

Kemper のアルゴリズムと 非線形な群作用の不変式環の計算

大槻 隼也

数学応用数理専攻修士 2 年
楫研究室

2020 年 2 月 7 日

有限群と不変式環の周辺

基礎体 k については複素数体 $k = \mathbb{C}$.

先行研究

- G : 線型簡約代数群, R : 有限生成 $\mathbb{C}$ 代数, $G \curvearrowright R \implies R^G$: 有限生成
- 生成元をあたえる/生成元の個数 $\leftarrow$ 有限群の線形な作用.

私の方針

- **非線形な**有限群の作用について不変式環を求める.

Notation

定義 群作用

G : 群.

$G \curvearrowright \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$: 作用 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 群準同型 $G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n])$.

記号

G : 群, $G \curvearrowright \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$: 作用.

不変式環 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid \sigma(f) = f (\forall \sigma \in G)\}.$

$\mathbb{C}$ 代数準同型 $\phi: \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \mathbb{C}[y_1, \dots, y_m].$

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = (f_1, \dots, f_m). \quad (\phi(x_i) = f_i)$$

定義

以下では G : 有限群 とする.

線型な群作用

作用 $G \curvearrowright \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$: **線型** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \sigma \in G, \sigma(x_i)$: 斉次 1 次多項式.

線型化可能な群作用 ($\rightsquigarrow$ 主定理 1)

作用 $G \curvearrowright \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$: **線型化可能**
 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists P \in \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]), P^{-1}GP \curvearrowright \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$: 線型.

線型化不可能な群作用 ($\rightsquigarrow$ 主定理 2)

作用 $G \curvearrowright \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$: **線型化不可能** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 線型化可能ではない.

線型な群作用の具体例

文字の置換による作用 $S_3 \curvearrowright \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$.

$$S_3 = \langle \sigma = (123), \tau = (12) \rangle.$$

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1).$$

$$\tau(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3).$$

このとき

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]^{S_3} = \mathbb{C}[s_1, s_2, s_3].$$

ここで s_1, s_2, s_3 は基本対称式である.

$$s_1 = x_1 + x_2 + x_3, s_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1, s_3 = x_1x_2x_3.$$

線型な群作用

- $\mathbb{C}$ ベクトル空間 V に対して, 有限群 G の表現を考える.
⇒ $\mathbb{C}[V]$ への作用が線型な群作用をあたえる.
- $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G$ が次数付き $\mathbb{C}$ 代数になる.
⇒ Noether's degree bound / 不変式環の計算アルゴリズムがある.

本研究では singular ver4.1.2 にて finvar.lib を用いて線型な作用に関する不変式環を計算した.

非線型な群作用

以下のタイプの問題が考えられている.

Thm. ([Freudentburg, L.Moser-Jauslin02])

次の作用 $S_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = 1, \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^2\tau \rangle \curvearrowright \mathbb{C}[a, b, x, y]$.

$$S_3 \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[a, b, x, y]).$$

$$\sigma, \tau: \mathbb{C}[a, b, x, y] \longrightarrow \mathbb{C}[a, b, x, y].$$

$$\sigma(a, b, x, y) = (\omega a, \omega^2 b, x, y).$$

$$\tau(a, b, x, y) = (b, a, -b^3x + (1 + ab + (ab)^2)y, (1 - ab)x + a^3y).$$

ここで, ω は 1 の原始 3 乗根の 1 つである.

この作用は線型化不可能な作用である.

また $C_2 = \langle \tau \rangle \subset S_3 = \langle \sigma, \tau \rangle$ による部分表現を主定理 1 で考える.

主結果

主定理 1

次の作用 ([L.Moser-Jauslin93]) $C_2 = \langle \tau \mid \tau^2 = 1 \rangle \curvearrowright \mathbb{C}[a, b, x, y]$.

$$C_2 \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[a, b, x, y]).$$

$$\tau: \mathbb{C}[a, b, x, y] \longrightarrow \mathbb{C}[a, b, x, y].$$

$$\tau(a, b, x, y) = (b, a, -b^3x + (1 + ab + (ab)^2)y, (1 - ab)x + a^3y).$$

この不変式環は次のようになる.

$$\mathbb{C}[a, b, x, y]^{C_2} = \mathbb{C}[a + b, ab, f_1, f_2^2, (a - b)f_2].$$

$$\begin{aligned} f_1 &= (2 - a - b - ab + a^2b + b^2 - b^3)x \\ &\quad + (2 - a + a^2 + a^3 - a^4 - b + ab - a^2b + a^2b^2)y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= (1 - a + 2b + a^2b - 2ab^2 + b^3)x \\ &\quad + (-1 - 2a - a^4 + b - ab + 2a^3b - a^2b^2)y. \end{aligned}$$

主結果

主定理 2

次の作用 ([Freudentburg, L.Moser-Jauslin02])

$$S_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = 1, \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^2\tau \rangle \curvearrowright \mathbb{C}[a, b, x, y].$$

$$S_3 \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[a, b, x, y]).$$

$$\sigma, \tau: \mathbb{C}[a, b, x, y] \longrightarrow \mathbb{C}[a, b, x, y].$$

$$\sigma(a, b, x, y) = (\omega a, \omega^2 b, x, y).$$

$$\tau(a, b, x, y) = (b, a, -b^3x + (1 + ab + (ab)^2)y, (1 - ab)x + a^3y).$$

ここで, ω は 1 の原始 3 乗根の 1 つである.

