

Parameterized Border Basis

数学応用数理専攻修士 2 年 楯研究室 石山健太

2016 年 2 月 5 日

1 Introduction

Border basis と呼ばれる basis に対して、parameter を付与した時に parameter の値によって本当に border basis となりうるかどうかを判定したい。そのための新たなツールとして parameterized border basis について述べる。

多項式環 $k[x_1, \dots, x_n]$ について、単項式集合 $\mathbb{T}^n := \{x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \mid a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ を定める。

Definition 1.1. $\mathcal{S}, \mathcal{O}$ を空でない $\mathbb{T}^n$ の部分集合とする。

- (a) $\mathcal{S}$ の closure $\overline{\mathcal{S}}$ とは次の $\mathbb{T}^n$ の部分集合である。 $\overline{\mathcal{S}} := \{t \in \mathbb{T}^n \mid t|t' \exists t' \in \mathcal{S}\}$.
- (b) $\overline{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ である時 $\mathcal{O}$ を order と言う。order ideal とも言う。

Definition 1.2. order $\mathcal{O}$ について $\mathcal{O}$ の border $\partial\mathcal{O}$ とは次のことを言う。

$$\partial\mathcal{O} := (x_1\mathcal{O} \cup \dots \cup x_n\mathcal{O}) \setminus \mathcal{O}.$$

order $\mathcal{O} = \{t_1, \dots, t_\mu\}$ と border $\partial\mathcal{O} = \{b_1, \dots, b_\nu\}$ を定めた上で

Definition 1.3. 次のような多項式の集合 $G = \{g_1, \dots, g_\nu\}$ を $\mathcal{O}$ -border prebasis と呼ぶ。

$$g_j = b_j - \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_{ij} t_i \quad (\alpha_{ij} \in k, 1 \leq i \leq \mu, 1 \leq j \leq \nu)$$

Definition 1.4. $\mathcal{O}$ -border prebasis $G = \{g_1, \dots, g_\nu\}$ に対し、 G を含む $k[x_1, \dots, x_n]$ のイデアル I に対して、次の同値な条件を満たす G を I の $\mathcal{O}$ -border basis と呼ぶ。

- (a) $\mathcal{O}$ は P/I における k -ベクトル空間の basis である。
- (b) $I \cap \langle \mathcal{O} \rangle_k = \{0\}$.
- (c) $k[x_1, \dots, x_n] = I \oplus \langle \mathcal{O} \rangle_k$.

2 parameterized border basis

parameter $e_1, \dots, e_m$ を含めた有理関数係数多項式環 $k(e_1, \dots, e_m)[x_1, \dots, x_n]$ (以後 $k(e)[x]$ と省略して書く) について考える。

Definition 2.1. $I \subset k(e)[x]$ を zero-dimensional ideal とし、 $I \cap \langle \mathcal{O} \rangle_{k(e)} = \{0\}$ となるような適当な order $\mathcal{O} = \{t_1, \dots, t_\mu\}$ と、対応する border $\partial\mathcal{O} = \{b_1, \dots, b_\nu\}$ を取り、 $\mathcal{O}$ -border basis $G = \{g_1, \dots, g_\nu\}$ を取る。

$$g_i = b_i - \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij}(e) t_j \quad (\alpha_{ij} \in k(e) \text{ } e \text{ の有理関数})$$

このような border basis G に対し、次のような $G' = \{g'_1, \dots, g'_\nu\}$ を取る

$$g'_i = \beta_i(e) b_i - \sum_{j=1}^{\mu} \alpha'_{ij}(e) t_j \quad (\alpha'_{ij}, \beta_i \in k[e])$$

この g'_i は $g'_i = \beta_i(e)g_i$ であり、 e について既約であるものとする。特に、任意の i に対し $V(\beta_i(e), \alpha'_{i1}(e), \dots, \alpha'_{i\mu}(e)) = \phi$ である。具体的には既約な α_{ij} の分母にあたる e の多項式を u_{ij} とした時 $\beta_i(e) = LCM(u_{i1}, \dots, u_{i\mu})$ を取ればよい。この時この $G' = \{g'_1, \dots, g'_\nu\}$ をここでは parameterized $\mathcal{O}$ -border basis と呼ぶものとする。

Theorem 2.2. zero-dimensional ideal $I \subset k(e)[x]$ と $a \in k^m$ に対して定める写像

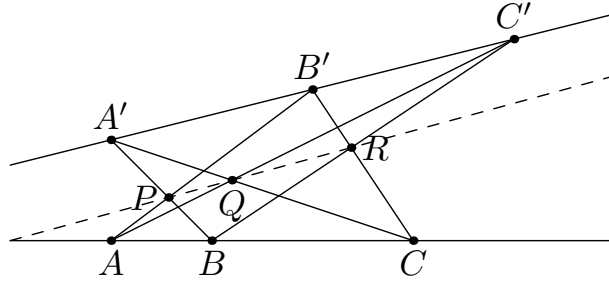
$$\phi_a : k[e][x] \rightarrow k[x] \quad (f(e, x) \mapsto f(a, x))$$

について、 I_a を $\phi_a(I \cap k[e][x])$ により生成された $k[x]$ のイデアルとする。 I の $\mathcal{O}$ -border basis G と、対応する parameterized $\mathcal{O}$ -border basis G' について次のことが成り立つ。

$$\phi_a(G') \text{ は定数倍された } I_a \text{ の } \mathcal{O}\text{-border basis である} \Leftrightarrow \beta_i(a) \neq 0 \quad (\forall i = 1, \dots, \mu)$$

3 Example

Figure 3.1. (パップスの定理)



$$A(0, 0), B(1, 0), C(e_1, 0), A'(e_2, e_3), B'(e_4, e_5), C'(e_6, e_7)$$

参考文献

- [AFT] J. Abbott, C. Fassino, M. L. Torrente, Stable border bases for ideals of points, Journal of Symbolic Computation 43, 2008, 883-894
- [T] 手島 悠人, Border Bases による代数曲線回帰について, (<http://pc193097.pc.waseda.ac.jp/MasterThesis/index.html>), 2011
- [KR2] M. Kreuzer, L. Robbiano, Computational Commutative Algebra 2, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000
- [CLO] D. A. Cox, J. Little, D. O'Shea Ideals, Varieties, and Algorithms, Springer International Publishing Switzerland, 2015
- [S] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann Singular, 2015