

正多面体群による三変数多項式環の不変式環について

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻修士 2 年 梶研究室

村 彩乃 5116A057-6

主定理 正多面体群の不変式環は以下のように書ける。

- $\mathbb{R}[x, y, z]^{G(4)} = \mathbb{R}[f_2, h_3, h_4, g_{6+}]$
- $\mathbb{R}[x, y, z]^{G(8)} = \mathbb{R}[f_2, h_3, h_4, h_6']$
- $\mathbb{R}[x, y, z]^{G(20)} = \mathbb{R}[f_2, h_6'', h_{10}, h_{15}]$

$$\begin{aligned}
 f_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 \\
 h_3(x, y, z) &= xyz \\
 h_4(x, y, z) &= (x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z) \\
 g_{6+}(x, y, z) &= x^2y^4 + y^2z^4 + z^2x^4 \\
 h_6'(x, y, z) &= (x + y)(x - y)(y + z)(y - z)(z + x)(z - x) \\
 h_6''(x, y, z) &= (x + \varphi y)(x - \varphi y)(y + \varphi z)(y - \varphi z)(z + \varphi x)(z - \varphi x) \\
 h_{10}(x, y, z) &= (x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z)(x + \varphi^2 y)(x - \varphi^2 y) \\
 &\quad (y + \varphi^2 z)(y - \varphi^2 z)(z + \varphi^2 x)(z - \varphi^2 x) \\
 h_{15}(x, y, z) &= xyz(x + \varphi^2 y + \varphi z)(x + \varphi^2 y - \varphi z)(x - \varphi^2 y + \varphi z)(x - \varphi^2 y - \varphi z) \\
 &\quad (y + \varphi^2 z + \varphi x)(y + \varphi^2 z - \varphi x)(y - \varphi^2 z + \varphi x)(y - \varphi^2 z - \varphi x) \\
 &\quad (z + \varphi^2 x + \varphi y)(z + \varphi^2 x - \varphi y)(z - \varphi^2 x + \varphi y)(z - \varphi^2 x - \varphi y)
 \end{aligned}$$

定義 1 (ヒルベルト級数 [1]p29), 定理 2 (Molien の公式 [1]p29)

$\mathbb{C}$: 複素数体, $\mathbb{C}[\mathbf{x}] := \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, 有限部分群 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ とする。このときヒルベルト級数は

$$\Phi_G(t) := \sum_{d=0}^{\infty} (\dim \mathbb{C}[\mathbf{x}]_d^G) t^d = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(E - tg)}$$

である。ただし、 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]_d^G = \{f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] \mid f \text{ は } d \text{ 次斉次式}\}$ である。

定義 3 (第 1 不変式と第 2 不変式 [1]p38)

$\mathbb{C}$: 複素数体, $\mathbb{C}[\mathbf{x}] := \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, 有限部分群 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ とする。 G の不変式環 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G$ が

(*) $\exists \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]^G$ s.t. $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ が代数的独立であり、 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G$ が $\mathbb{C}[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]$ 上自由加群を満たすとき

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G = \bigoplus_{j=1}^m \eta_j \mathbb{C}[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n] \quad (\eta_1 = 1, \eta_j \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]^G)$$

を広中分解といい、 θ を第一不変式、 η を第二不変式という。

補題 4 (ヒルベルト級数と第 1 不変式、第 2 不変式との関係 [1]p40)

$\mathbb{C}$: 複素数体, $\mathbb{C}[\mathbf{x}] := \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, 有限部分群 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ とする。 G の不変式環 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G$ は条件 (*) を満たす。このときヒルベルト級数は

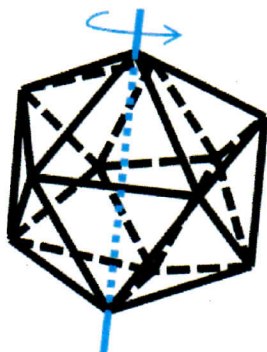
$$\Phi_G(t) = \left(\sum_{j=1}^m t^{\deg \eta_j} \right) / \prod_{i=1}^n (1 - t^{\deg \theta_i})$$

と計算できる。ただし、 θ_i は第一不変式を、 η_j は第二不変式を表す。

補題 5 (不変式を見つけるための補題 [2]p15)

正多面体群を G , 回転対称性を保つ回転軸 $l_1, l_2, \dots, l_k$ それぞれに垂直な原点 O を含む平面の方程式を $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(k)}$ とし, G は $\{l_1, l_2, \dots, l_k\}$ に推移的に作用していると仮定する. このとき G の多項式環への作用は積 $h := h^{(1)}h^{(2)} \dots h^{(k)}$ を定数倍を無視して不変にする.

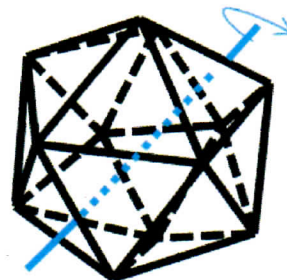
正 20 面体 [6]p51,52



< 1 > 中心 O と頂点を通る軸



< 2 > 中心 O と辺の中点を通る軸



< 3 > 中心 O と面の重心を通る軸

	頂点の数 V	辺の数 E	面の数 F
正 20 面体	12	30	20

型	回転軸の数	回転角	対称変換の数
< 1 >	$6 = V/2$	$2k\pi/5$ ($k = 1, 2, 3, 4$)	24
< 2 >	$15 = E/2$	π	15
< 3 >	$10 = F/2$	$2k\pi/3$ ($k = 1, 2$)	20

指標表 [9]p29

正 20 面体群 $G(20)$ $G(20) \cong \mathfrak{A}_5$ であり, $\mathfrak{A}_5$ の指標表は

$\mathfrak{A}_5$	1	20	15	12	12
	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(21345)
自明表現 U	1	1	1	1	1
標準表現 V	4	1	0	-1	-1

今回は自明表現 U の欄を参照すればいいので, 次数 2, 6, 10, 15 の不変式は $G(20)$ の多項式環への作用で不変である.

参考文献

1. B.Sturmfels. Algorithms in Invariant Theory. Springer-Verlag/Wien, New York, 2008.
2. J.K.Verma. RINGS OF INVARIANTS OF FINITE GROUPS. <http://www.math.iitb.ac.in/~jkv/invar.pdf>
3. D. Cox, J. Little, and D. O'Shea. Ideals, Varieties, and Algorithms. SPI, New York, 2007.
4. 向井茂. モジュライ理論 I, II. 岩波書店, 2008
5. 北川正一. 正 8 面体群の構造. 九州国際大学教養研究 第 16 巻第 2 号, 2009.
6. 北川正一. 正 20 面体群の構造. 九州国際大学教養研究 第 16 巻第 3 号, 2010.
7. Singular, Online Manual, D.7.1 finvar lib. http://www.singular.uni-kl.de/Manual/latest/sing_1619.htm SEC1695
8. 菅本守. 超立方体回転群により不変な部分環を生成する斉次多項式. 早稲田大学大学院基幹理工学研究修士論文, 2013
9. W.Fulton, J.Harris. Representation Theory. Springer-Verlag/Wien, New York, 2004.