

有限グラフ上のトーリックイデアル

前田 悠輔

楯研究室 修士 2 年

2018 年 2 月 8 日

イントロダクション

動機

整数計画問題に対し、緩和変数を導入し係数に指数を対応させることでトーリックイデアルの Gröbner basis が問題の解を与えることが知られている。

従来研究

universal Gröbner basis と Graver basis の包含関係を利用し Graver basis を求める方法は研究されている。



今回の研究

Graver basis から universal Gröbner basis を求めるため、二つの集合の差集合について研究した。

イントロダクション

整数計画問題の例

次のような輸送の問題を考える。輸送会社の経営者の立場で利益の最大化を図ろう。

顧客 A は体積 2 立方メートル、重量 400 キログラムの荷物を、顧客 B は体積 3 立方メートル、重量 500 キログラムの荷物を輸送する必要がある。A, B はそれぞれ荷物一つにつき 11 \$, 15 \$ を支払う。

会社は体積 20 立方メートル、重量 3700 キログラムまで運ぶことができるトラックを所有しているが、それぞれの顧客からどのように荷物を輸送するのが利益を最大化するだろうか？

イントロダクション

問題を式で表すと、

$$4A + 5B + C = 37$$

$$2A + 3B + D = 20$$

$$A, B, C, D \in \mathbb{Z}$$

ただし、 C, D は緩和変数である。すると、イデアル

$$I = \langle z_1^4 z_2^2 - w_1, z_1^5 z_2^3 - w_2, z_1 - w_3, z_2 - w_4 \rangle$$

に対し $z_1 > z_2 > z_3 > z_4 > w_1 > w_2$ とした辞書式順序で得られる Gröbner basis G で $f = z_1^{37} z_2^{20}$ を簡約化した $\bar{f}^G = w_1^4 w_2^4 w_3$ が解 $(A, B) = (4, 4)$ を与えている。

主定理

主定理

有限グラフ G から生起する配置 $\mathcal{A}_G$ のトーリックイデアル I_G に属する任意の二項式 f_Γ と対応する閉路 Γ について以下が成り立つ。
 f_Γ は原始的だがサーキットではない二項式であるとき、 Γ は

$$(C_1, C'_3, C_2, C''_3)$$

の形で表される閉路になる。

ただし、 C_1 の始点と C'_3 の始点と C''_3 の終点、 C'_3 の終点と C''_3 の始点と C_2 の始点はそれぞれ一致し、

$C_1 = (e_{i_1}, \dots, e_{i_{2p-1}})$, $C_2 = (e_{j_1}, \dots, e_{j_{2q-1}})$ はそれぞれ長さが奇数の閉路、 $C_3 = (e_{k_1}, \dots, e_{k_{2r}})$ は長さが偶数の閉路、

$C'_3 = (e_{k_1}, \dots, e_{k_s})$, $C''_3 = (e_{k_{s+1}}, \dots, e_{k_{2r}})$ はそれぞれ C_3 に含まれる路とする。

準備

定義 1(配置)[1]

$\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbf{Z}^d$ が $\mathbf{Q}^d$ の配置であるとは、原点を通過しない超平面 $\mathcal{H} \subset \mathbf{Q}^d$ を適当に選んで $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ とできることをいう。

定義 2(トーリック環)[1]

配置 $\mathcal{A}$ に付随するトーリック環とは、

$$K[\mathcal{A}] = K[\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}] \subset K[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}] = K[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_d, t_d^{-1}]$$

である。

準備

定義 3(トーリックイデアル)[1]

n 変数多項式環 $K[\mathbf{x}] = K[x_1, \dots, x_n]$ を用意し以下のように準同型を定める。

$$\pi : K[\mathbf{x}] \rightarrow K[\mathcal{A}]$$

$$x_i \mapsto \mathbf{t}^{\mathbf{a}_i}$$

この時、 $I_{\mathcal{A}} = \text{Ker}(\pi)$ を $\mathcal{A}$ の **トーリックイデアル** という。

定義 4(Gröbner basis)[2]

$K[\mathbf{x}]$ の単項式順序 $<$ とイデアル I について $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\} \subset I$ が I の $<$ に関する **Gröbner basis** であるとは、 $\text{in}_{<}(I) = \text{in}_{<}(\mathcal{G})$ が成立することをいう。ただし、 $\text{in}_{<}(I), \text{in}_{<}(\mathcal{G})$ はそれぞれ $I, \mathcal{G}$ のイニシャルイデアルである。また、各 g_i について $\text{in}_{<}(g_i)$ の係数は 1 かつ $i \neq j$ のとき g_j の単項式は $\text{in}_{<}(g_i)$ で割り切れないという条件を満たすとき $\mathcal{G}$ は **被約** であるという。

準備

定義 5(単体)[1]

