Kemper のアルゴリズムと非線型な群作用の不変式環の計算

早稲田大学大学院基幹理工学研究科
数学応用数理専攻修士 2 年

大槻隼也

学籍番号 5118A018-6
指導教員名　　楫　元

2020 年 2 月 3 日

1 Introduction

群 G の体 k 上の多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n]$ に対する k 代数としての作用に関する不変式環 $k[x_1, \ldots, x_n]^G$ は古くから調べられている．不変式環の研究については大きく分けると

方針 1 不変式環の k 代数としての生成元の性質について

方針 2 不変式環の環論的な性質について

のように分けられる [1]．以下, 本論文では基礎体 k が複素数体 $\mathbb{C}$ であるとする．不変式環の生成元についての基本的な結果として, 群 G が線型簡約代数群ならば, 不変式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$ は $\mathbb{C}$ 代数として有限生成であるということがわかっている．なので, 方針 1 の結果については線型簡約代数群の場合に不変式環の生成元がどのような性質をもつかということが調べられている．一方 2 の結果については, 例えば不変式環の Cohen-Macaulay 性などが特殊な場合に示されている．

方針 1 に関する問題の 1 つに, 不変式環の生成元を具体的に求めるというものがある．この問題については, 有限群 G が多項式環に線型に作用している場合には多くの結果が知られている．特に, 不変式環の生成元の個数に関する上限があたえられていることと, 具体的に不変式環の生成元を計算するための効率的なアルゴリズムがあたえられており, そのアルゴリズムに基づいていくつかの不変式環の生成元が具体的に決定されていること [2] が顕著な結果である．しかしながら作用が非線型な場合の不変式環については, 具体的な性質についてほとんど知られていない．

非線型な有限群の作用については, どのような作用が構成されるかが問題として扱われている．しばしば仮定されていた作用の線型性がみたされないような群作用の場合 [3] では不変式環の生成元が知られていなかった．本論文ではその生成元をはじめて具体的に決定した．また最近の結果として, 特に整数論的な背景か (特に整数係数の多項式環に対して), 線型簡約ではない場合において不変式環を計算することを目的として, 一般的な群作用に関する不変式環の生成元を計算するためのアルゴリズムが Kemper によってあたえられた [5]．本論文ではこのアルゴリズムを用いて有限群の作用に関する不変式環を求めようと試みた．結果として, Kemper のアルゴリズムは線型な群作用に限定したとしても簡易化できないことを示した．また, アドホックな計算方法で線型化不可能な群作用 [4] の不変式環をはじめて決定した．また [4] の不変式環の計算方法を修正することで, 今までに知られていなかった, 非線型な場合での不変式環の生成元の個数に関する上限をはじめてあたえた．

2 準備

この節では本論文を通して必要な定義・定理をまとめる. また本論文でよく扱う多項式環の間の $\mathbb{C}$ 代数準同型の記法について説明する.

記号 2.1. 2 つの多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n], \mathbb{C}]y_1, \ldots, y_m]$ の間の $\mathbb{C}$ 代数準同型 ϕ は, 各変数 $x_1, \ldots, x_n$ についての ϕ での値となる多項式

$$f_1 = \phi(x_1), \ldots, f_n = \phi(x_n) \in \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]$$

から定まる. このような準同型を

$$\begin{aligned} \phi \colon \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] &\longrightarrow \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n] \\ \phi(x_1, \ldots, x_n) &= (f_1, \ldots, f_n) \end{aligned}$$

というようにあらわす.

定義 2.2. 有限群 G の $\mathbb{C}$ 代数 R への $\mathbb{C}$ 代数としての作用とは, 群準同型 $G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(R)$ のことである.

定義 2.3. 有限群 G の多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ への $\mathbb{C}$ 代数としての作用について, この作用が**線型な作用**であるとは, 任意の元 $\sigma \in G$ に対して, 付随する多項式環の自己同型

$$\begin{aligned} \sigma \colon \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] &\longrightarrow \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \\ \sigma(x_1, \ldots, x_n) &= (f_1, \ldots, f_n) \end{aligned}$$

について, 多項式 $f_1, \ldots f_n$ が全て斉次 1 次多項式であるということである. また, この作用が**非線型な作用**であるとは, 線型な作用ではないということである.

定義 2.4. (G. Freudenburg and L. Moser-Jauslin, [4]) 有限群 G の多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ への $\mathbb{C}$ 代数としての作用について, この作用が**線型化可能な作用**であるとは, 多項式環の自己同型 ϕ で, ϕ による共役な群の作用 $\phi^{-1}G\phi \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n])$ が線型な作用になるようなものが存在するということである. また, この作用が**線型化不可能な作用**であるとは, 線型化可能な作用ではないということである.

明らかな例として, 線型な作用は線型化可能な作用である. これは条件の自己同型として恒等写像を考えればよい. また, 線型化不可能な作用の具体例はいくつか知られていて, 例えば G. Freudenburg, L. Moser-Jauslin らによる [4] がある.

定義 2.5. (向井, [7]) 代数群 G が **線型簡約代数群** であるとは, 任意の G 表現 V, W とその間の全射 G 準同型 $\phi\colon V \to W$ に対して, それぞれの不変部分に誘導される G 準同型 $V^G \to W^G$ が全射であるということである.

定理 2.6. (向井, [7]) 有限群 G は線型簡約代数群である.

Proof. [7] による. □

線型な群作用に関する不変式環については, 不変式環の生成元の個数に関する上限が次のようにあたえられている.

