2u_{110}^2u_{101}^2u_{011}^6 \\
& - 256u_{200}u_{020}^4u_{002}u_{101}^6 - 768u_{200}u_{020}^3u_{002}^2u_{110}^2u_{101}^4 \\
& + 768u_{200}u_{020}^3u_{002}u_{110}u_{101}^5u_{011} + 64u_{200}u_{020}^3u_{101}^6u_{011}^2 \\
& - 768u_{200}u_{020}^2u_{002}^3u_{110}^4u_{101}^2 + 1536u_{200}u_{020}^2u_{002}^2u_{110}^3u_{101}^3u_{011} \\
& - 576u_{200}u_{020}^2u_{002}^2u_{110}^4u_{101}^2u_{011}^2 - 192u_{200}u_{020}^2u_{110}u_{101}^5u_{011}^3 \\
& - 256u_{200}u_{020}u_{002}^4u_{110}^6 + 768u_{200}u_{020}u_{002}^3u_{110}^5u_{101}u_{011} \\
& - 576u_{200}u_{020}u_{002}^2u_{110}^4u_{101}^2u_{011}^2 - 128u_{200}u_{020}u_{002}u_{110}^3u_{101}^3u_{011}^3 \\
& + 192u_{200}u_{020}u_{110}^2u_{101}^4u_{011}^4 + 64u_{200}u_{002}^3u_{110}^6u_{011}^2 \\
& - 192u_{200}u_{002}^2u_{110}^5u_{101}u_{011}^3d + 192u_{200}u_{002}u_{110}^4u_{101}^2u_{011}^4 \\
& - 64u_{200}u_{110}^3u_{101}^3u_{011}^5 + 16u_{020}^4u_{101}^8 + 64u_{020}^3u_{002}u_{110}^2u_{101}^6 \\
& - 64u_{020}^3u_{110}u_{101}^7u_{011} + 96u_{020}^2u_{002}^2u_{110}^4u_{101}^4 \\
& - 192u_{020}^2u_{002}u_{110}^3u_{101}^5u_{011} + 96u_{020}^2u_{110}^2u_{101}^6u_{011}^2 \\
& + 64u_{020}u_{002}^3u_{110}^6u_{101}^2 - 192u_{020}u_{002}^2u_{110}^5u_{101}^3u_{011} \\
& + 192u_{020}u_{002}u_{110}^4u_{101}^2u_{011}^2 - 64u_{020}u_{110}^3u_{101}^5u_{011}^3 + 16u_{002}^4u_{110}^8 \\
& - 64u_{002}^3u_{110}^7u_{101}u_{011} + 96u_{002}^2u_{110}^6u_{101}^2u_{011}^2 - 64u_{002}u_{110}^5u_{101}^3u_{011}^3 \\
& + 16u_{110}^4u_{101}^4u_{011}^4)P \\
= & 16(4u_{200}u_{020}u_{002} - u_{200}u_{011}^2 - u_{020}u_{101}^2 - u_{002}u_{110}^2 + u_{110}u_{101}u_{011})^4P
\end{aligned}$$

が得られる。よって $(4u_{200}u_{020}u_{002} - u_{200}u_{011}^2 - u_{020}u_{101}^2 - u_{002}u_{110}^2 + u_{110}u_{101}u_{011}) \neq 0$ であるとき $B = 0$ と $P = 0$ は同値である。

ここで係数 $(4u_{200}u_{020}u_{002} - u_{200}u_{011}^2 - u_{020}u_{101}^2 - u_{002}u_{110}^2 + u_{110}u_{101}u_{011})$ について

$$2(4u_{200}u_{020}u_{002} - u_{200}u_{011}^2 - u_{020}u_{101}^2 - u_{002}u_{110}^2 + u_{110}u_{101}u_{011}) \\ = \begin{vmatrix} 2u_{200} & u_{110} & u_{101} \\ u_{110} & 2u_{020} & u_{011} \\ u_{101} & u_{011} & 2u_{002} \end{vmatrix}$$

となり二次曲線のヘッシアンと一致する。よって二次曲線が非退化な時これは 0 ではなく、パスカルの定理とブリアンションの定理の同値性が保たれる。 $\square$

以上の議論により Grassmann-Cayley algebra を用いてパスカルの定理とブリアンションの定理の幾何的条件の同値性が示されただけでなく、それらの幾何的条件を表す Grassmann-Cayley algebra の式 $(af \wedge cd) \vee (ab \wedge ed) \vee (bc \wedge ef)$ と $(P_1 \vee P_4) \wedge (P_2 \vee P_5) \wedge (P_3 \vee P_6)$ は多項式として二次曲線 C のヘッシアンの累乗倍であることが分かった。

5 Grassmann-Cayley algebra における射影平面上の双対原理

ここまで射影平面上の双対定理としてパスカルの定理とブリアンションの定理について考察してきた。本節ではより一般的に射影平面上の二次曲線に関する双対原理を Grassmann-Cayley algebra により書き直す。

定義 5.1 (極・極線)

