

有限グラフ上のトーリックイデアル

早稲田大学大学院基幹理工学研究科
数学応用数理専攻修士 2 年

前田 悠輔

学籍番号 5117A057

指導教員 楫 元

2019 年 2 月 1 日

1 Abstract

本論文では、一般的なトーリックイデアル、Gröbner basis について解説し、特に有限グラフから生起するトーリックイデアルについて詳しく述べる。その中で、サーキット、universal Gröbner basis、Graver basis の包含関係について等号の成り立たない場合について述べることで Gröbner basis を導く方法について提案する。

2 Introduction

線形計画問題の中でも、解ベクトルの要素を整数に限定されたものを整数計画問題とよぶ。整数制約のない線形計画問題についてはすでに高速で解く方法が確立されているものの、整数計画問題ではそのようなアルゴリズムは存在していない。しかしながら、現実問題をモデル化するにあたっては整数計画問題を解くことがより求められていることも事実であり、問題の解決方法を探すことが非常に重要である。その一方で、配置に付随するトーリックイデアルの Gröbner basis を計算することによって整数計画問題の解を与えられるということが知られている。しかしながら、一般の Gröbner basis を計算することは二重指数オーダーの問題であるため、高速で計算することは難しい。従来の研究では、特定の単項式順序からトーリックイデアルの Gröbner basis を計算することで Graver basis にアプローチするということが試みられているが、その逆に Graver basis やサーキットから Gröbner basis を計算しようという研究はあまり行われていない。本論文においては、トーリックイデアルの中でも有限グラフから生起するようなものに対してサーキット、universal Gröbner basis、Graver basis の差について論じたものが本研究の主定理にあたる。

3 多項式環

3.1 Gröbner basis

本節では、主定理を述べるにあたり必要な一般的な Gröbner basis の理論について準備をする。

定義 3.1.1 (単項式順序 [2])

K を体とする。多項式環 $K[\mathbf{x}] = K[x_1, \dots, x_n]$ の多項式全体の集合 $\mathcal{M}_n$ について全順序 $<$ が以下の (i), (ii) をみたすとき $<$ は $K[\mathbf{x}]$ の単項式順序という。

(i) $1 \neq u \in \mathcal{M}_n$ について $1 < u$

(ii) $u, v \in \mathcal{M}_n$ について $u < v$ ならば任意の $w \in \mathcal{M}_n$ に対して $wu < wv$

例 3.1.2 (辞書式順序 [2])

単項式 $u = \mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ と $v = \mathbf{x}^{\mathbf{b}} = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ について、「 u の次数が v の次数より小さい」もしくは「 u と v の次数が等しく、ベクトルの差 $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$ において 0 でない成分で最も小さい添数の成分が正」であるとき、 $u <_{\text{grlex}} v$ と定義する。このとき、 $<_{\text{grlex}}$ は $K[\mathbf{x}]$ の単項式順序である。 $<_{\text{grlex}}$ を次数付辞書式順序という。

例 3.1.3 (逆辞書式順序 [2])

単項式 $u = \mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ と $v = \mathbf{x}^{\mathbf{b}} = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ について、「 u の次数が v の次数より小さい」もしくは「 u と v の次数が等しく、ベクトルの差 $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$ において 0 でない成分で最も大きい添数の成分が負」であるとき、 $u <_{\text{grevlex}} v$ と定義する。このとき、 $<_{\text{grevlex}}$ は $K[\mathbf{x}]$ の単項式順序である。 $<_{\text{grevlex}}$ を次数付逆辞書式順序という。

例 3.1.4 (ウェイト順序)

$0 \neq \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ と $K[\mathbf{x}]$ の単項式順序 $<$ を固定する。このとき、単項式 $u = \mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ と $v = \mathbf{x}^{\mathbf{b}} = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ について、「 $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a} < \mathbf{w} \cdot \mathbf{b}$ 」もしくは「 $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{b}$ かつ $u < v$ 」であるとき、 $u <_{\mathbf{w}} v$ と定める。このとき、 $<_{\mathbf{w}}$ は $K[\mathbf{x}]$ の単項式順序である。 $<_{\mathbf{w}}$ を $<$ の $\mathbf{w}$ によるウェイト順序という。

定義 3.1.5 (イニシャルイデアル [2])

$K[\mathbf{x}]$ の単項式順序 $<$ を固定する。0 でない多項式

$$f = a_1 u_1 + \cdots + a_t u_t \in K[\mathbf{x}]$$

(ただし、各 $a_i \in K$ 、各 u_i は単項式、 $1 \leq i \leq t$) について、 $u_1, \dots, u_t$ のうち $<$ についてもっとも大きいものを f の $<$ に関するイニシャル単項式または先頭単項式とよび、 $in_{<}(f)$ や $LM(f)$ とかく。また、先頭単項式を含む項、その係数をそれぞれ f の $<$ に関する先頭項、先頭係数とよび、それぞれ $LT(f)$ 、 $LC(f)$ とかく。この表記のもと、イデアル $I \subset K[\mathbf{x}]$ に対して

$$in_{<}(I) = \langle \{in_{<}(f) : 0 \neq f \in I\} \rangle$$

を I の $<$ に関するイニシャルイデアルとよぶ。

これらの定義をもって、Gröbner basis について論ずる準備が整った。

定義 3.1.6 (Gröbner basis [1])