定理 2.7. (Noether's degree bound : B. Sturmfels, [6]) 有限群 G が多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ に線型に作用しているとする. 自然数 N を次のように定める.

$$N = \inf\{s \mid \text{ある不変式 } f_1, \ldots, f_s \text{ について } \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_s]\}.$$

これは不変式環を生成するために必要な不変式の最小個数である. このとき次の不等式が成り立つ.

$$N \leq \binom{n + |G|}{n}.$$

Proof. [6] による. □

3 Kemper のアルゴリズム

この節では Kemper のアルゴリズム [5] に基づいて, 本論文で考察したアルゴリズムについて説明する. まず群作用のグラフのイデアルに対応する Derksen イデアルを定義する.

定義 3.1. (Kemper, [5]) 有限群 G が多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ に作用しているとする. すると商体である有理関数体 $L = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ に対しても自然に群 G が作用する. このとき, 次の多項式環 $L[y_1, \ldots, y_n]$ のイデアル

$$D = \bigcap_{\sigma \in G} (y_1 - \sigma(f_1), \ldots, y_n - \sigma(f_n)) \subset L[y_1, \ldots, y_n]$$

を **Derksen イデアル**という.

例 3.2. 対称群 $S_3 = \langle (123), (12) \rangle$ が多項式環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ に文字の置換として作用する場合を考える. この作用は線型な作用である. 具体的には次のような作用である.

$$
\begin{gathered}
S_3 \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]). \\
(123),(12)\colon \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] \longrightarrow \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]. \\
(123)(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1). \\
(12)(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3).
\end{gathered}
$$

この場合の Derksen イデアルは次のようになる.

$$D = (f_1, f_2, f_3).$$

ここで, 多項式 f_1, f_2, f_3 は次のようなものである.

$f_1 = y_3^3 + (-x_1 - x_2 - x_3)y_3^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)y_3 + (-x_1x_2x_3).$
$f_2 = y_2^2 + y_2y_3 + (-x_1 - x_2 - x_3)y_2 + y_3^2 + (-x_1 - x_2 - x_3)y_3 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3).$
$f_3 = y_1 + y_2 + y_3 + (-x_1 - x_2 - x_3).$

次に Kemper のアルゴリズムについて説明する. アルゴリズムは 2 つの Step に分かれ, 大まかな流れとしては次のようにまとめることができる.

Input　群作用 $G \curvearrowright \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.
Step1 Output　局所環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G_\alpha$の生成元.
Step2 Output　不変式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$の生成元.

■Step1　考えている作用についての Derksen イデアルの生成元を計算する. これは体 $L = K(x_1, \ldots, x_n)$ 係数の多項式環 $L[y_1, \ldots, y_n]$ のイデアルなので, 単項式順序を 1 つ固定して reduced gröebner basis $\mathcal{G}$ を計算することができる. reduced gröebner basis $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ は有限個の多項式からなるので, それらを具体的に

$$g_i = \sum q^{(i)}_{j_1,\ldots,j_n} y_1^{j_1}, \ldots, y_n^{j_n} \ (q^{(i)}_{j_1,\ldots,j_n} \in L)$$

と表したとき, 係数全体を $A = \{q^{(i)}_{j_1,\ldots,j_n}\}$ とおく. $L = \mathrm{Frac}(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n])$ なので, A の共通分母 $\beta \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ を 1 つ固定し, $\alpha = \prod_{\sigma \in G} \sigma(\beta) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$ とおくと,

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G_\alpha = \mathbb{C}[A]_\alpha = \mathbb{C}[\{q^{(i)}_{j_1,\ldots,j_n}\}]_\alpha$$

と計算することができる. 以上の計算をまとめると, 次のアルゴリズムになる.

Input　群の作用 $G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n])$.
Output　$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G_\alpha = \mathbb{C}[A]_\alpha$ をみたす有限集合 $A \subset L^G$ と $\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$.

(1)　Derksen イデアル D の reduced gröebner basis $\mathcal{G}$ を計算する.

(2)　不変式 $\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$ を計算する.

■Step2　アルゴリズムについてまとめる. Input に必要な対象は Step1 から計算することができる.

Input　Step1 で存在がわかっている次の対象.

- 有限生成部分 $\mathbb{C}$ 代数 $B \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ の生成元である多項式 $g_1, \ldots, g_k \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.
- $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G_\alpha = B_\alpha$ をみたすような不変式 $\alpha \in B^G$.

Output　不変式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$ の生成元.

(1)　カウンター m を $m = k$ でセットする.

(2)　変数を増やした多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m]$ の次のイデアル $\widehat{N}$ を計算する.

$$\widehat{N} = (z_1 - g_1, \ldots, z_m - g_m) \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m].$$

(3)　$\alpha \in B^G$ なので多項式 $G \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_m]$ で $G(g_1, \ldots, g_m) = \alpha$ をみたすものを計算する.

(4)　イデアル $\widehat{M} = \widehat{N} + (G) \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m]$ を計算する.

(5)　イデアル $\widehat{N}, \widehat{M}$ の変数 $x_1, \ldots, x_n$ に関する消去イデアル $J, M \subset \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_m]$ を計算する. これは次のようなものである.

$$J = \widehat{N} \cap \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_m].$$
$$M = \widehat{M} \cap \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_m].$$

またイデアル $N = J + (G)$ を計算する.

(6)　停止性判定. 適当な多項式順序を固定する. M のグレブナー基底の多項式それぞれを N のグレブナー基底で割り算をする. M のグレブナー基底がすべて割り切れるとき, アルゴリズムは停止し, $g_1, \ldots, g_m$ を Output とする.

