

正多面体群による三変数多項式環の不変式環について

村 彩乃

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻修士 2 年
楯研究室

2018 年 2 月 7 日

正多面体群における不変式環を考察する上で

従来の研究 ... 複素係数二変数多項式環 (Riemann 球 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上) が主流。

→

正多面体群における不変式環を考察する上で

従来の研究 ... 複素係数二変数多項式環 (Riemann 球 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上) が主流。

→ 今回の研究 ... 実係数三変数多項式環 で考察。
Verma の論文 [2] にある幾何学的考察を基に
具体的に不変式を導出。

主定理

正 4 面体群 $G(4)$ の不変式環は以下のように書ける。

$$\mathbb{R}[x, y, z]^{G(4)} = \mathbb{R}[f_2, h_3, h_4, g_{6+}]$$

$$\begin{cases} f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ h_3(x, y, z) = xyz \\ h_4(x, y, z) = (x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z) \\ g_{6+}(x, y, z) = x^2y^4 + y^2z^4 + z^2x^4 \end{cases}$$

正 8 面体群 $G(8)$ の不変式環は以下のように書ける。

$$\mathbb{R}[x, y, z]^{G(8)} = \mathbb{R}[f_2, h_3, h_4, h'_6]$$

$$\begin{cases} f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ h_3(x, y, z) = xyz \\ h_4(x, y, z) = (x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z) \\ h'_6(x, y, z) = (x + y)(x - y)(y + z)(y - z)(z + x)(z - x) \end{cases}$$

主定理

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式環は以下のように書ける。

$$\mathbb{R}[x, y, z]^{G(20)} = \mathbb{R}[f_2, h_6'', h_{10}, h_{15}]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ h_6''(x, y, z) = (x + \varphi y)(x - \varphi y)(y + \varphi z)(y - \varphi z)(z + \varphi x)(z - \varphi x) \\ h_{10}(x, y, z) = (x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z) \\ \quad (x + \varphi^2 y)(x - \varphi^2 y)(y + \varphi^2 z)(y - \varphi^2 z)(z + \varphi^2 x)(z - \varphi^2 x) \\ h_{15}(x, y, z) = xyz(x + \varphi^2 y + \varphi z)(x + \varphi^2 y - \varphi z)(x - \varphi^2 y + \varphi z) \\ \quad (x - \varphi^2 y - \varphi z)(y + \varphi^2 z + \varphi x)(y + \varphi^2 z - \varphi x) \\ \quad (y - \varphi^2 z + \varphi x)(y - \varphi^2 z - \varphi x)(z + \varphi^2 x + \varphi y) \\ \quad (z + \varphi^2 x - \varphi y)(z - \varphi^2 x + \varphi y)(z - \varphi^2 x - \varphi y) \end{array} \right.$$

φ は黄金比

ヒルベルト級数の定義

定義 1 (ヒルベルト級数) [1]p29

$\mathbb{C}$: 複素数体, $\mathbb{C}[\mathbf{x}] := \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, 有限部分群 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ とする。このとき **ヒルベルト級数**を

$$\Phi_G(t) = \sum_{d=0}^{\infty} (\dim \mathbb{C}[\mathbf{x}]_d^G) t^d$$

と定義する。ただし、 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]_d^G = \{ f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]^G \mid f \text{ は } d \text{ 次斉次式} \}$ である。

定理 2 (Molien の公式) [1]p29

$\mathbb{C}$: 複素数体, 有限部分群 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ とする。このときヒルベルト級数は

$$\Phi_G(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(E - tg)}$$

となる。ただし、 $|G|$ は群 G の元の個数、 E は $n \times n$ の単位行列とする。

第 1 不変式と第 2 不変式の定義

定義 3 (第 1 不変式と第 2 不変式) [1]p38

$\mathbb{C}$: 複素数体, $\mathbb{C}[\mathbf{x}] := \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, 有限部分群 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ とする。 G の不変式環 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G$ が

(*) $\exists \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]^G$ s.t. $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ が代数的独立であり、
 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G$ が $\mathbb{C}[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]$ 上自由加群

を満たすとき

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G = \bigoplus_{j=1}^m \eta_j \mathbb{C}[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]$$

$$(\eta_1 = 1, \eta_j \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]^G)$$