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の任意の点 $\bar{v} \in \mathbb{P}^2$ ($v \in \mathbb{C}^3$)、 $\mathbb{P}^2$ 上の任意の非退化二次曲線 C について $C = u_{200}x^2 + u_{020}y^2 + u_{002}z^2 + u_{110}xy + u_{101}xz + u_{011}yz$ とすると斉次関数としての C の偏微分により $\mathbb{C}^3$ 上の双線型形式

$$[\cdot, \cdot] : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}; [\mathbf{v}, \mathbf{w}] = \frac{\partial C}{\partial x}(\mathbf{v})w_1 + \frac{\partial C}{\partial y}(\mathbf{v})w_2 + \frac{\partial C}{\partial z}(\mathbf{v})w_3 \\ (\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3))$$

が定まる。

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}(\mathbf{v}) = 2u_{200}v_1 + u_{110}v_2 + u_{101}v_3, \frac{\partial C}{\partial y}(\mathbf{v}) = 2u_{020}v_2 + u_{110}v_1 + u_{011}v_3, \right. \\ \left. \frac{\partial C}{\partial z}(\mathbf{v}) = 2u_{002}v_3 + u_{101}v_1 + u_{011}v_2 \right)$$

またこれにより双対空間への線形写像

$$\phi_{[\cdot, \cdot]} : \mathbb{C}^3 \rightarrow \check{\mathbb{C}}^3; \phi_{[\cdot, \cdot]}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\partial C}{\partial x}(\mathbf{v}), \frac{\partial C}{\partial y}(\mathbf{v}), \frac{\partial C}{\partial z}(\mathbf{v}) \right)$$

が得られる。これは C が非退化であるため $\check{\mathbb{C}}^3$ への同型写像である。

よって、誘導される射影変換を

$$\Phi_{[\cdot, \cdot]} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \check{\mathbb{P}}^2 ; \Phi_{[\cdot, \cdot]}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\partial C}{\partial x}(\mathbf{v}) : \frac{\partial C}{\partial y}(\mathbf{v}) : \frac{\partial C}{\partial z}(\mathbf{v}) \right)$$

とする。

ここで、 $\mathbb{P}^2$ の点に対して $\bar{\mathbf{v}}$ の像に対応する直線 $\Phi_{[\cdot, \cdot]}(\bar{\mathbf{v}})^*$ を C における点 $\bar{\mathbf{v}}$ の極線といい、また $\mathbb{P}^2$ の直線 L に対して、 $\Phi_{[\cdot, \cdot]}^{-1}(L^*) \in \mathbb{P}^2$ を C における直線 L の極という。

定理 5.2 (射影平面における二次曲線に関する双対原理 (難波, [4]))

射影平面上の既約二次曲線と、いくつかの点と直線に関する命題において点と直線を極と極線の対応に従い入れ替えて得られる命題を双対命題といい、これは元の命題が真であるとき真である。

これは、言い換えれば $\mathbb{P}^2$ の点と直線による命題について対応する $\check{\mathbb{P}}^2$ の元を考え、それらによる命題を得るというものである。

よって、双対原理の Grassmann-Cayley algebra における言い換えを得るためには、Grassmann-Cayley algebra の方程式で表された $\mathbb{P}^2$ 上の幾何命題についても式に現れる元とそれらの間の演算が $\check{\mathbb{P}}^2$ においてはどのように対応しているのかを考えればよい。

定理 5.3

$\mathbb{P}^2$ 上の Grassmann-Cayley algebra において任意の extensor A, B の meet 及び join

$$A \vee B, A \wedge B$$

は $\check{\mathbb{P}}^2$ 上の Grassmann-Cayley algebra において

$$A^* \wedge B^*, A^* \vee B^*.$$

ここで、 A^*, B^* は A, B に対応する $\mathbb{P}^2$ の点もしくは直線の極線、極を $\check{\mathbb{P}}^2$ 上の Grassmann-Cayley algebra における extensor として表したものとする。

Proof. A, B の step を (i, j) として場合分けを考える。

$(i, j) = (1, 2)$ もしくは $(i, j) = (2, 1)$ の時は注意 2.9 より $A \vee B, A \wedge B$ 及び $A^* \wedge B^*, A^* \vee B^*$ は全てスカラーとして等しくなるのでよい。

次に $(i, j) = (1, 1)$ の場合、つまり 2 つの点の join が対応する 2 つの極線の meet に対応することを示す。

2 つの点を $\mathbf{a} = (a_1 : a_2 : a_3), \mathbf{b} = (b_1 : b_2 : b_3)$ とする。このとき、対応する極線は非退

化二次曲線を C とすると $\mathbb{P}^2$ の直線として

$$\Phi_{[\cdot, \cdot]}(\mathbf{a})^* = \frac{\partial C}{\partial x}(\mathbf{a})x + \frac{\partial C}{\partial y}(\mathbf{a})y + \frac{\partial C}{\partial z}(\mathbf{a})z, \Phi_{[\cdot, \cdot]}(\mathbf{b})^* = \frac{\partial C}{\partial x}(\mathbf{b})x + \frac{\partial C}{\partial y}(\mathbf{b})y + \frac{\partial C}{\partial z}(\mathbf{b})z$$

