

有限グラフ上のトーリックイデアル

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻修士 2 年 楫研究室

前田 悠輔

2019 年 2 月 8 日

主定理

有限グラフ G から生起する配置 \mathcal{A}_G のトーリックイデアル I_G に属する任意の二項式 f_Γ と対応する閉路 Γ について以下が成り立つ。

f_Γ は原始的だがサーキットではない二項式であるとき、 Γ は

$$(C_1, C'_3, C_2, C''_3)$$

の形で表される閉路になる。

ただし、 C_1 の始点と C'_3 の始点と C''_3 の終点、 C'_3 の終点と C''_3 の始点と C_2 の始点はそれぞれ一致し、 $C_1 = (e_{i_1}, \dots, e_{i_{2p-1}}), C_2 = (e_{j_1}, \dots, e_{j_{2q-1}})$ はそれぞれ長さが奇数の閉路、 $C_3 = (e_{k_1}, \dots, e_{k_{2r}})$ は長さが偶数の閉路、 $C'_3 = (e_{k_1}, \dots, e_{k_s}), C''_3 = (e_{k_{s+1}}, \dots, e_{k_{2r}})$ はそれぞれ C_3 に含まれる路とする。

定義 1 (閉路と二項式の対応付け)

$\Gamma = (e_{p_1}, \dots, e_{p_{2q}})$ を G 上の長さが偶数の閉路とする。このとき、

$$f_\Gamma^{(+)} = \prod_{k=1}^q x_{p_{2k-1}}, f_\Gamma^{(-)} = \prod_{k=1}^q x_{p_{2k}}$$

と定め、 Γ に対応する二項式を

$$f_\Gamma = f_\Gamma^{(+)} - f_\Gamma^{(-)}$$

と定める。

命題 2 ([2])

配置 \mathcal{A} に対し $\mathcal{C}_\mathcal{A}, \mathcal{U}_\mathcal{A}, Gr_\mathcal{A}$ をそれぞれサーキット全体の集合、universal Gröbner basis、Graver basis とする。

$$\mathcal{C}_\mathcal{A} \subset \mathcal{U}_\mathcal{A} \subset Gr_\mathcal{A}$$

が成り立つ。

次に、主定理の例を示しておく。

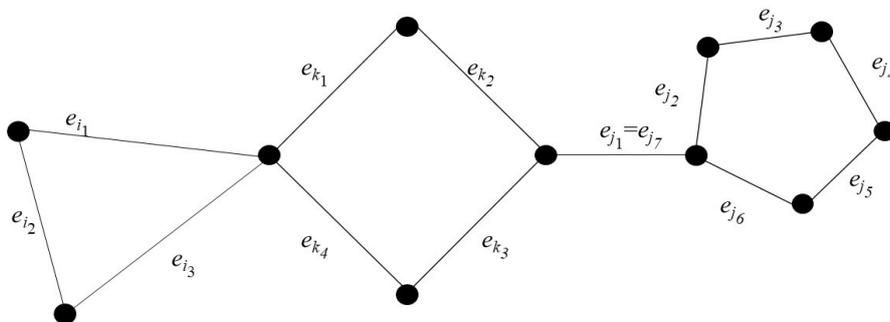


図 1

$$\Gamma = (e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, e_{k_1}, e_{k_2}, e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3}, e_{j_4}, e_{j_5}, e_{j_6}, e_{j_1}, e_{k_3}, e_{k_4})$$

命題 3

有限グラフ G をとる。 G に含まれる極小偶サイクル $C = (e_1, \dots, e_{2p})$ に対して以下のような路を定める。
 $\Gamma_i = (e_{i_1}, \dots, e_{i_{2s_i-1}})$ ただし、 e_i と e_{i+1} と e_{i_1} , e_{i+1} と e_{i+2} と $e_{i_{2s_i-1}}$ が頂点を共有しているとする。このとき、

$$\Gamma = (e_1, \Gamma_1, \dots, e_{2p}, \Gamma_{2p})$$

に対応する二項式 f_Γ は原始的だが universal Gröbner basis の元ではない。

以下に例を示す。

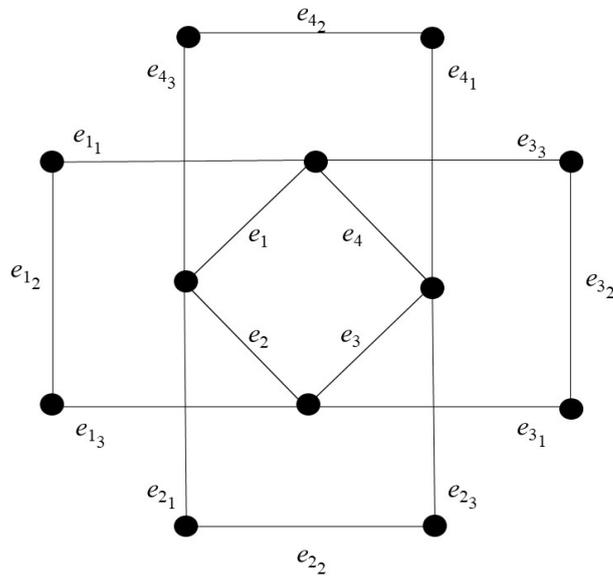


図 2

$$C = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

$$\Gamma = (e_1, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_2, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_3, e_{31}, e_{32}, e_{33}, e_4, e_{41}, e_{42}, e_{43})$$

参考文献

- [1] 日比孝之. グレブナー基底. 朝倉書店. 2003.
- [2] JST CREST 日比チーム. グレブナー道場. 共立出版. 2011.
- [3] D.Cox, J.Little, and D.O' Shea. Using Algebraic Geometry. Springer Publications Inc., 2007.
- [4] G.Greuel, G.Pfister. A Singular Introduction to Commutative Algebra. Springer Publications Inc., 2008.
- [5] 大杉英史. トーリックイデアルの 20 年.2010.
- [6] C.Tatakis, A.Thoma. On the universal Gröbner bases of toric ideals of graphs. 2010.