を**広中分解**といい、 θ を**第 1 不変式**、 η を**第 2 不変式**という。

ヒルベルト級数と第 1 不変式、第 2 不変式との関係

補題 4 (ヒルベルト級数と第 1 不変式、第 2 不変式との関係) [1]p40

$\mathbb{C}$: 複素数体, $\mathbb{C}[\mathbf{x}] := \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, 有限部分群 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ とする。 G の不変式環 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G$ は条件 (*) を満たす。このときヒルベルト級数は

$$\Phi_G(t) = \left(\sum_{j=1}^m t^{\deg \eta_j} \right) / \prod_{i=1}^n (1 - t^{\deg \theta_i})$$

と計算できる。ただし、 θ_i は第 1 不変式を、 η_j は第 2 不変式を表す。

つまり、ヒルベルト級数を計算すれば

ヒルベルト級数と第 1 不変式、第 2 不変式との関係

補題 4 (ヒルベルト級数と第 1 不変式、第 2 不変式との関係) [1]p40

$\mathbb{C}$: 複素数体, $\mathbb{C}[\mathbf{x}] := \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, 有限部分群 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ とする。 G の不変式環 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G$ は条件 (*) を満たす。このときヒルベルト級数は

$$\Phi_G(t) = \left(\sum_{j=1}^m t^{\deg \eta_j} \right) / \prod_{i=1}^n (1 - t^{\deg \theta_i})$$

と計算できる。ただし、 θ_i は第 1 不変式を、 η_j は第 2 不変式を表す。

つまり、ヒルベルト級数を計算すれば
分母から 第 1 不変式の次数とその個数 を
分子から 第 2 不変式の次数とその個数 を確かめることができる。

不変式を見つけるための補題

補題 5 (不変式を見つけるための補題) [2]p15

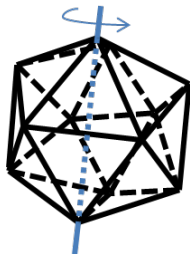
正多面体群を G , 回転対称性を保つ回転軸 $l_1, l_2, \dots, l_k$ それぞれに垂直な原点 O を含む平面の方程式を $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(k)}$ とし、 G は $\{l_1, l_2, \dots, l_k\}$ に推移的に作用していると仮定する。

このとき G の多項式環への作用は積 $h := h^{(1)}h^{(2)} \dots h^{(k)}$ を定数倍を無視して不変にする。

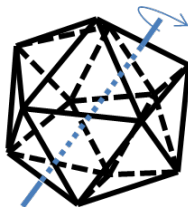
<証明>

$h^{(k)}$ は回転軸 l_k に関する回転行列 gl_k で不変である。また G の多項式環への作用は定数倍を無視して $\{h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(k)}\}$ の入れ替えとして作用する。よって積 h を定数倍を無視して不変にする。

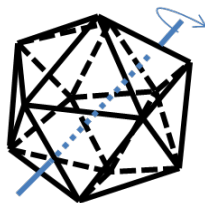
正 20 面体群 $G(20)$ の不変式



$\langle 1 \rangle$ 中心 O と
頂点を通る軸



$\langle 2 \rangle$ 中心 O と
辺の中点を通る軸



$\langle 3 \rangle$ 中心 O と
面の重心を通る軸

$$(0, \pm 1, \pm \varphi),$$

$$(\pm 1, \pm \varphi, 0),$$

$$(\pm \varphi, 0, \pm 1)$$

$$\text{ただし、 } \varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \iff \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式

正 20 面体群 $G(20)$ の要素が決定したので、定理 2(Molien の公式) より

$$\Phi(\mathbb{R}[x, y, z]^{G(20)}, t) = \frac{t^8 + t^7 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1}{-t^{11} - t^{10} + t^9 + 2t^8 + t^7 - t^4 - 2t^3 - t^2 + t + 1}$$