(7)　N のグレブナー基底の多項式それぞれの M のグレブナー基底での割り算のあまりを $i = 1, \ldots, r$ に対して h_i とおく. 割り算を行うことで次のような性質をみたす多項式 $g_{m+i} \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ を計算する.

$$G(g_1, \ldots, g_m) * g_{m+i} = h_i(g_1, \ldots, g_m).$$

このとき, これらの多項式を加えた $\{g_1, \ldots, g_m, g_{m+1}, \ldots, g_{m+r}\}$ に対して, カウンターを $m = m + r$ に更新して (2) に戻る.

また Kemper の論文 [5] において, 不変式体の計算方法もあたえられている.

定理 3.3. (Kemper, [5]) 上のような状況において $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)^G = \mathbb{C}(A)$.

Proof. [5] による. □

以下では得られた結果について説明する. 線型な作用に関するもの・線型化可能な非線型な作用に関するもの・線型化不可能な作用に関するものの 3 つに分けて説明をする. このうちで, 1 つ目の結果は Kemper のアルゴリズムに関するものである.

4 Kemper のアルゴリズムは簡易化できない

例 4.1. 対称群 S_3 が多項式環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ に文字の置換として作用する場合 (例 3.2) を考える. この場合の Derksen イデアルはすでに示しているが, Kemper のアルゴリズム Step1 の Output について

$$A = \{-x_1 - x_2 - x_3, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, -x_1x_2x_3\}$$

となる. この場合には Kemper のアルゴリズム Step1 の Output で求められる不変式 $\alpha \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]^{S_3}$ は $\alpha = 1$ となる. したがって, 不変式環は Step1 の段階で

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]^{S_3} = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_1^{S_3} = \mathbb{C}[x_1 + x_2 + x_3, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, x_1x_2x_3]$$

と計算することができる.

Kemper の論文 [5] で計算されている具体例についても, 有限群 G が多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ に線型に作用している場合には, アルゴリズム Step1 において求められる Output の不変式 $\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$ として $\alpha = 1$ を取ることができる. したがって, 次のような Kemper のアルゴリズムの簡易化を予想した.

予想 4.2. 有限群 G が 多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ に線型に作用しているとする. このとき Kemper のアルゴリズム Step1 の Output における不変式 $\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$ は $\alpha = 1$ となる.

このことについては, 正多面体群の 3 変数多項式環への自然な線型な作用 [2] が反例をあたえていることがわかった. この作用に関する不変式環は村 [2] によってすでに計算されている.

定理 4.3. (村, [2]) 正四面体群 $A_4 = \{\sigma_1 = e, \sigma_2, \ldots, \sigma_{12}\}$ の多項式環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ への次のような線型な作用を考える.

$$
\begin{aligned}
&A_4 \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]).\\
\sigma_1, \ldots, \sigma_{12} \colon &\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] \longrightarrow \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3].\\
&\sigma_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3).\\
&\sigma_2(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, -x_3, x_1).\\
&\sigma_3(x_1, x_2, x_3) = (x_3, -x_1, -x_2).\\
&\sigma_4(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_3, -x_1).\\
&\sigma_5(x_1, x_2, x_3) = (-x_3, -x_1, x_2).\\
&\sigma_6(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1, x_2).\\
&\sigma_7(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1).\\
&\sigma_8(x_1, x_2, x_3) = (-x_3, x_1, -x_2).\\
&\sigma_9(x_1, x_2, x_3) = (x_2, -x_3, -x_1).\\
&\sigma_{10}(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, x_3).\\
&\sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_2, -x_3).\\
&\sigma_{12}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, -x_3).
\end{aligned}
$$

この作用に関する不変式環は

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3] = \mathbb{C}[F_1, F_2, F_3, F_4]$$

である. ここで, 多項式 F_1, F_2, F_3, F_4 は次のようなものである.

$$
\begin{aligned}
F_1 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.\\
F_2 &= x_1 x_2 x_3.\\
F_3 &= x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2.\\
F_4 &= x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_3^4 + x_2^4 x_3^2.
\end{aligned}
$$

Proof. [2] による. □

この作用に関する Derksen イデアルを計算すると, 予想 4.2 が成り立たないことがわかる.

定理 4.4. この場合の Derksen イデアルは次のようなものになる.

$$D = (f_1, f_2, f_3).$$

ここで, 多項式 f_1, f_2, f_3 は次のようなものである.

$$
\begin{aligned}
f_1 &= y_3^6 + (-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)y_3^4 + (x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2)y_3^2 + (-x_1^2x_2^2x_3^2). \\
f_2 &= y_2^2 + \frac{(x_1^4 - x_1^2x_2^2 - x_1^2x_3^2 + x_2^4 - x_2^2x_3^2 + x_3^4)}{(x_1^4x_2^2 - x_1^4x_3^2 - x_1^2x_2^4 + x_1^2x_3^4 + x_2^4x_3^2 - x_2^2x_3^4)}y_3^4 \\
&\quad + \frac{(-x_1^6 + x_1^4x_2^2 + x_1^2x_3^4 - x_2^6 + x_2^4x_3^2 - x_3^6)}{(x_1^4x_2^2 - x_1^4x_3^2 - x_1^2x_2^4 + x_1^2x_3^4 + x_2^4x_3^2 - x_2^2x_3^4)}y_3^2 \\
&\quad + \frac{(x_1^6x_3^2 - x_1^4x_2^4 - x_1^4x_3^4 + x_1^2x_2^6 - x_2^4x_3^4 + x_2^2x_3^6)}{(x_1^4x_2^2 - x_1^4x_3^2 - x_1^2x_2^4 + x_1^2x_3^4 + x_2^4x_3^2 - x_2^2x_3^4)}. \\
f_3 &= y_1 + \frac{(-x_1^4 + x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 - x_2^4 + x_2^2x_3^2 - x_3^4)}{(x_1^5x_2^3x_3 - x_1^5x_2x_3^3 - x_1^3x_2^5x_3 + x_1^3x_2x_3^5 + x_1x_2^5x_3^3 - x_1x_2^3x_3^5)}y_2y_3^5 \\
&\quad + \frac{(x_1^6 - x_1^4x_3^2 - x_1^2x_2^4 + x_2^6 - x_2^2x_3^4 + x_3^6)}{(x_1^5x_2^3x_3 - x_1^5x_2x_3^3 - x_1^3x_2^5x_3 + x_1^3x_2x_3^5 + x_1x_2^5x_3^3 - x_1x_2^3x_3^5)}y_2y_3^3 \\
&\quad + \frac{(-x_1^6x_2^2 + x_1^4x_2^4 + x_1^4x_3^4 - x_1^2x_3^6 - x_2^6x_3^2 + x_2^4x_3^4)}{(x_1^5x_2^3x_3 - x_1^5x_2x_3^3 - x_1^3x_2^5x_3 + x_1^3x_2x_3^5 + x_1x_2^5x_3^3 - x_1x_2^3x_3^5)}y_2y_3.
\end{aligned}
$$