$K[\mathbf{x}]$ の単項式順序 $<$ を固定する。イデアル $I \subset K[\mathbf{x}]$ に対して、 $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_t\} \subset I$ が以下の式

$$in_{<}(I) = \langle in_{<}(g_1), \dots, in_{<}(g_t) \rangle$$

を満たすとき、 $\mathcal{G}$ は $<$ に関する I の **Gröbner basis** とよぶ。また、Gröbner basis $\mathcal{G}$ が条件

- (i) $in_{<}(g_i)$ の係数は 1 ($1 \leq i \leq s$)
 - (ii) $i \neq j$ のとき、 g_j に現れる項は $in_{<}(g_i)$ で割り切れない
- を満たすとき、 $\mathcal{G}$ は被約 (reduced) という。

一般的に、Gröbner basis は一意には定まらない。ある Gröbner basis $\mathcal{G}$ について I の部分集合で $\mathcal{G}$ を含むようなものはすべて Gröbner basis になることから明らかである。しかし被約なものについてはそうではない。次の命題がある。

命題 3.1.7

被約 Gröbner basis は一意に存在する。

Proof. 2つの被約 Gröbner basis をとり、それらが一致することを示す。詳しくは [1] を参照されたい。

次節においては、本研究の対象とする有限グラフと、トーリックイデアルについて述べる。

3.2 トーリックイデアル

定義 3.2.1 (Laurent 多項式)

整数ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$ に対し、変数 $t_1, \dots, t_d$ を用意する。 $\mathbf{a}$ に対し負冪を認める単項式

$$\mathbf{t}^{\mathbf{a}} = t_1^{a_1} \dots t_d^{a_d}$$

を対応させる。負冪を許す単項式を **Laurent 単項式** とよぶ。有限個の Laurent 単項式の和の形で表される式を **Laurent 多項式** とよぶ。Laurent 単項式 $\mathbf{t}^{\mathbf{a}}$ と $\mathbf{t}^{\mathbf{b}}$ の積を $\mathbf{t}^{\mathbf{a}}\mathbf{t}^{\mathbf{b}} = \mathbf{t}^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$ と定義する。体 K を固定する。変数 $t_1, \dots, t_d$ の Laurent 単項式全体を基底とする K 上線形空間

$$K[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}] = K[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_1^{-1}, \dots, \mathbf{t}_d, \mathbf{t}_d^{-1}]$$

を d 変数 **Laurent 多項式環** とよぶ。

定義 3.2.2 (配置 [1])

$\mathcal{H} \subset \mathbb{Q}^d$ について、 $(0, \dots, 0) \neq (c_1, \dots, c_d) \in \mathbb{Q}^d$ をとって

$$\mathcal{H} = \{(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{Q}^d : c_1 z_1 + \dots + c_d z_d = 1\}$$

と書けるとき $\mathcal{H}$ は空間 $\mathbb{Q}^d$ の原点を通らない超平面という。また、整数点の有限集合 $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ が原点を通らない超平面 $\mathcal{H}$ をとって $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ とできるとき、 $\mathcal{A}$ は $\mathbb{Q}^d$ の配置であるという。

定義 3.2.3 (トーリック環 [1])

配置 $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ に対し定義 3.2.1 で行ったように Laurent 単項式 $\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}$ を対応させる。この Laurent 単項式が生成する Laurent 多項式環 $K[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$ の部分環

$$K[\mathcal{A}] = K[\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}]$$

を配置 $\mathcal{A}$ に付随するトーリック環とよぶ。

定義 3.2.4 (トーリックイデアル [1])

K 上の n 変数多項式環 $K[\mathbf{x}] = K[x_1, \dots, x_n]$ とトーリック環 $K[\mathcal{A}] = K[\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}]$ に対し $K[\mathbf{x}]$ から $K[\mathcal{A}]$ への準同型写像

$$\begin{aligned}\pi : K[\mathbf{x}] &\rightarrow K[\mathcal{A}] \\ x_i &\mapsto \mathbf{t}^{\mathbf{a}_i}\end{aligned}$$

を定義する。このとき、 π の核

$$\text{Ker}(\pi) = \{f \in K[\mathbf{x}] : \pi(f) = 0\}$$

を $I_{\mathcal{A}}$ と表し、トーリック環 $K[\mathcal{A}]$ (あるいは配置 $\mathcal{A}$) のトーリックイデアルとよぶ。

簡単なトーリックイデアルの例を以下に挙げることにする。

例 3.2.5 (トーリックイデアルの例)