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式

正 20 面体群 $G(20)$ の要素が決定したので、定理 2(Molien の公式) より

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbb{R}[x, y, z]^{G(20)}, t) &= \frac{t^8 + t^7 - t^5 - t^4 - t^3 + t + 1}{-t^{11} - t^{10} + t^9 + 2t^8 + t^7 - t^4 - 2t^3 - t^2 + t + 1} \\ &= \frac{1 + t^{15}}{(1 - t^2)(1 - t^6)(1 - t^{10})}\end{aligned}\tag{1}$$

次数 2、6、10、15 の不変式が 1 つずつ存在。(補題 4 より)

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式 ～幾何学的な視点～

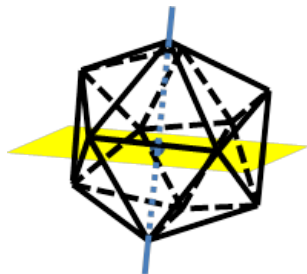
- 正 20 面体群 $G(20)$ は回転群であることから

$$f_2 = x^2 + y^2 + z^2$$

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式 ～幾何学的な視点～

- $\langle 1 \rangle$ 型（中心 O と頂点を通る軸）の各回転軸について原点 O を通る垂直な平面の方程式を求める。

$$h_6'' \quad \begin{cases} x \pm \varphi y = 0 \\ y \pm \varphi z = 0 \\ z \pm \varphi x = 0 \end{cases}$$

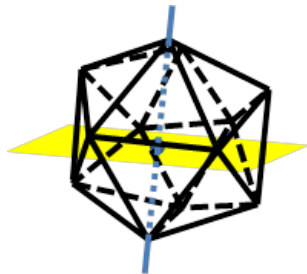


$\langle 1 \rangle$ 中心 O と頂点を通る軸

頂点の数は 12 個 $\longrightarrow$ 回転軸は 6 本
 $\longrightarrow$ 原点 O を通る各回転軸に垂直な平面は計 6 個

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式 ～幾何学的な視点～

$$h_6'' \begin{cases} x \pm \varphi y = 0 \\ y \pm \varphi z = 0 \\ z \pm \varphi x = 0 \end{cases}$$

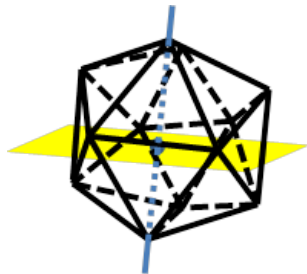


$\langle 1 \rangle$ 中心 O と頂点を通る軸

各平面の方程式による正 20 面体群 $G(20)$ の多項式環への作用は定数倍の違いを無視して平面の方程式の入れ替えで作用している。

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式 ～幾何学的な視点～

$$h_6'' \begin{cases} x \pm \varphi y = 0 \\ y \pm \varphi z = 0 \\ z \pm \varphi x = 0 \end{cases}$$



$\langle 1 \rangle$ 中心 O と頂点を通る軸

各平面の方程式による正 20 面体群 $G(20)$ の多項式環への作用は定数倍の違いを無視して平面の方程式の入れ替えで作用している。

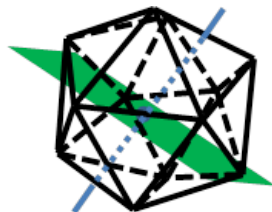
h_6'' は正 20 面体群 $G(20)$ の多項式環への作用で不変である。

$$h_6'' : = (x + \varphi y)(x - \varphi y)(y + \varphi z)(y - \varphi z)(z + \varphi x)(z - \varphi x)$$

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式 ～幾何学的な視点～

- $\langle 2 \rangle$ 型（中心 O と辺の中点を通る軸）の各回転軸について原点 O を通る垂直な平面の方程式を求める。

$$h_{15} \left\{ \begin{array}{lll} x = 0 & y = 0 & z = 0 \\ x \pm \varphi^2 y \pm \varphi z = 0 \\ y \pm \varphi^2 z \pm \varphi x = 0 \\ z \pm \varphi^2 x \pm \varphi y = 0 \end{array} \right.$$