配置 $\mathcal{A}$ に含まれるアフィン独立な点の最大個数を $\delta + 1$ であるとき、次元を δ と定義する。 $F \subset \mathcal{A}$ がアフィン独立な点からなるとき F を $\mathcal{A}$ の**単体**といい、とくに $\delta + 1$ 個の点からなるとき**極大な単体**という。

極大な単体 F が $\mathbf{Z}F = \mathbf{Z}\mathcal{A}$ を満たすとき、 F は**基本単体**であるという。単体 F について、 $F \subset F'$ をみたす基本単体 F' が存在するとき、 F は**単模**であるという。

準備

定義 6(三角形分割、単模配置)[1]

配置 $\mathcal{A}$ の **三角形分割** $\Delta = \{F_1, \dots, F_k : F_i \text{ は単体} \}$ とは、以下の条件を満たすものをいう。

- (i) $F \in \Delta, F' \subset F \Rightarrow F' \in \Delta$
- (ii) $F, F' \in \Delta \Rightarrow \text{CONV}(F) \cap \text{CONV}(F') = \text{CONV}(F \cap F')$
- (iii) $\text{CONV}(\mathcal{A}) = \bigcup_{F \in \Delta} \text{CONV}(F)$

三角形分割 Δ の元 F_i を Δ の面といい、 Δ が **単模** であるとは、任意の面が単模であることをいう。また、 $\mathcal{A}$ のすべての三角形分割が単模であるとき、 $\mathcal{A}$ は **単模配置** であるという。

準備

定義 7(原始的二項式)[1]

二項式 $f = u - v \in I_A$ が**原始的**であるとは、 f と異なる $g = u' - v' \in I_A$ で $u' \mid u, v' \mid v$ を満たすものが存在しないことをいう。

I_A の原始的な二項式全体を I_A の **Graver basis** という。

定義 8(universal Gröbner basis)[1]

イデアル I のすべての単項式順序の被約 Gröbner basis の和集合を **universal Gröbner basis** という。

定義 9(サーキット)[1]

二項式 $f = u - v \in I_A$ が**サーキット**であるとは、
 $\text{supp}(g) \subsetneq \text{supp}(f)$ を満たす $0 \neq g \in I_A$ が存在しないことをいう。

準備

定義 10(有限グラフから生起する配置)[1]

有限グラフ G が頂点集合 $V(G) = \{1, \dots, d\}$ 、辺集合 $E(G)$ をもつとする。 $e \in E(G)$ が頂点 i, j を結ぶときに $\rho(e) = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ と定める。 $\mathcal{A}_G = \{\rho(e) : e \in E(G)\}$ を有限グラフ G から生起する配置という。

知られていること

命題 11[2]

配置 $\mathcal{A}$ について、サーキット全体の集合を $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ 、universal Gröbner basis を $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ 、Graver basis を $Gr_{\mathcal{A}}$ とかく。このとき、

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{U}_{\mathcal{A}} \subset Gr_{\mathcal{A}}$$

が成り立つ。

Pf.)[2], pp295-296

補題 12[1]

配置 $\mathcal{A}$ について、以下は同値

(i) $\mathcal{A}$ は単模配置

(ii) $K[x]$ の任意の全順序 $<$ について $in_{<_{grlex}}(I_{\mathcal{A}})$ は平方自由

Pf.)[1], pp111-112

知られていること

補題 13[1]

任意の二項式 $f = u - v \in I_A$ について、サーキット
 $g = u' - v' \in I_A$ をうまくとると
 $\text{supp}(u') \subset \text{supp}(u)$, $\text{supp}(v') \subset \text{supp}(v)$ となるようにとれる。
 Pf.) 変数の個数についての帰納法を用いる。

補題 14[1]

任意のサーキット $f = u - v$ について、次数付き辞書式順序
 $<_{\text{grlex}}$, $<'_{\text{grlex}}$ をうまくとると、次を満たすようにできる。

$$(i) u = \text{in}_{<_{\text{grlex}}}(f), f \in \mathcal{G}_{<_{\text{grlex}}}(I_A)$$

$$(ii) v = \text{in}_{<'_{\text{grlex}}}(f), f \in \mathcal{G}_{<'_{\text{grlex}}}(I_A)$$

Pf.) $x_i \in \text{supp}(f)$, $x_j \notin \text{supp}(f) \Rightarrow x_i <_{\text{grlex}} x_j$, $x_i <'_{\text{grlex}} x_j$ かつ
 $v <_{\text{grlex}} u$, $u <'_{\text{grlex}} v$ と選べばよい。

知られていること

命題 15[1]

配置 $\mathcal{A}$ について、以下は同値

(i) $\mathcal{A}$ は単模配置

(ii) $I_{\mathcal{A}}$ の任意のサーキットは square free

(iii) $K[x]$ の任意の全順序 $<$ について $<_{grlex}(I_{\mathcal{A}})$ は平方自由 Pf.) (i) $\Leftrightarrow$ (iii) は補題 12 より従う。