この不変式環は次のようになる.

主結果

主定理 2

この不変式環は次のようになる.

$$\mathbb{C}[a, b, x, y]^{S_3} = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_9].$$

$$f_1 = a^3y - abx + x + y.$$

$$f_2 = a^2b^2y + aby - b^3x + x + y.$$

$$f_3 = a^3y^2 - abxy + xy.$$

$$f_4 = a^2b^2xy + abxy - b^3x^2 + xy.$$

$$f_5 = a^5b^2y^2 + a^4by^2 - 2a^3b^3xy + a^3y^2 + ab^4x^2 - b^3x^2 + 2xy.$$

$$f_6 = a^3b^3y + a^3y - ab^4x + b^3x.$$

$$f_7 = a^3x + a^2b^5y + ab^4y - b^6x + b^3y.$$

$$f_8 = ab.$$

$$f_9 = a^3 + b^3.$$

主定理 3

Thm.(Noether's degree bound:B.Sturmfels, [Sturmfels08])

G : 有限群, $G \curvearrowright \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$: 線型な作用. 自然数 N を次のように定める.

$$N = \inf \{s \mid \exists f_1, \dots, f_s: \text{不変式}, \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_s]\}.$$

このとき

$$N \leq \binom{n + |G|}{|G|}.$$

主結果

主定理 3 (Noether's degree bound の一般化)

G : 有限群, $G \curvearrowright \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$: 作用. 自然数 N を次のように定める.

$$N = \inf \{s \mid \exists f_1, \dots, f_s: \text{不変式}, \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_s]\}.$$

このとき

$$N \leq \binom{(n+1)|G|}{|G|}.$$

主結果

主定理 1

次の作用 ([L.Moser-Jauslin93]) $C_2 = \langle \tau \mid \tau^2 = 1 \rangle \curvearrowright \mathbb{C}[a, b, x, y]$.

$$C_2 \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[a, b, x, y]).$$

$$\tau: \mathbb{C}[a, b, x, y] \longrightarrow \mathbb{C}[a, b, x, y].$$

$$\tau(a, b, x, y) = (b, a, -b^3x + (1 + ab + (ab)^2)y, (1 - ab)x + a^3y).$$

この不変式環は次のようになる.

$$\mathbb{C}[a, b, x, y]^{C_2} = \mathbb{C}[a + b, ab, f_1, f_2^2, (a - b)f_2].$$

$$\begin{aligned} f_1 &= (2 - a - b - ab + a^2b + b^2 - b^3)x \\ &\quad + (2 - a + a^2 + a^3 - a^4 - b + ab - a^2b + a^2b^2)y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= (1 - a + 2b + a^2b - 2ab^2 + b^3)x \\ &\quad + (-1 - 2a - a^4 + b - ab + 2a^3b - a^2b^2)y. \end{aligned}$$

主定理 1

Lemma.

G : 有限群, $G \curvearrowright \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$: 作用, $P \in \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n])$.
共役な群の作用に関する不変式環が

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{P^{-1}GP} = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_s]$$

ならば

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G = \mathbb{C}[P(f_1), \dots, P(f_s)].$$

(証明)

これは $P(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{P^{-1}GP}) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G$ から従う. $\square$

主定理 1

Thm.([L.Moser-Jauslin93])

多項式環 $\mathbb{C}[a, b, x, y]$ の自己同型 P を次のように定める.

$$P: \mathbb{C}[a, b, x, y] \longrightarrow \mathbb{C}[a, b, x, y].$$

$$P(a, b, x, y) = (a, b, f_1, f_2).$$

$$f_1 = (2 - a - b - ab + a^2b + b^2 - b^3)x.$$

$$+ (2 - a + a^2 + a^3 - a^4 - b + ab - a^2b + a^2b^2)y.$$

$$f_2 = (1 - a + 2b + a^2b - 2ab^2 + b^3)x$$

$$+ (-1 - 2a - a^4 + b - ab + 2a^3b - a^2b^2)y.$$

この P によって $C_2 \curvearrowright \mathbb{C}[a, b, x, y]$ は線型化可能である.