となる。

ここで、この 2 直線を step 2 の extensor としてみると定理 2.12(c) より 2 直線の meet は共通部分、つまり交点に対応する。さらに、部分線形空間の対応の一意性よりこれは交点を P とすると step 1 の extensor a と等しい。

また、この交点の座標は $C = u_{200}x^2 + u_{020}y^2 + u_{002}z^2 + u_{110}xy + u_{101}xz + u_{011}yz$ とすると

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\partial C}{\partial z}(a) \frac{\partial C}{\partial y}(b) - \frac{\partial C}{\partial y}(a) \frac{\partial C}{\partial z}(b), \frac{\partial C}{\partial x}(a) \frac{\partial C}{\partial z}(b) - \frac{\partial C}{\partial z}(a) \frac{\partial C}{\partial x}(b), \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial C}{\partial y}(a) \frac{\partial C}{\partial x}(b) - \frac{\partial C}{\partial x}(a) \frac{\partial C}{\partial y}(b) \right) \\ &= ((2u_{002}a_3 + u_{101}a_1 + u_{011}a_2)(2u_{020}b_2 + u_{110}b_1 + u_{011}b_3) \\ &\quad - (2u_{020}a_2 + u_{110}a_1 + u_{011}a_3)(2u_{002}b_3 + u_{101}b_1 + u_{011}b_2), \\ &\quad (2u_{200}a_1 + u_{110}a_2 + u_{101}a_3)(2u_{002}b_3 + u_{101}b_1 + u_{011}b_2) \\ &\quad - (2u_{002}a_3 + u_{101}a_1 + u_{011}a_2)(2u_{200}b_1 + u_{110}b_2 + u_{101}b_3), \\ &\quad (2u_{020}a_2 + u_{110}a_1 + u_{011}a_3)(2u_{200}b_1 + u_{110}b_2 + u_{101}b_3) \\ &\quad - (2u_{200}a_1 + u_{110}a_2 + u_{101}a_3)(2u_{020}b_2 + u_{110}b_1 + u_{011}b_3)) \end{aligned}$$

として得られ、この極に対する極線は $\mathbb{P}^2$ の直線として

$$\Phi_{[\cdot, \cdot]}(P)^* = \frac{\partial C}{\partial x}(P)x + \frac{\partial C}{\partial y}(P)y + \frac{\partial C}{\partial z}(P)z.$$

ここに $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \Phi_{[\cdot, \cdot]}(P)^*(\mathbf{a}) &= \frac{\partial C}{\partial x}(P)a_1 + \frac{\partial C}{\partial y}(P)a_2 + \frac{\partial C}{\partial z}(P)a_3 \\ &= 0, \\ \Phi_{[\cdot, \cdot]}(P)^*(\mathbf{b}) &= \frac{\partial C}{\partial x}(P)b_1 + \frac{\partial C}{\partial y}(P)b_2 + \frac{\partial C}{\partial z}(P)b_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるのでこれは直線 $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$.

最後に、 $(i, j) = (2, 2)$ の場合は $\mathbb{P}^2 = \check{\mathbb{P}}^2$ より $\check{\mathbb{P}}^2$ 上の Grassmann-Cayley algebra について $(i, j) = (1, 1)$ の場合を考えれば同様に示せる。 $\square$

よって、双対原理を Grassmann-Cayley algebra を用いて書き直すと以下のようになる。

定理 5.4 (Grassmann-Cayley algebra 版射影平面上の双対原理)

射影平面上の二次曲線に関する双対原理において、命題が Grassmann-Cayley algebra の方程式として表されているとする。

この時、方程式に現れる点と直線を極線と極に入れ替え、さらに全ての join と meet を入れ替えることで双対命題となる方程式が得られる。

この定理より前節で述べたパスカルの定理とブリアンションの定理の幾何的条件が Grassmann-Cayley algebra での式として双対に対応していると言える。

系 5.5 (パスカルの定理とブリアンションの定理の幾何的条件の双対性)

Grassmann-Cayley algebra における式としてパスカルの定理の条件式

$$(af \wedge cd) \vee (ab \wedge ed) \vee (bc \wedge ef) = 0$$

とブリアンションの定理の条件式

$$(P_1 \vee P_4) \wedge (P_2 \vee P_5) \wedge (P_3 \vee P_6) = 0$$

は双対。

謝辞

本研究において日頃より丁寧な指導をしていただき、論文の構成、まとめ方や発表についてもご助言、ご指導いただきました楫元教授に深く感謝いたします。

また、楫研究室、永井研究室所属の皆様には論文やスライドの作成、発表について様々なアドバイスをいただきました。深く感謝いたします。

参考文献

- [1] D.Cox, J.Little and D.O'Shea. Ideals, Varieties and Algorithms, Springer-Verlag International Switzerland 2015.
- [2] B. Sturmfels, Algorithms in Invariant Theory, Springer-Verlag/Wien, New York 2008.
- [3] W. H. Greub. Multilinear algebra. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics 1967.
- [4] 難波誠, 改定新版 代数曲線の幾何学, 現代数学社, 2018.