$\mathbb{Q}^4$ の配置 $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ を $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 2, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{a}_4 = (0, 0, 1, 1)$, $\mathbf{a}_5 = (1, 1, 1, 1)$ とする。このときトーリック環 $K[\mathcal{A}]$ は単項式 $t_2 t_3^2 t_4^3, t_2 t_4, t_1 t_3, t_3 t_4, t_1 t_2 t_3 t_4$ で生成される $K[t_1, t_2, t_3, t_4]$ の部分環となる。トーリックイデアル $I_{\mathcal{A}}$ は $x_2 x_3 - x_5, x_1 - x_2 x_4^2$ で生成される。

多項式のうち、項の数が2個からなるものを二項式とよび、生成系が二項式からなるイデアルのことを二項式イデアルとよぶ。

命題 3.2.6

トーリックイデアル $I_{\mathcal{A}}$ に属する任意の多項式は $I_{\mathcal{A}}$ に属する二項式の線形結合で表される。また、 $I_{\mathcal{A}}$ は二項式イデアルである。

Proof. 多項式 $f \in K[\mathbf{x}]$ を斉次分解し $f = \sum_i f_i$ とかく。ただし、各 f_i に現れる単項式 u_i, v_i について $\pi(u_i) = \pi(v_i)$ かつ、異なる i, j についてそれぞれ f_i, f_j に現れる単項式 u_i, v_j について $\pi(u_i) = \pi(v_j)$ を満たすとする。このとき、 $f \in I_{\mathcal{A}}$ であるためには任意の i で $f_i \in I_{\mathcal{A}}$ となることが必要十分である。 $f_i = \sum_{k=1}^{s_i} c_{ik} u_{ik}$ (ただし、 $c_{ik} \in K, u_{ik}$ は単項式) について、 f_i のとり方より $c_{i1} = -\sum_{k=2}^{s_i} c_{ik}$ より

$$f_i = \sum_{k=2}^{s_i} c_{ik} (u_{ik} - u_{i1})$$

と書ける。 $(u_{ik} - u_{i1}) \in I_{\mathcal{A}}$ より命題が示される。

系 3.2.7

任意の単項式順序 $<$ についてトーリックイデアル $I_{\mathcal{A}}$ の被約 Gröbner basis は二項式からなる。

Proof. Gröbner basis を計算する方法としてよく知られる Buchberger アルゴリズムより明らかである。Buchberger アルゴリズムについては [3] などが詳しい。

4 有限グラフ上のトーリックイデアル

4.1 有限グラフとトーリック環

まず、有限グラフにおけるさまざまな単語について述べ、トーリック環との対応について説明する。

定義 4.1.1 (有限グラフ [1])

有限集合 V と V に対し $E \subset \{\{i, j\} : i, j \in V, i \neq j\}$ の組 $G = \{V, E\}$ を有限グラフとよび、 V を G の頂点集合、 E を G の辺集合とよぶ。 V の元を頂点、 E の元を辺とよぶ。また、辺 $e = \{i, j\}$ について頂点 i, j は辺 e に属するという。

定義 4.1.2 (部分グラフ [1])

有限グラフ $G = \{V, E\}$ について $V' \subset V$ と $E' \subset E$ が条件「 $e = \{i, j\} \in E'$ ならば $i, j \in V'$ 」を満たすとき有限グラフ $G' = (V', E')$ を G の部分グラフとよぶ。とくに、 $V = V'$ であるものを全域部分グラフとよび、条件「 $i, j \in V', e = \{i, j\} \in E$ ならば $e \in E'$ 」を満たすものを誘導部分グラフとよぶ。

定義 4.1.3 (サイクル、閉路 [1])

有限グラフ G について辺の列 $\Gamma = (e_{p_1}, \dots, e_{p_q})$ が $e_{p_k} = \{i_k, i_{k+1}\}$ なる頂点の列 $(i_1, \dots, i_{q+1})$ が存在するとき、 Γ を G の路と呼ぶ。便宜上辺を含まない路も認めることとし、これを 0 路と呼ぶ。路 Γ に対して非負整数 q を長さという。また、 $i_1 = i_{q+1}$ が成立するとき、 Γ を閉路とよぶ。閉路 C について、 i_1 と i_{q+1} 以外の頂点が相異なる、つまり相異なる q 個の頂点が現れるとき C はサイクルであるという。長さが偶数のサイクルを偶サイクル、奇数のサイクルを奇サイクルとよぶ。サイクル C に現れる頂点 i, j を結ぶ辺であって、サイクルの辺ではないものを C の弦とよぶ。弦を持たないサイクルを極小サイクルとよぶ。

定義 4.1.4 (連結 [1])

有限グラフ G について、 G の任意の頂点 i, j を結ぶような路が存在するとき、 G は連結であるという。有限グラフ $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ について $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ と定める。このとき、 $G = G_1 \cup \dots \cup G_p$ かつ $k \neq l$ なる G_k, G_l について G_k の頂点と G_l の頂点を結ぶような路が存在しないとき、 G の部分グラフ $G_1, \dots, G_p$ を G の連結成分という。

定義 4.1.5 (有限グラフから生起するトーリックイデアル [1])

