

Kemper のアルゴリズムと非線形な群作用の不変式環の計算

数学応用数理専攻修士 2 年 楫研究室所属 5118A018-6 大槻隼也

2020 年 2 月 7 日

概要

不変式環の生成元を具体的に求めることは Emmy Norther による研究以降さまざまに行われていた．今までに不変式環の生成元が決定されている例は，群の作用が線形なものであった．今回新たに，2 通りの非線形な作用に関して，不変式環の生成元を決定することができた．また線形な作用に関する不変式環の生成元の個数に関する上限をあたえている Noether's degree bound について非線形な場合に対して示した．

記号 1. 2 つの多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m]$ の間の $\mathbb{C}$ 代数準同型 ϕ は，各変数 $x_1, \dots, x_n$ についての ϕ での値となる多項式 $f_1 = \phi(x_1), \dots, f_n = \phi(x_n) \in \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m]$ から定まる．このような準同型を

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] &\longrightarrow \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m] \\ \phi(x_1, \dots, x_n) &= (f_1, \dots, f_n)\end{aligned}$$

というようにあらわす．

定理 2. 巡回群 $C_2 = \langle \tau \mid \tau^2 = 1 \rangle$ の多項式環 $\mathbb{C}[a, b, x, y]$ への次のような非線形な作用 [L.Moser-Jauslin93] を考える．

$$\begin{aligned}C_2 &\longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[a, b, x, y]). \\ \tau: \mathbb{C}[a, b, x, y] &\longrightarrow \mathbb{C}[a, b, x, y]. \\ \tau(a, b, x, y) &= (b, a, -b^3x + (1 + ab + (ab)^2)y, (1 - ab)x + a^3y).\end{aligned}$$

この不変式環は次のようになる．

$$\mathbb{C}[a, b, x, y]^{C_2} = \mathbb{C}[a + b, ab, f_1, f_2^2, (a - b)f_2].$$

ここで，多項式 f_1, f_2 は次のようなものである．

$$\begin{aligned}f_1 &= (2 - a - b - ab + a^2b + b^2 - b^3)x \\ &\quad + (2 - a + a^2 + a^3 - a^4 - b + ab - a^2b + a^2b^2)y. \\ f_2 &= (1 - a + 2b + a^2b - 2ab^2 + b^3)x \\ &\quad + (-1 - 2a - a^4 + b - ab + 2a^3b - a^2b^2)y.\end{aligned}$$

定理 3. 対称群 $S_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = 1, \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^2\tau \rangle$ の多項式環 $\mathbb{C}[a, b, x, y]$ への次のような線型化不可能な作用 [Freudentburg, L.Moser-Jauslin02] を考える．

$$\begin{aligned}S_3 &\longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[a, b, x, y]). \\ \sigma, \tau: \mathbb{C}[a, b, x, y] &\longrightarrow \mathbb{C}[a, b, x, y]. \\ \sigma(a, b, x, y) &= (\omega a, \omega^2 b, x, y). \\ \tau(a, b, x, y) &= (b, a, -b^3x + (1 + ab + (ab)^2)y, (1 - ab)x + a^3y).\end{aligned}$$

ここで， ω は 1 の原始 3 乗根の 1 つである．この不変式環は次のようになる．

$$\mathbb{C}[a, b, x, y]^{S_3} = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_9].$$

ここで, 多項式 $f_1, \dots, f_9$ は次のようなものである.

$$\begin{aligned} f_1 &= a^3y - abx + x + y. \\ f_2 &= a^2b^2y + aby - b^3x + x + y. \\ f_3 &= a^3y^2 - abxy + xy. \\ f_4 &= a^2b^2xy + abxy - b^3x^2 + xy. \\ f_5 &= a^5b^2y^2 + a^4by^2 - 2a^3b^3xy + a^3y^2 + ab^4x^2 - b^3x^2 + 2xy. \\ f_6 &= a^3b^3y + a^3y - ab^4x + b^3x. \\ f_7 &= a^3x + a^2b^5y + ab^4y - b^6x + b^3y. \\ f_8 &= ab. \\ f_9 &= a^3 + b^3. \end{aligned}$$

線形な群作用に関する不変式環については, 不変式環の生成元の個数に関する上限が次のようにあたえられている.

事実 4. (Noether's degree bound : [Sturmfels08]) 有限群 G が多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ に線型に作用しているとする. 自然数 N を次のように定める.

$$N = \inf\{s \mid \text{ある不変式 } f_1, \dots, f_s \text{ について } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_s]\}.$$

これは不変式環を生成するために必要な不変式の最小個数である. このとき次の不等式が成り立つ.

$$N \leq \binom{n + |G|}{|G|}.$$

定理 3 の計算を一般の有限群の作用に対して行うことで, Noether's degree bound の一般化を行うことができた.

定理 5. (Noether's degree bound の一般化) 有限群 G が多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ に作用しているとする. 自然数 N を次のように定める.

$$N = \inf\{s \mid \text{ある不変式 } f_1, \dots, f_s \text{ について } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_s]\}.$$

これは不変式環を生成するために必要な不変式の最小個数である. このとき次の不等式が成り立つ.

$$N \leq \binom{(n+1)|G|}{|G|}.$$

参考文献

- [橋本] MH 橋本光靖, 不変式環の環論的性質, https://mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp08_files/hashimoto.pdf
- [村 18] 村彩乃, 正多面体群による三変数多項式環の不変式環について, 早稲田大学大学院基幹理工学研究科修士論文, 2018.
- [L.Moser-Jauslin93] L. Moser-Jauslin, Triviality of certain equivariant vector bundles for finite cyclic groups, C.R. Acad. Sci, 317(1993), 139-144.
- [Freudentburg, L.Moser-Jauslin02] G. Freudentburg, L. Moser-Jauslin, A nonlinearizable action of S_3 on $\mathbb{C}^4$, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 52, 1(2002), 133-143.
- [Kemper16] Gregor Kemper, Using Extended Derksen Ideals in Computational Invariant Theory, Journal of Symbolic Computation, vol.72(2016), 161-181.
- [Sturmfels08] B. Sturmfels, Algorithms in Invariant Theory, Springer-Verlag/Wien, New York, 2008.
- [向井 08] 向井茂, モジュライ理論 1, 岩波書店, 2008.