特に共通分母は必ず次数が正となり, 予想 4.2 は成り立たないことがわかる.

Proof. 実際の計算においては, 次のような singular でのイデアルの共通部分計算によって確かめることができる. □

プログラム 1: Derksen イデアルの計算

```
"singular version 4.1.2"
ring R=(0,x1,x2,x3),(y1,y2,y3),lp;
ideal I1=y1-x1,y2-x2,y3-x3;
ideal I2=y1+x1,y2+x2,y3-x3;
ideal I3=y1+x1,y2-x2,y3+x3;
ideal I4=y1-x1,y2+x2,y3+x3;
ideal I5=y1+x2,y2+x3,y3-x1;
ideal I6=y1-x3,y2+x1,y3+x2;
ideal I7=y1+x2,y2-x3,y3+x1;
ideal I8=y1+x3,y2+x1,y3-x2;
ideal I9=y1-x3,y2-x1,y3-x2;
ideal I10=y1-x2,y2-x3,y3-x1;
ideal I11=y1+x3,y2-x1,y3+x2;
ideal I12=y1-x2,y2+x3,y3+x1;
```

```
ideal I = groebner(intersect(I1,I2,I3,I4,I5,I6,I7,I8,I9,I10,I11,I12));
I;
```

5 線型化可能な非線型な作用の不変式環

この節では, 線型化可能な非線型な作用に関する不変式環の生成元についての結果を説明する. ある群の作用に関する不変式環の生成元と, 多項式環の自己同型による共役な群に関する不変式環の生成元の間には次の関係があることがわかった.

補題 5.1. 群 G の多項式環 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ への作用と多項式環の自己同型 ϕ に対して, 共役な群の作用に関する不変式環が

$$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\phi^{-1}G\phi}=\mathbb{C}[f_1,\ldots,f_s]$$

と表示できたとき, もとの群の作用に関する不変式環は

$$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{G}=\mathbb{C}[\phi(f_1),\ldots,\phi(f_s)]$$

のようにかける.

Proof. 任意の多項式 $f\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\phi^{-1}G\phi}$ について, 群の元 $\sigma\in G$ による作用を考える. 多項式の取り方から $\phi^{-1}\sigma\phi(f)=f$ であるから, $\sigma(\phi(f))=\phi(\phi^{-1}\sigma\phi(f))=\phi(f)$ となる. よって $\phi(\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\phi^{-1}G\phi})\subset\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{G}$ ということがわかる.

逆に任意の多項式 $f\in\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{G}$ について, 共役な群の元 $\phi^{-1}\sigma\phi\in\phi^{-1}G\phi$ による作用を考える. 多項式の取り方から $\sigma(f)=f$ であるから, $\phi^{-1}\sigma\phi(\phi^{-1}(f))=\phi^{-1}\sigma(f)=\phi^{-1}(f)$ となる. よって $\phi^{-1}(\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{G})\subset\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\phi^{-1}G\phi}$ がなりたつということがわかる. これらを合わせると, 2 つの不変式環の関係として $\phi(\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{\phi^{-1}G\phi})=\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{G}$ ということがわかる. ϕ が多項式環の自己同型であることに注意すれば, 示したかった不変式環の生成元の間の関係が得られる. □

この補題は, 不変式環を計算する際には, 考える群作用を自己同型による共役な群の作用に取り替えても良いということを示している. この補題を用いて, 線型化可能な非線型な作用の不変式環を決定することができた.

定理 5.2. 巡回群 $C_2=\langle\tau\mid\tau^2=1\rangle$ の多項式環 $\mathbb{C}[a,b,x,y]$ への次のような非線型な作用 [3] を考える.

$$C_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[a,b,x,y]).$$
$$\tau\colon \mathbb{C}[a,b,x,y] \longrightarrow \mathbb{C}[a,b,x,y].$$
$$\tau(a,b,x,y) = (b,a,-b^3x+(1+ab+(ab)^2)y,(1-ab)x+a^3y).$$

この不変式環は次のようになっている.

$$\mathbb{C}[a,b,x,y]^{C_2} = \mathbb{C}[a+b,ab,f_1,f_2^2,(a-b)f_2].$$

ここで, 多項式 f_1, f_2 は次のようなものである.

$$\begin{aligned}
f_1 &= (2-a-b-ab+a^2b+b^2-b^3)x \\
&\quad + (2-a+a^2+a^3-a^4-b+ab-a^2b+a^2b^2)y. \\
f_2 &= (1-a+2b+a^2b-2ab^2+b^3)x \\
&\quad + (-1-2a-a^4+b-ab+2a^3b-a^2b^2)y.
\end{aligned}$$

計算方法について詳しく説明する. この作用については L.Moser-Jauslin の [3] によって次のことがわかっている.