有限グラフ $G = (V, E)$ について、 $V = \{1, \dots, d\}, E = \{e_1, \dots, e_n\}$ とする。辺 $e_k \in E$ が頂点 i と頂点 j を結ぶとき、 $\rho(e_k) \in \mathbb{Q}^d$ を第 i 成分と第 j 成分が 1 で残りの成分が 0 である点と定める。すると、

$$\mathcal{A}_G = \{\rho(e_1), \dots, \rho(e_n)\}$$

は $\mathbb{Q}^d$ の配置となる。したがって、

$$K[\mathcal{A}_G] = K[\mathbf{t}^{\rho(e_1)}, \dots, \mathbf{t}^{\rho(e_n)}] \subset K[t_1, \dots, t_d]$$

は 2 次単項式で生成される $K[t_1, \dots, t_d]$ の部分環となる。 $K[\mathcal{A}_G]$ を有限グラフ G から生起するトーリック環とよび、たんに $K[G]$ とも書く。トーリック環 $K[G]$ から定まるトーリックイデアル I_G を有限グラフ G から生起するトーリックイデアルとよぶ。

例 4.1.6

たとえば、以下のような有限グラフ G を考える。

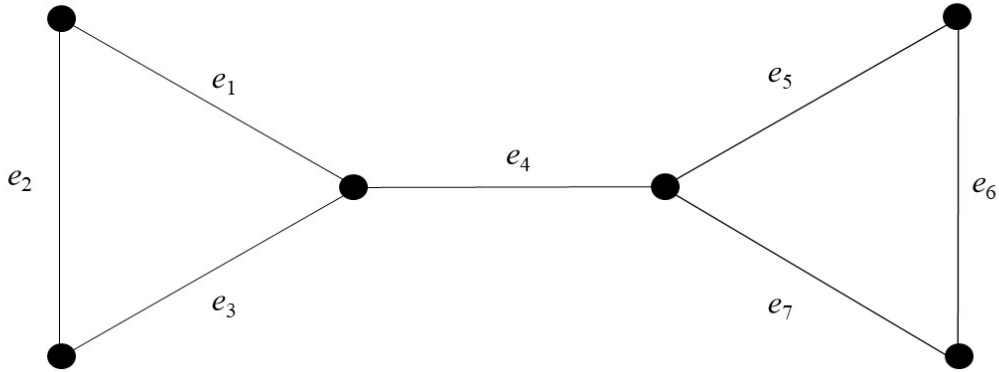


図 1

すると、

$$I_{\mathcal{A}_G} = \langle x_1 x_3 x_5 x_7 - x_2 x_4^2 x_6 \rangle$$

となる。

次に、有限グラフ G 上の閉路とトーリック環 $K[G]$ の二項式の重要な対応付けについて述べる。

$\Gamma = (e_{p_1}, \dots, e_{p_{2q}})$ を G 上の長さが偶数の閉路とする。このとき、

$$f_{\Gamma}^{(+)} = \prod_{k=1}^q x_{p_{2k-1}}, f_{\Gamma}^{(-)} = \prod_{k=1}^q x_{p_{2k}}$$

と定め、 Γ に対応する二項式を

$$f_{\Gamma} = f_{\Gamma}^{(+)} - f_{\Gamma}^{(-)}$$

と定める。

とくに重要なものは長さが偶数かつ原始的な閉路に対応する二項式である。原始的な閉路の定義を以下に述べる。

定義 4.1.7 (原始的な閉路 [1])

有限グラフ G を固定する。長さが偶数の閉路 $\Gamma = (e_{p_1}, \dots, e_{p_{2k}})$ について、以下の条件を満たす長さが偶数の閉路 $\Gamma' = (e_{q_1}, \dots, e_{q_{2l}})$ が存在しないとき、 Γ は原始的な閉路とよぶ。また、 f_{Γ} は原始的な二項式であるという。

(i) $1 \leq l < k$

(ii) $f_{\Gamma'}^{(+)}$ は $f_{\Gamma}^{(+)}$ を割り切り、 $f_{\Gamma'}^{(-)}$ は $f_{\Gamma}^{(-)}$ を割り切る。

命題 4.1.8

有限グラフ G を固定する。長さが偶数の原始的な閉路に対応する二項式 f_{Γ} は I_G を生成する。つまり、

$$I_G = \langle f_{\Gamma} : \Gamma \text{ は } G \text{ 上の長さが偶数の原始的な閉路} \rangle$$

Proof. [1] を参照されたい。

4.2 三角形分割

本節においては、配置の中でもとくによい性質を持つ単模配置について記述する。単模である配置についてはすでに多くのことが知られており、対応するトーリックイデアルについて調べることが一般のものに比べ容易であることがわかっている。

定義 4.2.1 (アフィン独立 [1])

有限部分集合 $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{Q}^d$ について

$$\begin{aligned} r_1\alpha_1 + \dots + r_n\alpha_n &= \mathbf{0} \\ r_1 + \dots + r_n &= 0 \end{aligned}$$

の解が $(r_1, \dots, r_n) = (0, \dots, 0)$ に限るとき、 S はアフィン独立という。

定義 4.2.2 (単体 [1])