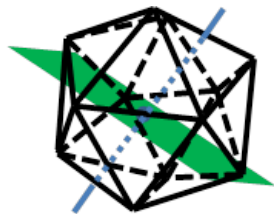


$\langle 2 \rangle$ 中心 O と辺の中点を通る軸

辺の数は 30 本 → 回転軸は 15 本
→ 原点 O を通る各回転軸に垂直な平面は計 15 個

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式 ～幾何学的な視点～

$$h_{15} \left\{ \begin{array}{lll} x = 0 & y = 0 & z = 0 \\ x \pm \varphi^2 y \pm \varphi z = 0 \\ y \pm \varphi^2 z \pm \varphi x = 0 \\ z \pm \varphi^2 x \pm \varphi y = 0 \end{array} \right.$$

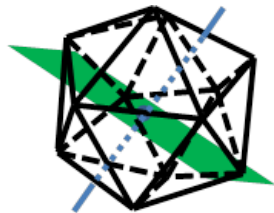


$\langle 2 \rangle$ 中心 O と辺の中点を通る軸

各平面の方程式による正 20 面体群 $G(20)$ の多項式環への作用は定数倍の違いを無視して平面の方程式の入れ替えで作用している。

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式 ～幾何学的な視点～

$$h_{15} \begin{cases} x = 0 & y = 0 & z = 0 \\ x \pm \varphi^2 y \pm \varphi z = 0 \\ y \pm \varphi^2 z \pm \varphi x = 0 \\ z \pm \varphi^2 x \pm \varphi y = 0 \end{cases}$$



$\langle 2 \rangle$ 中心 O と辺の中点を通る軸

各平面の方程式による正 20 面体群 $G(20)$ の多項式環への作用は定数倍の違いを無視して平面の方程式の入れ替えで作用している。

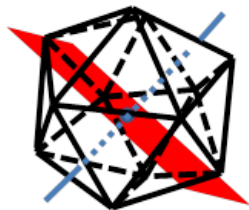
h_{15} は正 20 面体群 $G(20)$ の多項式環への作用で不変である。

$$\begin{aligned} h_{15} := & x \cdot y \cdot z (x + \varphi^2 y + \varphi z) (x + \varphi^2 y - \varphi z) (x - \varphi^2 y + \varphi z) (x - \varphi^2 y - \varphi z) \\ & (y + \varphi^2 z + \varphi x) (y + \varphi^2 z - \varphi x) (y - \varphi^2 z + \varphi x) (y - \varphi^2 z - \varphi x) \\ & (z + \varphi^2 x + \varphi y) (z + \varphi^2 x - \varphi y) (z - \varphi^2 x + \varphi y) (z - \varphi^2 x - \varphi y) \end{aligned}$$

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式 ～幾何学的な視点～

- $\langle 3 \rangle$ 型（中心 O と面の重心を通る軸）の各回転軸について原点 O を通る垂直な平面の方程式を求める。

$$h_{10} \begin{cases} x \pm y \pm z = 0 \\ x \pm \varphi^2 y = 0 \\ y \pm \varphi^2 z = 0 \\ z \pm \varphi^2 x = 0 \end{cases}$$

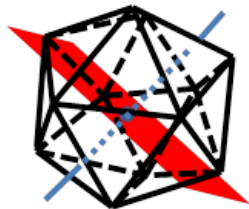


$\langle 3 \rangle$ 中心 O と面の重心を通る軸

面の数は 20 個 → 回転軸は 10 本
→ 原点 O を通る各回転軸に垂直な平面は計 10 個

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式 ～幾何学的な視点～

$$h_{10} \left\{ \begin{array}{l} x \pm y \pm z = 0 \\ x \pm \varphi^2 y = 0 \\ y \pm \varphi^2 z = 0 \\ z \pm \varphi^2 x = 0 \end{array} \right.$$

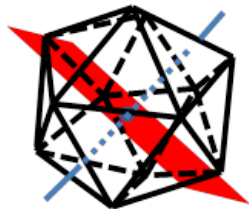


$\langle 3 \rangle$ 中心 O と面の重心を通る軸

各平面の方程式による正 20 面体群 $G(20)$ の多項式環への作用は定数倍の違いを無視して平面の方程式の入れ替えで作用している。

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式 ～幾何学的な視点～

$$h_{10} \left\{ \begin{array}{l} x \pm y \pm z = 0 \\ x \pm \varphi^2 y = 0 \\ y \pm \varphi^2 z = 0 \\ z \pm \varphi^2 x = 0 \end{array} \right.$$