主定理 1

(主定理 1 の証明) 共役な群の作用は

$$\begin{aligned}P^{-1}C_2P &\longrightarrow \operatorname{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[a, b, x, y]) \\P^{-1}\tau P &: \mathbb{C}[a, b, x, y] \longrightarrow \mathbb{C}[a, b, x, y] \\P^{-1}\tau P(a, b, x, y) &= (b, a, x, -y)\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[a, b, x, y]^{P^{-1}C_2P} &= \mathbb{C}[a + b, ab, x, y^2, (a - b)y] \\ \mathbb{C}[a, b, x, y]^{C_2} &= \mathbb{C}[P(a + b), P(ab), P(x), P(y^2), P((a - b)y)].\end{aligned}$$

主結果

主定理 2

次の作用 ([Freudentburg, L.Moser-Jauslin02])

$$S_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = 1, \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^2\tau \rangle \curvearrowright \mathbb{C}[a, b, x, y].$$

$$S_3 \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[a, b, x, y]).$$

$$\sigma, \tau: \mathbb{C}[a, b, x, y] \longrightarrow \mathbb{C}[a, b, x, y].$$

$$\sigma(a, b, x, y) = (\omega a, \omega^2 b, x, y).$$

$$\tau(a, b, x, y) = (b, a, -b^3x + (1 + ab + (ab)^2)y, (1 - ab)x + a^3y).$$

ここで, ω は 1 の原始 3 乗根の 1 つである.

この不変式環は次のようになる.

主定理 2

(主定理 2 の証明) 次の線型な作用

$S_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = 1, \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^2\tau \rangle \curvearrowright \mathbb{C}[A, B, X, Y, Z, W]$ に関する不変式環を計算する.

$$S_3 \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[A, B, X, Y, Z, W]).$$

$$\sigma, \tau: \mathbb{C}[A, B, X, Y, Z, W] \longrightarrow \mathbb{C}[A, B, X, Y, Z, W].$$

$$\sigma(A, B, X, Y, Z, W) = (\omega A, \omega^2 B, X, Y, Z, W).$$

$$\tau(A, B, X, Y, Z, W) = (B, A, Z, W, X, Y).$$

主定理 2

この不変式環は次のようになる.

$$\mathbb{C}[A, B, X, Y, Z, W]^{S_3} = \mathbb{C}[F_1, \dots, F_9].$$

$$F_1 = Y + W.$$

$$F_2 = X + Z.$$

$$F_3 = YW.$$

$$F_4 = XZ.$$

$$F_5 = XY + ZW.$$

$$F_6 = A^3Y + B^3W.$$

$$F_7 = A^3X + B^3Z.$$

$$F_8 = AB.$$

$$F_9 = A^3 + B^3.$$

主定理 2

多項式 $p_1, p_2 \in \mathbb{C}[a, b, x, y]$ を定義する.

$$p_1 = -b^3x + (1 + ab + (ab)^2)y.$$

$$p_2 = (1 - ab)x + a^3y.$$

次の多項式環の間の全射 $\mathbb{C}$ 代数準同型を考える.

$$\varphi: \mathbb{C}[A, B, X, Y, Z, W] \longrightarrow \mathbb{C}[a, b, x, y].$$

$$\varphi(A, B, X, Y, Z, W) = (a, b, x, y, p_1, p_2).$$

主定理 2

これは S_3 準同型なので, 不変式環の間に誘導される写像

$$\varphi: \mathbb{C}[A, B, X, Y, Z, W]^{S_3} \longrightarrow \mathbb{C}[a, b, x, y]^{S_3}$$

は再び全射である [向井 08]. なので求める不変式環は

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[a, b, x, y]^{S_3} &= \varphi(\mathbb{C}[A, B, X, Y, Z, W]^{S_3}) \\ &= \varphi(\mathbb{C}[F_1, \dots, F_9]) = \mathbb{C}[\varphi(F_1), \dots, \varphi(F_9)]\end{aligned}$$

と計算できる.

主結果

主定理 3 (Noether's degree bound の一般化)

G : 有限群, $G \curvearrowright \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$: 作用. 自然数 N を次のように定める.

$$N = \inf \{s \mid \exists f_1, \dots, f_s: \text{不変式}, \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_s]\}.$$

このとき

$$N \leq \binom{(n+1)|G|}{|G|}.$$

これは $G \hookrightarrow GL(\mathbb{C})$ で置換行列として表現することに対応している.

この結果について

- 一般の作用の bound をより小さくしていく.
- 線型な場合の bound と一致するかしないかを判定する.

参考文献

- [橋本] MH 橋本光靖, 不変式環の環論的性質, https://mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp08_files/hashimoto.pdf
- [村 18] 村彩乃, 正多面体群による三変数多項式環の不変式環について, 早稲田大学大学院基幹理工学研究科修士論文, 2018.
- [L.Moser-Jauslin93] L. Moser-Jauslin, Triviality of certain equivariant vector bundles for finite cyclic groups, C.R. Acad. Sci, 317(1993), 139-144.
- [Freudenburg, L.Moser-Jauslin02] G. Freudenburg, L. Moser-Jauslin, A nonlinearizable action of S_3 on $\mathbb{C}^4$, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 52, 1(2002), 133-143.
- [Kemper16] Gregor Kemper, Using Extended Derksen Ideals in Computational Invariant Theory, Journal of Symbolic Computation, vol.72(2016), 161-181.
- [Sturmfels08] B. Sturmfels, Algorithms in Invariant Theory, Springer-Verlag/Wien, New York, 2008.
- [向井 08] 向井茂, モジュライ理論 1, 岩波書店, 2008.