配置 $\mathcal{A}$ に含まれるアフィン独立な点の最大個数を $\delta + 1$ であるとき、次元を δ と定義する。 $F \subset \mathcal{A}$ がアフィン独立な点からなるとき F を $\mathcal{A}$ の単体といい、とくに $\delta + 1$ 個の点からなるとき極大な単体という。

極大な単体 F が $\mathbb{Z}F = \mathbb{Z}\mathcal{A}$ を満たすとき、 F は基本単体であるという。単体 F について、 $F \subset F'$ をみたす基本単体 F' が存在するとき、 F は単模であるという。

一般には、 $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}^d$ を仮定することが多い。

例 4.2.3

空間 $\mathbb{Q}^4$ の配置 $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$ を $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1, 1), \mathbf{a}_2 = (1, 0, 1, 1), \mathbf{a}_3 = (1, 1, 0, 1), \mathbf{a}_4 = (1, 1, 1, 0), \mathbf{a}_5 = (1, 1, 1, 1)$ と定める。このとき、 $\mathbb{Z}\mathcal{A} = \mathbb{Z}^4$ であり、 $\mathcal{A}$ の次元は $\delta = 3$ となる。ここで単体

$$F = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$$

をとると、極大であるが

$$\mathbb{Z}F = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \text{ は } 3 \text{ の倍数}\}$$

であるから、 F は基本単体ではない。

定義 4.2.4 (三角形分割 [1])

配置 $\mathcal{A}$ の三角形分割 $\Delta = \{F_1, \dots, F_k : F_i \text{ は単体}\}$ とは、以下の条件を満たすものという。

- (i) $F \in \Delta, F' \subset F \Rightarrow F' \in \Delta$
- (ii) $F, F' \in \Delta \Rightarrow \text{CONV}(F) \cap \text{CONV}(F') = \text{CONV}(F \cap F')$
- (iii) $\text{CONV}(\mathcal{A}) = \bigcup_{F \in \Delta} \text{CONV}(F)$

三角形分割 Δ の元 F_i を Δ の面といい、 Δ が単模であるとは、任意の面が単模であることをいう。また、 $\mathcal{A}$ のすべての三角形分割が単模であるとき、 $\mathcal{A}$ は単模配置であるという。

4.3 サークット, Gröbner basis, Graver basis

本節において、本論文の主要な研究対象とその結果について記述することとする。まずはサーキットの定義を行う。単項式 u に対し集合

$$\text{supp}(u) = \{x_i : x_i \text{ は単項式 } u \text{ に現れる} \}$$

を定める。 $\text{supp}(u)$ を u の台という。そして二項式 $f = u - v$ に対し

$$\text{supp}(f) = \text{supp}(u) \cup \text{supp}(v)$$

と定義する。

定義 4.3.1 (サーキット [1])

配置 $\mathcal{A}$ を固定する。二項式 $f = u - v \in I_{\mathcal{A}}$ について、 $\text{supp}(g) \subsetneq \text{supp}(f)$ なる二項式 $g \in I_{\mathcal{A}}$ が存在しないとき、 f は $I_{\mathcal{A}}$ のサーキットという。配置 $\mathcal{A}$ のトーリックイデアル $I_{\mathcal{A}}$ のサーキット全体の集合を $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ とかく。

次に、universal Gröbner basis について定義しよう。

定義 4.3.2 (universal Gröbner basis [2])

イデアル I のすべての単項式順序の被約 Gröbner basis の和集合を **universal Gröbner basis** という。universal Gröbner basis は有限集合であることを注意しておく。配置 $\mathcal{A}$ のトーリックイデアル $I_{\mathcal{A}}$ の universal Gröbner basis を $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ とかく。

最後に、Graver basis の定義も述べておこう。

定義 4.3.3 (Graver basis [1])

$I_{\mathcal{A}}$ の原始的な二項式全体を $I_{\mathcal{A}}$ の **Graver basis** という。配置 $\mathcal{A}$ の Graver basis を $Gr(\mathcal{A})$ と書く。

すると、これらについて以下のような命題が成り立つことが重要である。

補題 4.3.4 ([1])

二項式 $g \in I_{\mathcal{A}}$ とサーキット $f \in I_{\mathcal{A}}$ について $\text{supp}(g) \subset \text{supp}(f)$ ならば $g \in \langle f \rangle$

Proof. [1] を参照されたい。

命題 4.3.5 ([2])

配置 $\mathcal{A}$ に対して、

$$\mathcal{C}_A \subset \mathcal{U}_A \subset Gr_A$$

が成り立つ。

Proof. $\mathcal{C}_A \subset \mathcal{U}_A$ から示す。 $f = u - v \in \mathcal{C}_A$ (u, v は単項式) について単項式順序 $<$ を $v < u$ かつ $x_i \in \text{supp}(f), x_j \notin \text{supp}(f)$ をみたすようにとる。ある $g = u' - v' \in \mathcal{U}_A$ をとると $u'|u$ とできる。また単項式順序の取り方より $\text{supp}(v') \subset \text{supp}(f)$ より $\text{supp}(g) \subset \text{supp}(f)$ より補題 4.3.4 から $g \in \langle f \rangle$ である。すると、被約 Gröbner basis の性質より $f = g$ が従う。