$\langle 3 \rangle$ 中心 O と面の重心を通る軸

各平面の方程式による正 20 面体群 $G(20)$ の多項式環への作用は定数倍の違いを無視して平面の方程式の入れ替えで作用している。

h_{10} は正 20 面体群 $G(20)$ の多項式環への作用で不変である。

$$h_{10} : = (x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(x - y - z) \\ (x + \varphi^2 y)(x - \varphi^2 y)(y + \varphi^2 z)(y - \varphi^2 z)(z + \varphi^2 x)(z - \varphi^2 x)$$

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式

不変式の関係式

$$\begin{aligned} & (165376\varphi - 267584)h_{15}^2 + \{4f_2^9h_6''^2 - (608\varphi - 984)f_2^7h_6''h_{10} + \\ & (182\varphi - 273)f_2^6h_6''^3 - (10336\varphi - 16724)f_2^5h_{10}^2 + (51198\varphi - 82839)f_2^4h_6''^2h_{10} - \\ & (5504\varphi - 8944)f_2^3h_6''^4 + (3557450\varphi - 5756075)f_2^2h_6''h_{10}^2 - \\ & (982080\varphi - 1589040)f_2h_6''^3h_{10} + (58752\varphi - 95040)h_6''^5 + \\ & (46512450\varphi - 75258725)h_{10}^3\} = 0 \end{aligned} \quad \text{in } \mathbb{R}[x, y, z]$$

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式

不変式の関係式

$$\begin{aligned} & (165376\varphi - 267584)h_{15}^2 + \{4f_2^9h_6''^2 - (608\varphi - 984)f_2^7h_6''h_{10} + \\ & (182\varphi - 273)f_2^6h_6''^3 - (10336\varphi - 16724)f_2^5h_{10}^2 + (51198\varphi - 82839)f_2^4h_6''^2h_{10} - \\ & (5504\varphi - 8944)f_2^3h_6''^4 + (3557450\varphi - 5756075)f_2^2h_6''h_{10}^2 - \\ & (982080\varphi - 1589040)f_2h_6''^3h_{10} + (58752\varphi - 95040)h_6''^5 + \\ & (46512450\varphi - 75258725)h_{10}^3\} = 0 \end{aligned} \quad \text{in } \mathbb{R}[x, y, z]$$

$$\mathbb{R}[x, y, z]^{G(20)} = \mathbb{R}[f_2, h_6'', h_{10}, h_{15}]$$

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式 ～singular の計算～

第 1 不変式

$$f_2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$f'_6 := 7(x^6 + y^6 + z^6) + (3\varphi + 18)(x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2) - (3\varphi - 21)(x^2y^4 + y^2z^4 + z^2x^4) + 54x^2y^2z^2,$$

$$f_{10} := 19(x^{10} + y^{10} + z^{10}) + (27\varphi + 63)(x^8y^2 + y^8z^2 + z^8x^2) - (27\varphi - 90)(x^2y^8 + y^2z^8 + z^2x^8) + (42\varphi + 126)(x^6y^4 + y^6z^4 + z^6x^4) - (42\varphi - 168)(x^4y^6 + y^4z^6 + z^4x^6) + 504(x^6y^2z^2 + y^6z^2x^2 + z^6x^2y^2) + 630(x^4y^4z^2 + y^4z^4x^2 + z^4x^4y^2)$$

第 2 不変式

$$g_{15} := xyz\{(x^{12} + y^{12} + z^{12}) - (2\varphi + 12)(x^{10}y^2 + y^{10}z^2 + z^{10}x^2) + (2\varphi - 14)(x^2y^{10} + y^2z^{10} + z^2x^{10}) + (11\varphi + 51)(x^8y^4 + y^8z^4 + z^8x^4) - (11\varphi - 62)(x^4y^8 + y^4z^8 + z^4x^8) - 84(x^6y^6 + y^6z^6 + z^6x^6) + 50(x^8y^2z^2 + y^8z^2x^2 + z^8x^2y^2) - (132\varphi + 24)(x^6y^4z^2 + y^6z^4x^2 + z^6x^4y^2) + (132\varphi - 156)(x^2y^4z^6 + y^2z^4x^6 + z^2x^4y^6) + 378x^4y^4z^4\}$$