定理 5.3. (L.Moser-Jauslin, [3]) 多項式 $\mathbb{C}[a,b,x,y]$ の自己同型 P を

$$\begin{aligned}
&P\colon \mathbb{C}[a,b,x,y] \longrightarrow \mathbb{C}[a,b,x,y], \\
&\quad P(a,b,x,y) = (a,b,f_1,f_2), \\
&f_1 = (2-a-b-ab+a^2b+b^2-b^3)x \\
&\quad + (2-a+a^2+a^3-a^4-b+ab-a^2b+a^2b^2)y, \\
&f_2 = (1-a+2b+a^2b-2ab^2+b^3)x \\
&\quad + (-1-2a-a^4+b-ab+2a^3b-a^2b^2)y
\end{aligned}$$

と定義する. このとき, P^{-1} は

$$\begin{aligned}
&P^{-1}\colon \mathbb{C}[a,b,x,y] \longrightarrow \mathbb{C}[a,b,x,y], \\
&\quad P^{-1}(a,b,x,y) = (a,b,g_1,g_2), \\
&g_1 = -(-1-2a-a^4+b-ab+2a^3b-a^2b^2)x/4 \\
&\quad + (2-a+a^2+a^3-a^4-b+ab-a^2b+a^2b^2)y/4, \\
&g_2 = (1-a+2b+a^2b-2ab^2+b^3)x/4 \\
&\quad - (2-a-b-ab+a^2b+b^2-b^3)y/4
\end{aligned}$$

となる. この自己同型により定理 5.2 の非線型な作用は

$$
\begin{aligned}
&P^{-1}C_2P \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[a,b,x,y]),\\
&P^{-1}\tau P\colon \mathbb{C}[a,b,x,y] \longrightarrow \mathbb{C}[a,b,x,y],\\
&P^{-1}\tau P(a,b,x,y) = (b,a,x,-y)
\end{aligned}
$$

という共役な群による線型な作用に対応する．特に定理 5.2 の非線型な作用は線型化可能な作用である．

Proof. [3] による． □

Proof. (定理 5.2) この事実を用いて不変式環の生成元を計算する．共役な群による線型な作用に関する不変式環の計算は singular を用いて次のように計算することができる．

プログラム 2: 線型な作用に関する不変式環の計算

```
"singular version 4.1.2"
LIB "finvar.lib";
ring R = 0,(a,b,x,y),lp;
matrix e[4][4]=
1,0,0,0,
0,1,0,0,
0,0,1,0,
0,0,0,1;
matrix a[4][4]=
0,1,0,0,
1,0,0,0,
0,0,1,0,
0,0,0,-1;
matrix REY,M = reynolds_molien(e,a);
matrix P = primary_char0(REY,M);
list L = primary_invariants(e,a);
matrix S,IS = secondary_char0(L[1..3],1);
print(P);
print(IS);
```

この計算結果として, 共役な群の不変式環 $\mathbb{C}[a,b,x,y]^{P^{-1}C_2P}$ は

$$\mathbb{C}[a,b,x,y]^{P^{-1}C_2P} = \mathbb{C}[a+b, ab, x, y^2, (a-b)y]$$

となることがわかる．したがって求めていた不変式環は補題 5.1 から計算することができる．具体的には

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}[a,b,x,y]^{C_2} &= \mathbb{C}[P(a+b), P(ab), P(x), P(y^2), P((a-b)y)] \\
&= \mathbb{C}[a+b, ab, f_1, f_2^2, (a-b)f_2]
\end{aligned}
$$

となることがわかった. □

定理 5.2 から線型化可能な作用に関する不変式環の生成元を求める問題は, 多項式環の自己同型 ϕ で, ϕ による共役な群の作用が線型になるようなものを求めることができれば, すでによくわかっている有限群の多項式環への線型な作用に関する不変式環の生成元の計算問題へと帰着できることがわかった.

6 線型化不可能な作用の不変式環

次に, 線型化不可能な作用の場合の結果について説明する. 線型化不可能な作用の場合は前節の議論を用いることができない.

定理 6.1. 対称群 $S_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = 1, \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma\tau^2 \rangle$ の多項式環 $\mathbb{C}[a,b,x,y]$ への次のような線型化不可能な作用 [4] を考える.

$$
\begin{aligned}
S_3 &\longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[a,b,x,y]). \\
\sigma, \tau \colon \mathbb{C}[a,b,x,y] &\longrightarrow \mathbb{C}[a,b,x,y]. \\
\sigma(a,b,x,y) &= (\omega a, \omega^2 b, x, y). \\
\tau(a,b,x,y) &= (b, a, -b^3 x + (1 + ab + (ab)^2)y, (1-ab)x + a^3 y).
\end{aligned}
$$

ここで, ω は 1 の原始 3 乗根の 1 つである. このとき, 不変式体は次のようになる.

$$
\mathbb{C}(a,b,x,y)^{S_3} = \mathbb{C}(q_1, \ldots, q_8).
$$

ここで, 有理式 $q_1, \ldots, q_8$ は次のようなものである.