(ii) $\Rightarrow$ (i) は補題 13 から原始的二項式がサーキットになることから従う。

(iii) $\Rightarrow$ (ii) は補題 14 よりサーキット $f = u - v$ について u, v が square free となることから従う。

系 16[2]

$\mathcal{A}$ が単模配置

$\Rightarrow C_{\mathcal{A}} = \mathcal{U}_{\mathcal{A}} = Gr_{\mathcal{A}}$

問題

系 16 より単模である配置については $\mathcal{C}_A, \mathcal{U}_A, Gr_A$ が一致することがわかる。

～→ 一般の配置についてこれらの差集合は？

この問に対し、 $\mathcal{C}_A$ と Gr_A の差を有限グラフから生起する配置について示したものが主定理にあたる。

主定理

主定理

有限グラフ G から生起する配置 $\mathcal{A}_G$ のトーリックイデアル I_G に属する任意の二項式 f_Γ と対応する閉路 Γ について以下が成り立つ。
 f_Γ は原始的だがサーキットではない二項式であるとき、 Γ は

$$(C_1, C'_3, C_2, C''_3)$$

の形で表される閉路になる。

ただし、 C_1 の始点と C'_3 の始点と C''_3 の終点、 C'_3 の終点と C''_3 の始点と C_2 の始点はそれぞれ一致し、

$C_1 = (e_{i_1}, \dots, e_{i_{2p-1}})$, $C_2 = (e_{j_1}, \dots, e_{j_{2q-1}})$ はそれぞれ長さが奇数の閉路、 $C_3 = (e_{k_1}, \dots, e_{k_{2r}})$ は長さが偶数の閉路、

$C'_3 = (e_{k_1}, \dots, e_{k_s})$, $C''_3 = (e_{k_{s+1}}, \dots, e_{k_{2r}})$ はそれぞれ C_3 に含まれる路とする。

主定理

具体的な例を示す。

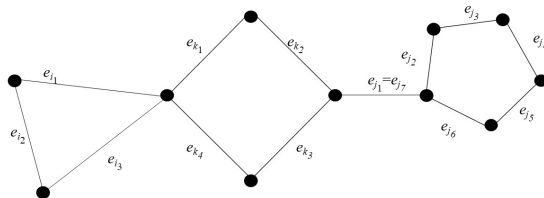


図 1: 原始的だがサーキットでない二項式に対応する閉路

$$\Gamma = (e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}, e_{k1}, e_{k2}, e_{j1}, e_{j2}, e_{j3}, e_{j4}, e_{j5}, e_{j6}, e_{j1}, e_{k3}, e_{k4})$$

今後の課題

原始的ではあるが universal Gröbner basis の元ではない二項式については定式化がなされていない。だが、そのような例を構成する方法を導くことはできた。

命題 17

有限グラフ G をとる。 G に含まれる極小偶サイクル

$C = (e_1, \dots, e_{2p})$ に対して以下のような路を定める。

$\Gamma_i = (e_{i_1}, \dots, e_{i_{2s_i-1}})$ ただし、 e_i と e_{i+1} と e_{i_1} 、 e_{i+1} と e_{i+2} と $e_{i_{2s_i-1}}$ が頂点を共有しているとする。このとき、

$$\Gamma = (e_1, \Gamma_1, \dots, e_{2p}, \Gamma_{2p})$$

に対応する二項式 f_Γ は原始的だが universal Gröbner basis の元ではない。

今後の課題

こちらも具体的例を示す。

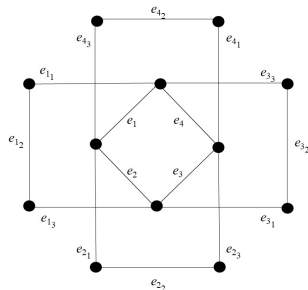


図 2: 原始的だが universal Gröbner basis の元ではない二項式に対応する閉路

$$C = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

$$\Gamma = (e_1, e_{1_1}, e_{1_2}, e_{1_3}, e_2, e_{2_1}, e_{2_2}, e_{2_3}, e_3, e_{3_1}, e_{3_2}, e_{3_3}, e_4, e_{4_1}, e_{4_2}, e_{4_3})$$

今後の課題

- universal Gröbner basis の元ではあるがサーキットではない二項式
- 原始的ではあるが universal Gröbner basis の元ではない二項式
- 有限グラフにおける Graver basis の計算
- 一般の配置について

参考文献

- [1] 日比孝之. グレブナー基底. 朝倉書店, 2003
- [2] JST CREST 日比チーム. グレブナー道場. 共立出版, 2011
- [3] D.Cox, J.Little, and D.O' Shea. Using Algebraic Geometry. Springer Publications Inc., 2007.
- [4] G.Greuel, G.Pfister. A Singular Introduction to Commutative Algebra. Springer Publications Inc., 2008.
- [5] 大杉英史. トーリックイデアルの 20 年. 2010
- [6] C.Tatakis, A.Thoma. On the universal Grbner bases of toric ideals of graphs. 2010