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式 ～singular の計算～

不変式の関係式 (singular)

$$\begin{aligned} &10125g_{15}^2 + (54329344f_2^{15} - 35012608f_2^{12}f_6' + 9106944f_2^9f_6'^2 - \\ &718848f_2^{10}f_{10} - 1190080f_2^6f_6'^3 + 304128f_2^7f_6'f_{10} + 72625f_2^3f_6'^4 - \\ &14040f_2^4f_6'^2f_{10} - 48816f_2^5f_{10}^2 - 1125f_6'^5 - 3375f_2f_6'^3f_{10} + \\ &10260f_2^2f_6'f_{10}^2 - 405f_{10}^3) = 0 \end{aligned} \quad \text{in } \mathbb{R}[x, y, z]$$

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式 ～singular の計算～

不変式の関係式 (singular)

$$\begin{aligned} &10125g_{15}^2 + (54329344f_2^{15} - 35012608f_2^{12}f_6' + 9106944f_2^9f_6'^2 - \\ &718848f_2^{10}f_{10} - 1190080f_2^6f_6'^3 + 304128f_2^7f_6'f_{10} + 72625f_2^3f_6'^4 - \\ &14040f_2^4f_6'^2f_{10} - 48816f_2^5f_{10}^2 - 1125f_6'^5 - 3375f_2f_6'^3f_{10} + \\ &10260f_2^2f_6'f_{10}^2 - 405f_{10}^3) = 0 \end{aligned} \quad \text{in } \mathbb{R}[x, y, z]$$

(再記) 不変式の関係式

$$\begin{aligned} &(165376\varphi - 267584)h_{15}^2 + \{4f_2^9h_6''^2 - (608\varphi - 984)f_2^7h_6''h_{10} + \\ &(182\varphi - 273)f_2^6h_6''^3 - (10336\varphi - 16724)f_2^5h_{10}^2 + (51198\varphi - 82839)f_2^4h_6''^2h_{10} - \\ &(5504\varphi - 8944)f_2^3h_6''^4 + (3557450\varphi - 5756075)f_2^2h_6''h_{10}^2 - \\ &(982080\varphi - 1589040)f_2h_6''^3h_{10} + (58752\varphi - 95040)h_6''^5 + \\ &(46512450\varphi - 75258725)h_{10}^3\} = 0 \end{aligned} \quad \text{in } \mathbb{R}[x, y, z]$$

正 20 面体群 $G(20)$ の不変式

幾何学的な視点により求めた h_6'', h_{10}, h_{15} と計算ソフト singular で導出した f_6', f_{10}, g_{15} との関係を考えてと

$$\begin{aligned}(6\varphi - 9)h_6'' + 7f_2^3 - f_6' &= 0 \\ (1610\varphi - 2605)h_{10} + 76f_2^5 + (246\varphi - 369)f_2^2h_6'' - 4f_{10} &= 0 \\ (144\varphi - 233)h_{15} - g_{15} &= 0\end{aligned}$$

1. B.Sturmfels. Algorithms in Invariant Theory. Springer-Verlag/Wien, New York, 2008.
2. J.K.Verma. RINGS OF INVARIANTS OF FINITE GROUPS.
<http://www.math.iitb.ac.in/~jkv/invar.pdf>
3. D. Cox, J. Little, and D. O'Shea. Ideals, Varieties, and Algorithms. Springer Publications Inc., New York, 2007.
4. 向井茂. モジュライ理論 I, II. 岩波書店, 2008
5. 北川正一. 正 8 面体群の構造. 九州国際大学教養研究 第 16 巻第 2 号, 2009.
6. 北川正一. 正 20 面体群の構造. 九州国際大学教養研究 第 16 巻第 3 号, 2010.
7. Singular, Online Manual, D.7.1 finvar lib.
http://www.singular.uni-kl.de/Manual/latest/sing_1619.htm SEC1695
8. 菅本守. 超立方体回転群により不変な部分環を生成する斉次多項式. 早稲田大学大学院基幹理工学研究修士論文, 2013