次に $\mathcal{U}_A \subset Gr_A$ を示す。背理法を用いる。 $f = u - v \in \mathcal{U}_A$ をとる。いま、 f が原始的でないと仮定する。 $g = u' - v' \in I_A$ を $u'|u, v'|v$ を満たすようにとると、被約性から $u' = u$ が従う。また、被約性より $v' \in \text{in}_{<}(I_A)$ となり矛盾が生じる。よって命題が示される。

補題 4.3.6 ([1])

配置 $\mathcal{A}$ について、以下は同値

- (i) $\mathcal{A}$ は単模配置
- (ii) $K[\mathbf{x}]$ の任意の全順序 $<$ について $\text{in}_{<_{grlex}}(I_A)$ は平方自由

Proof. [1] を参照されたい。

補題 4.3.7 ([1])

任意の二項式 $f = u - v \in I_A$ について、サーキット $g = u' - v' \in I_A$ をうまくとると $\text{supp}(u') \subset \text{supp}(u), \text{supp}(v') \subset \text{supp}(v)$ となるようにとれる。

Proof. 変数の個数に対して帰納法を用いる。

補題 4.3.8 ([1])

任意のサーキット $f = u - v$ について、次数付き辞書式順序 $<_{grlex}, <'_{grlex}$ をうまくとると、次を満たすようにできる。

- (i) $u = \text{in}_{<_{grlex}}(f), f \in \mathcal{G}_{<_{grlex}}(I_A)$
- (ii) $v = \text{in}_{<'_{grlex}}(f), f \in \mathcal{G}_{<'_{grlex}}(I_A)$

Proof. $x_i \in \text{supp}(f), x_j \notin \text{supp}(f) \Rightarrow x_i <_{grlex} x_j, x_i <'_{grlex} x_j$ かつ $v <_{grlex} u, u <'_{grlex} v$ と選べばよい。

命題 4.3.9 ([1])

以下は同値

- (i) $\mathcal{A}$ は単模配置
- (ii) I_A の任意のサーキットは square free

(iii) $K[x]$ の任意の全順序 $<$ について $<_{grlex}(I_A)$ は平方自由

Proof. (i) $\Leftrightarrow$ (iii) は補題 4.3.6 より従う。

(ii) $\Rightarrow$ (i) は補題 4.3.7 から原始的二項式がサーキットになることから従う。

(iii) $\Rightarrow$ (ii) は補題 4.3.8 よりサーキット $f = u - v$ について u, v が square free となることから従う。

系 4.3.10 ([1])

$\mathcal{A}$ が単模配置

$$\Rightarrow \mathcal{C}_A = \mathcal{U}_A = Gr_A$$

系 4.3.10 により単模である配置に対してはサーキット、universal Gröbner basis、Graver basis が一致することがわかる。次に主定理を述べる。

主定理

有限グラフ G から生起する配置 $\mathcal{A}_G$ のトーリックイデアル I_G に属する任意の二項式 f_Γ と対応する閉路 Γ について以下が成り立つ。

f_Γ は原始的だがサーキットではない二項式であるとき、 Γ は

$$(C_1, C'_3, C_2, C''_3)$$

の形で表される閉路になる。

ただし、 C_1 の始点と C'_3 の始点と C''_3 の終点、 C'_3 の終点と C''_3 の始点と C_2 の始点はそれぞれ一致し、 $C_1 = (e_{i_1}, \dots, e_{i_{2p-1}})$, $C_2 = (e_{j_1}, \dots, e_{j_{2q-1}})$ はそれぞれ長さが奇数の閉路、 $C_3 = (e_{k_1}, \dots, e_{k_{2r}})$ は長さが偶数の閉路、 $C'_3 = (e_{k_1}, \dots, e_{k_s})$, $C''_3 = (e_{k_{s+1}}, \dots, e_{k_{2r}})$ はそれぞれ C_3 に含まれる路とする。

Proof. 原始的ではあるがサーキットではない二項式 $f = u - v \in I_G$ は、以下を満たす。
 $\text{supp}(g) \subsetneq \text{supp}(f)$ なる二項式 $g \in I_G$ が存在するが、 $u'|u, v'|v$ なる $h = u' - v' \in I_G$ は存在しない。したがって、二項式 g に対応する閉路（原始的であると仮定してよい） C_3 について、 u （あるいは v ）が $f_{C_3}^+$ と $f_{C_3}^-$ に現れる文字をともに含む。さらに、 $\text{supp}(g) \subsetneq \text{supp}(f)$ なる二項式 $g \in I_G$ が存在するので、 f に対応する閉路 Γ は C_3 のすべての辺を含むため、 Γ は C の偶数番目の辺と奇数番目の辺を含む。したがって Γ は C_3 のある頂点を通るような長さが奇数の閉路を含む。また、 Γ は全体として長さが偶数の閉路であるから、長さが奇数であるような閉路を加える必要があるため、命題の形で表される閉路となる。 Q.E.D.