$$
\begin{aligned}
q_1 &= -a^3y + abx - x - y. \\
q_2 &= a^3y^2 - abxy + xy. \\
q_3 &= \frac{(-a^2b^2y - aby + b^3x + x - y)}{(a^3y - abx + x - y)}. \\
q_4 &= \frac{(-a^3xy + a^2b^2y^2 + abx^2 + aby^2 - b^3xy - x^2 + y^2)}{(a^3y - abx + x - y)}. \\
q_5 &= \frac{(-a^3 + b^3)}{(a^3y - abx + x - y)}. \\
q_6 &= \frac{(-a^3b^3y + a^3y + ab^4x - b^3x)}{(a^3y - abx + x - y)}. \\
q_7 &= \frac{(-a^6y + a^4bx - a^3x + b^3y)}{(a^5b^2y - a^3b^3x + a^2b^2x - a^2b^2y)}) \\
q_8 &= \frac{(a^3 - b^3)}{(a^5b^2y - a^3b^3x + a^2b^2x - a^2b^2y)}.
\end{aligned}
$$

Proof. まず Derksen イデアルを計算する. 以下の計算では簡単のために変数を変更して, $D \subset \mathbb{C}(a,b,x,y)[A,B,X,Y]$ という変数で計算を行なっている.

プログラム 3: Derksen イデアルの計算

```
"singular version 4.1.2"
ring R = (0,a,b,x,y),(A,B,X,Y,w),lp;
ideal Iw = w^2+w+1;
ideal I1 = A-a,B-b,X-x,Y-y;
ideal I2 = A-w*a,B-w^2*b,X-x,Y-y;
ideal I3 = A-w^2*a,B-w*b,X-x,Y-y;
ideal I4 = A-b,B-a,X-(-b^3*x+(1+ab+(ab)^2)*y), Y-((1-ab)*x+a^3*y);
ideal I5 = A-w^2*b,B-w*a,X-(-b^3*x+(1+ab+(ab)^2)*y), Y-((1-ab)*x+a
    ^3*y);
ideal I6 = A-w*b,B-w^2*a,X-(-b^3*x+(1+ab+(ab)^2)*y), Y-((1-ab)*x+a
    ^3*y);
ideal I = intersect(I1+Iw,I2+Iw,I3+Iw,I4+Iw,I5+Iw,I6+Iw);
ideal J = groebner(I);
```

計算結果から Derksen イデアルは次のようなものになる.

$$D = (g_1, g_2, g_3, g_4).$$

ここで多項式 $g_1, \ldots, g_4$ は次のようなものである.

$$g_1 = Y^2 + (-a^3y + abx - x - y)Y + (a^3y^2 - abxy + xy).$$
$$g_2 = X + \frac{(-a^2b^2y - aby + b^3x + x - y)}{(a^3y - abx + x - y)}Y + \frac{(-a^3xy + a^2b^2y^2 + abx^2 + aby^2 - b^3xy - x^2 + y^2)}{(a^3y - abx + x - y)}.$$
$$g_3 = B^3 + \frac{(-a^3 + b^3)}{(a^3y - abx + x - y)}Y + \frac{(-a^3b^3y + a^3y + ab^4x - b^3x)}{(a^3y - abx + x - y)}.$$
$$g_4 = A + \frac{(a^3 - b^3)}{(a^5b^2y - a^3b^3x + a^2b^2x - a^2b^2y)}B^2Y + \frac{(-a^6y + a^4bx - a^3x + b^3y)}{(a^5b^2y - a^3b^3x + a^2b^2x - a^2b^2y)}B^2.$$

このとき, Kemper のアルゴリズム Step1 の Output における A は

$$A = \{q_1, \ldots, q_8\}$$

となる. ここで, 有理式 $q_1, \ldots, q_8$ は次のようになる.

$$q_1 = -a^3y + abx - x - y.$$
$$q_2 = a^3y^2 - abxy + xy.$$
$$q_3 = \frac{(-a^2b^2y - aby + b^3x + x - y)}{(a^3y - abx + x - y)}.$$
$$q_4 = \frac{(-a^3xy + a^2b^2y^2 + abx^2 + aby^2 - b^3xy - x^2 + y^2)}{(a^3y - abx + x - y)}.$$
$$q_5 = \frac{(-a^3 + b^3)}{(a^3y - abx + x - y)}.$$
$$q_6 = \frac{(-a^3b^3y + a^3y + ab^4x - b^3x)}{(a^3y - abx + x - y)}.$$
$$q_7 = \frac{(-a^6y + a^4bx - a^3x + b^3y)}{(a^5b^2y - a^3b^3x + a^2b^2x - a^2b^2y)}).$$
$$q_8 = \frac{(a^3 - b^3)}{(a^5b^2y - a^3b^3x + a^2b^2x - a^2b^2y)}.$$

定理 3.3 からこれらが不変式体の生成元となる. □

不変式環については, 異なる計算方法を用いて計算した.

定理 6.2. 対称群 $S_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = 1, \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma\tau^2 \rangle$ の多項式環 $\mathbb{C}[a, b, x, y]$ への次のような線型化不可能な作用 [4] を考える.

$$
\begin{aligned}
S_3 &\longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[a,b,x,y]).\\
\sigma,\tau\colon \mathbb{C}[a,b,x,y] &\longrightarrow \mathbb{C}[a,b,x,y].
\end{aligned}
$$
$$
\begin{aligned}
&\sigma(a,b,x,y) = (\omega a, \omega^2 b, x, y).\\
&\tau(a,b,x,y) = (b, a, -b^3x + (1+ab+(ab)^2)y, (1-ab)x + a^3y).
\end{aligned}
$$

ここで, ω は 1 の原始 3 乗根の 1 つである. このとき, 不変式環は次のようになる.

$$\mathbb{C}[a,b,x,y]^{S_3} = \mathbb{C}[f_1,\ldots,f_9].$$

ここで, 多項式 $f_1,\ldots,f_9$ は次のようなものである.

$$
\begin{aligned}
&f_1 = a^3y - abx + x + y.\\
&f_2 = a^2b^2y + aby - b^3x + x + y.\\
&f_3 = a^3y^2 - abxy + xy.\\
&f_4 = a^2b^2xy + abxy - b^3x^2 + xy.\\
&f_5 = a^5b^2y^2 + a^4by^2 - 2a^3b^3xy + a^3y^2 + ab^4x^2 - b^3x^2 + 2xy.\\
&f_6 = a^3b^3y + a^3y - ab^4x + b^3x.\\
&f_7 = a^3x + a^2b^5y + ab^4y - b^6x + b^3y.\\
&f_8 = ab.\\
&f_9 = a^3 + b^3.
\end{aligned}
$$

Proof. まず対称群 $S_3 = \langle \sigma,\tau \mid \sigma^3 = 1, \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma\tau^2 \rangle$ の多項式環 $\mathbb{C}[A,B,X,Y,Z,W]$ への次のような線型な作用に関する不変式環を計算する.

$$
\begin{aligned}
S_3 &\longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[A,B,X,Y,Z,W]).\\
\sigma,\tau\colon \mathbb{C}[A,B,X,Y,Z,W] &\longrightarrow \mathbb{C}[A,B,X,Y,Z,W].\\
\sigma(A,B,X,Y,Z,W) &= (\omega A, \omega^2 B, X, Y, Z, W)).\\
\tau(A,B,X,Y,Z,W) &= (B, A, Z, W, X, Y).
\end{aligned}
$$

この不変式環は次のように計算することができる.

プログラム 4: 線型な作用に関する不変式環の計算

```
"singular version 4.1.2"
LIB "finvar.lib";
ring R = (0,w),(A,B,X,Y,Z,W),lp;
```

```
minpoly = w2+w+1;
def wp = w;
def ws=w^2;
matrix e[6][6]=
1,0,0,0,0,0,
0,1,0,0,0,0,
0,0,1,0,0,0,
0,0,0,1,0,0,
0,0,0,0,1,0,
0,0,0,0,0,1;
matrix ma[6][6]=
wp,0,0,0,0,0,
0,ws,0,0,0,0,
0,0,1,0,0,0,
0,0,0,1,0,0,
0,0,0,0,1,0,
0,0,0,0,0,1;
matrix mb[6][6]=
0,1,0,0,0,0,
1,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,1,0,
0,0,0,0,0,1,
0,0,1,0,0,0,
0,0,0,1,0,0;
matrix REY,M = reynolds_molien(e,ma,ma*ma,mb,ma*mb,ma*ma*mb);
matrix P = primary_char0(REY,M);
list L = primary_invariants(e,ma,mb);
matrix S,IS = secondary_char0(L[1..3],1);
print(P);
print(IS);
```

これにより不変式環は次のようになる.

$$\mathbb{C}[A,B,X,Y,Z,W]^{S_3} = \mathbb{C}[F_1,\ldots,F_9].$$

ここで多項式 $F_1,\ldots,F_9$ は次のようなものである.

$$F_1 = Y + W.$$
$$F_2 = X + Z.$$
$$F_3 = YW.$$
$$F_4 = XZ.$$
$$F_5 = XY + ZW.$$
$$F_6 = A^3Y + B^3W.$$
$$F_7 = A^3X + B^3Z.$$
$$F_8 = AB.$$
$$F_9 = A^3 + B^3.$$

次に求めている不変式環と, 今計算した線型な作用に関する不変式環との関係を示す. 多項式 $p_1, p_2 \in \mathbb{C}[a, b, x, y]$ を次のように定義する.

$$p_1 = -b^3x + (1 + ab + (ab)^2)y.$$
$$p_2 = (1 - ab)x + a^3y.$$

次のような多項式の間の全射 $\mathbb{C}$ 代数準同型を考える.

$$\varphi\colon \mathbb{C}[A, B, X, Y, Z, W] \longrightarrow \mathbb{C}[a, b, x, y].$$
$$\varphi(A, B, X, Y, Z, W) = (a, b, x, y, p_1, p_2).$$

これは S_3 準同型である. 実際,

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\sigma(A)) = \varphi(\omega A) = \omega\varphi(A) = \omega a = \sigma(a) = \sigma(\varphi(A)),\\
&\varphi(\sigma(B)) = \varphi(\omega^2 B) = \omega^2\varphi(B) = \omega^2 b = \sigma(b) = \sigma(\varphi(B)),\\
&\varphi(\sigma(X)) = \varphi(X) = x = \sigma(x) = \sigma(\varphi(X)),\\
&\varphi(\sigma(Y)) = \varphi(Y) = y = \sigma(y) = \sigma(\varphi(Y)),\\
&\varphi(\sigma(Z)) = \varphi(Z) = p_1 = \sigma(p_1) = \sigma(\varphi(Z)),\\
&\varphi(\sigma(W)) = \varphi(W) = p_2 = \sigma(p_2) = \sigma(\varphi(W)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\tau(A)) = \varphi(B) = b = \tau(a) = \tau(\varphi(A)),\\
&\varphi(\tau(B)) = \varphi(A) = a = \tau(b) = \tau(\varphi(B)),\\
&\varphi(\tau(X)) = \varphi(Z) = p_1 = \tau(x) = \tau(\varphi(X)),\\
&\varphi(\tau(Y)) = \varphi(W) = p_2 = \tau(y) = \tau(\varphi(Y)),\\
&\varphi(\tau(Z)) = \varphi(X) = x = \tau(p_1) = \tau(\varphi(Z)),\\
&\varphi(\tau(W)) = \varphi(Y) = y = \tau(p_2) = \tau(\varphi(W))
\end{aligned}
$$