このような閉路の例を挙げておこう。

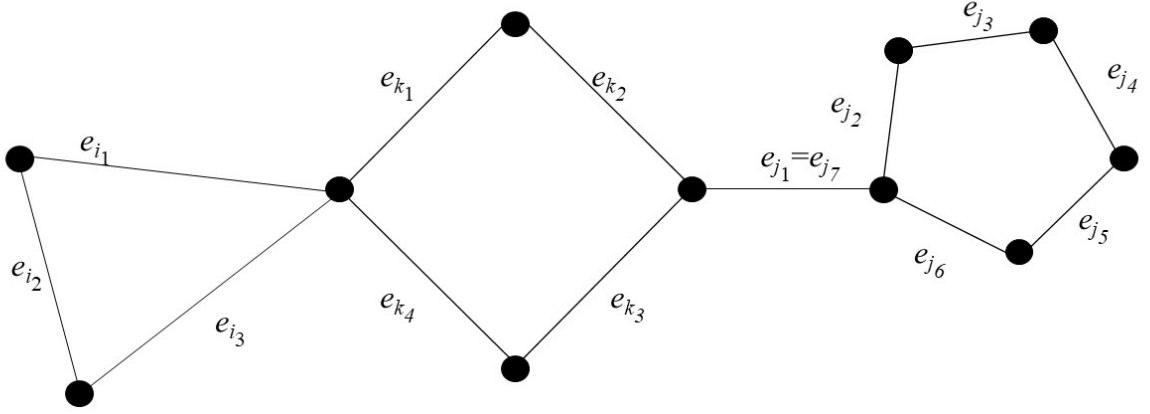


図 2

$$\Gamma = (e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}, e_{k_1}, e_{k_2}, e_{j_1}, e_{j_2}, e_{j_3}, e_{j_4}, e_{j_5}, e_{j_6}, e_{j_1}, e_{k_3}, e_{k_4})$$

さらなる問題として、

- universal Gröbner basis の元ではあるがサーキットではない二項式
- 原始的ではあるが universal Gröbner basis の元ではない二項式

がどのような閉路に相当するかという問題がある。後者については以下でそのような閉路を構成する方法を導くことができた。

補題 4.3.11

有限グラフ G をとる。 G に含まれる極小偶サイクル C に対応する二項式 $f_C \in I_G$ は任意の単項式順序 $<$ について被約 Gröbner basis の元である。

命題 4.3.12

有限グラフ G をとる。 G に含まれる極小偶サイクル $C = (e_1, \dots, e_{2p})$ に対して以下のような路を定める。 $\Gamma_i = (e_{i_1}, \dots, e_{i_{2s_i-1}})$ ただし、 e_i と e_{i+1} と e_{i_1} 、 e_{i+1} と e_{i+2} と $e_{i_{2s_i-1}}$ が頂点を共有しているとする。このとき、

$$\Gamma = (e_1, \Gamma_1, \dots, e_{2p}, \Gamma_{2p})$$

に対応する二項式 f_Γ は原始的だが universal Gröbner basis の元ではない。

Proof. 原始的であることはすぐに確かめられるので、universal Gröbner basis の元ではないことを簡単に示す。 $f_\Gamma = u - v$ について、単項式 u は $x_{e_1}, \dots, x_{e_{2p}}$ を含んでいる。しかし、補題 4.3.11 より C に対応する二項式 $f_C = x_{e_1}x_{e_3} \cdots x_{e_{2p-1}} - x_{e_2}x_{e_4} \cdots x_{e_{2p}}$ は任意の単項式順序について被約 Gröbner basis の元である。すると、 $x_{e_1}x_{e_3} \cdots x_{e_{2p-1}}|u$ かつ $x_{e_2}x_{e_4} \cdots x_{e_{2p}}|u$ より f_Γ は被約 Gröbner basis の元になりえない。