のようなっている．このとき, 不変式環の間に $\mathbb{C}$ 代数準同型が誘導される．

$$\varphi\colon \mathbb{C}[A,B,X,Y,Z,W]^{S_3} \longrightarrow \mathbb{C}[a,b,x,y]^{S_3}.$$

この準同型は定理 2.6 から再び全射である．なので求める不変式環は

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}[a,b,x,y]^{S_3} &= \varphi(\mathbb{C}[A,B,X,Y,Z,W]^{S_3})\\
&= \varphi(\mathbb{C}[F_1,\dots,F_9]) = \mathbb{C}[\varphi(F_1),\dots,\varphi(F_9)]
\end{aligned}
$$

と計算することができる． □

上の証明を修正することで, 不変式環の生成元の個数に関する上限をあたえることができる．これは定理 2.7 の非線型な作用での類似の結果である．

定理 6.3. 有限群 G が多項式環 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ に作用しているとする．自然数 N を次のように定める．

$$N = \inf\{s \mid \text{ある不変式 } f_1,\dots,f_s \text{ について } \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^G = \mathbb{C}[f_1,\dots,f_s]\}.$$

これは不変式環を生成するために必要な不変式の最小個数である．このとき次の不等式が成り立つ．

$$N \le \binom{(n+1)|G|}{n|G|}.$$

Proof. 有限群 G に対して, 次のような多項式環

$$\mathbb{C}[x_i^{(\sigma)}]_{i=1,\dots,n}^{\sigma\in G}$$

への線型な作用を考える. ここでこの多項式環の変数は $n|G|$ 個である.

$$\begin{aligned}
&G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_i^{(\sigma)}]_{i=1,\dots,n}^{\sigma\in G}).\\
&\tau\colon \mathbb{C}[x_i^{(\sigma)}]_{i=1,\dots,n}^{\sigma\in G} \longrightarrow \mathbb{C}[x_i^{(\sigma)}]_{i=1,\dots,n}^{\sigma\in G}.\\
&\tau(x_i^{(\sigma)}) = x_i^{(\tau\sigma)}.
\end{aligned}$$

このとき, 次のような多項式環の間の全射 G 準同型を考える.

$$\begin{aligned}
\varphi\colon \mathbb{C}[x_i^{(\sigma)}]_{i=1,\dots,n}^{\sigma\in G} &\longrightarrow \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n].\\
\varphi(x_i^{(\sigma)}) &= \sigma(x_i).
\end{aligned}$$

このとき定理 2.6 によって有限群 G は線型簡約代数群であるから, 不変式環の間に全射 $\mathbb{C}$ 代数準同型が誘導される.

$$\varphi\colon (\mathbb{C}[x_i^{(\sigma)}]_{i=1,\dots,n}^{\sigma\in G})^G \longrightarrow \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^G.$$

よって, 不変式環 $(\mathbb{C}[x_i^{(\sigma)}]_{i=1,\dots,n}^{\sigma\in G})^G$ の生成元を用いて求める不変式環 $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^G$ の生成元を計算することができる. 線型な作用に関する不変式環の生成元の個数については, 定理 2.7 がわかっているので, 特に $\binom{n|G|+|G|}{n|G|} = \binom{(n+1)|G|}{n|G|}$ 以下の個数の不変式で不変式環 $(\mathbb{C}[x_i^{(\sigma)}]_{i=1,\dots,n}^{\sigma\in G})^G$ を生成するものを取ることができる. したがって求める不等式がえられた. □

この定理によって, 今まで知られていなかった不変式環の生成元の個数に関する上限をはじめてあたえることができた. これより良い上限をあたえるためには, 本論文で用いた計算方法とは異なる方法で不変式環を計算する必要がある. そのために Kemper のアルゴリズムは 1 つの候補であるのでより詳しく調べる必要がある.

7 Acknowledgements

本研究において, 毎週のセミナーでわからなくなっている疑問点に丁寧に対応をしていただき, また論文へのまとめ方・発表の方法等についてもご指導をいただきました梋先生に感謝いたします. また, 不変式の計算が行き詰まっていた際に他の方針を示してくださ

り, 実際に計算してみるために計算機を貸していただきました永井先生に感謝いたします. 最後に同期の水野氏並びに代数幾何系研究室の皆様に対し, 本論文にご意見をくださったことに感謝いたします.

参考文献

[1] 橋本光靖, 不変式環の環論的性質, `https://mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp08_files/hashimoto.pdf`

[2] 村彩乃, 正多面体群による三変数多項式環の不変式環について, 早稲田大学大学院基幹理工学研究科修士論文, 2018.

[3] L. Moser-Jauslin, Triviality of certain equivariant vector bundles for finite cyclic groups, C.R. Acad. Sci, 317(1993), 139-144.

[4] G. Freudenburg, L. Moser-Jauslin, A nonlinearizable action of S_3 on $\mathbb{C}^4$, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 52, 1(2002), 133-143.

[5] Gregor Kemper, Using Extended Derksen Ideals in Computational Invariant Theory, Journal of Symbolic Computation, vol.72(2016), 161-181.

[6] B. Sturmfels, Algorithms in Invariant Theory, Springer-Verlag/Wien, New York, 2008.

[7] 向井茂, モジュライ理論 1 , 岩波書店, 2008.