こちらも例を挙げておこう。

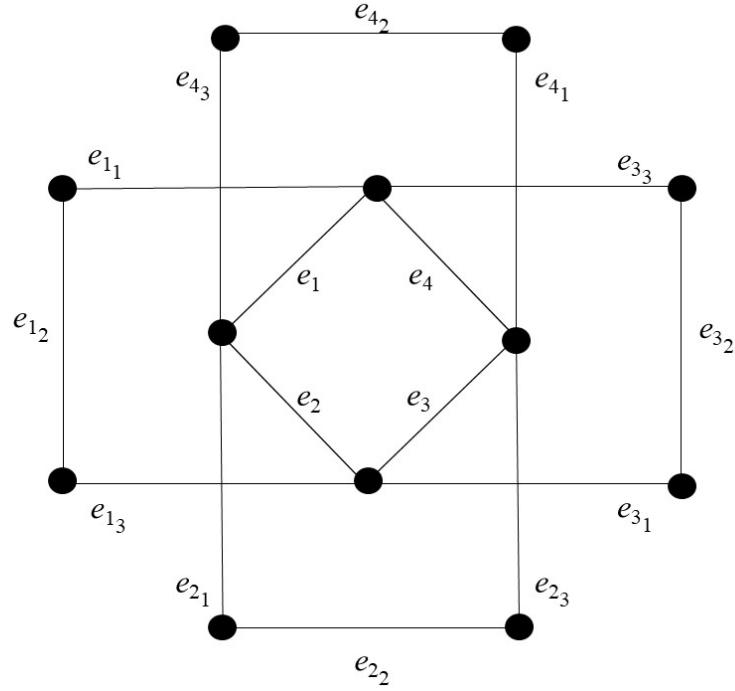


図 3

$$C = (e_1, e_2, e_3, e_4)$$

$$\Gamma = (e_1, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_2, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_3, e_{31}, e_{32}, e_{33}, e_4, e_{41}, e_{42}, e_{43})$$

もちろん、ここで紹介したようなもの以外にも原始的だが universal Gröbner basis の元にならない二項式に対応したグラフはある。そのようなグラフの例も以下に示しておく。

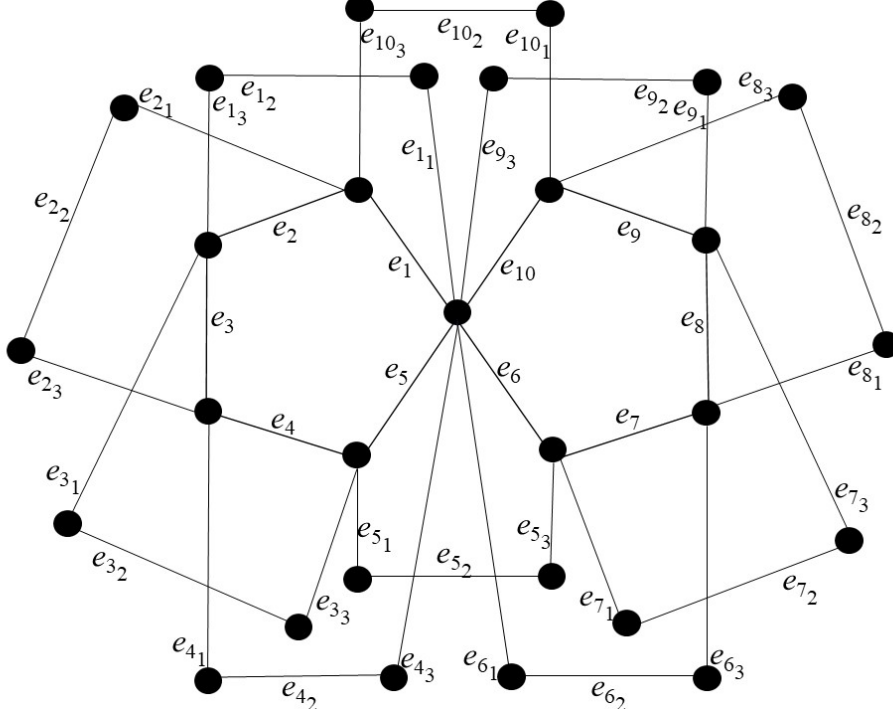


図 4

$$C = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10})$$

$$\Gamma =$$

$$(e_1, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_2, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_3, e_{31}, e_{32}, e_{33}, e_4, e_{41}, e_{42}, e_{43}, e_5, e_{51}, e_{52}, e_{53}, e_6, e_{61}, e_{62}, e_{63}, e_7, e_{71}, e_{72}, e_{73}, e_8, e_{81}, e_{82}, e_{83}, e_9, e_{91}, e_{92}, e_{93}, e_{10}, e_{101}, e_{102}, e_{103})$$

5 今後の課題

本研究においては、サーキット全体と Graver basis の差については結果を与えることができたが universal Gröbner basis と Graver basis の差については具体例を示すにとどまった。また、サーキット全体と universal Gröbner basis についてはその構成についても不明確である。これらについて定式化することが今後の課題であると考えられる。

謝辞

本研究にあたって、日頃よりご指導いただいた楫元教授に感謝いたします。セミナーの発表や研究テーマの決定にあたって頂いた助言は大きな助けとなりました。また、楫研究室、永井研究室所属の皆様には論文やスライドの作成を含めた研究活動に於いて様々な部分でお世話になりましたこと、お礼申し上げます。

参考文献

- [1] 日比孝之. グレブナー基底. 朝倉書店. 2003.
- [2] JST CREST 日比チーム. グレブナー道場. 共立出版. 2011.
- [3] D.Cox, J.Little, and D.O' Shea. Using Algebraic Geometry. Springer Publications Inc., 2007.
- [4] G.Greuel, G.Pfister. A Singular Introduction to Commutative Algebra. Springer Publications Inc., 2008.
- [5] 大杉英史. トーリックイデアルの 20 年.2010.
- [6] C.Tatakis, A.Thoma. On the universal Gröbner bases of toric ideals of graphs. 2010.