

Parameterized Border Basis

早稲田大学基幹理工学研究科数学応用数理専攻
石山 健太

2016/2/5

Introduction

Border basis とは 0 次元イデアルに対して用いられる basis の一種であり、計算代数、代数幾何学などにも用いられている。

border basis G の代表的な特徴として

- 多項式をあるアルゴリズムで G による割り算をすると余りが一意的である
- G の先頭項をある程度自在に選べる
- 生成元を微変化をさせた場合でも G に大きな変化が生じないなど、Gröbner basis に似て異なる性質を持つ。[KR2]

Introduction

- border basis は 0 次元に限った basis である。
⇒ 変数をパラメータ化すれば 0 次元としてみなせる。
- しかしパラメータを付随した border basis はパラメータを固定すると border basis でなくなる可能性がある。
⇒ これを判断する策として border basis とパラメータに関する新たな定理を得た。

さらに、この定理を利用した新たな応用法も見出した。

Definitions toward border basis[KR2]

$$P := k[x_1, \dots, x_n], \quad \mathbb{T}^n := \{x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \mid a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

Order

$$\mathbb{T}^n \supset \mathcal{S}, \quad \overline{\mathcal{S}} := \{x \in \mathbb{T}^n \mid x \mid x' \ \exists x' \in \mathcal{S}\} (\mathcal{S} \text{ の closure})$$

$\mathcal{S} = \overline{\mathcal{S}}$ である時 $\mathcal{S}$ を order と言う。(order ideal とも言う)

Border

$\mathcal{O}$ は order であるとする。

$$\partial \mathcal{O} := (x_1 \mathcal{O} \cup \dots \cup x_n \mathcal{O}) \setminus \mathcal{O}$$

この $\partial \mathcal{O}$ を $\mathcal{O}$ の border と呼ぶ。

以下、注釈のない $\mathcal{O}$ は全て order あるものとする。

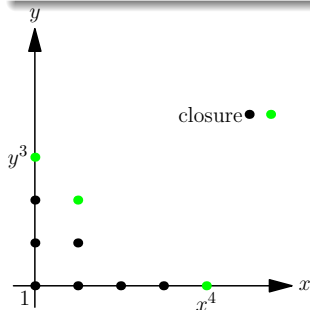
Example

Closure

$$\mathcal{S} = \{x^4, xy^2, y^3\} \rightarrow \overline{\mathcal{S}} = \{1, x, x^2, x^3, x^4, y, xy, xy^2, y^2, y^3\}$$

Border

$$\mathcal{O} = \{1, x, x^2, x^3, x^4, y, xy, xy^2, y^2, y^3\}$$
$$\rightarrow \partial\mathcal{O} = \{x^5, x^4y, x^3y, x^2y, x^2y^2, xy^3, y^4\}$$



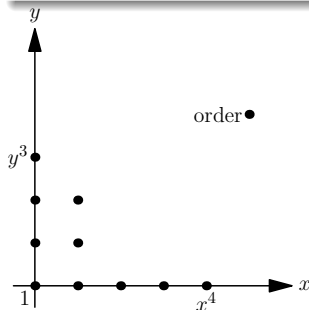
Example

Closure

$$\mathcal{S} = \{x^4, xy^2, y^3\} \rightarrow \overline{\mathcal{S}} = \{1, x, x^2, x^3, x^4, y, xy, xy^2, y^2, y^3\}$$

Border

$$\mathcal{O} = \{1, x, x^2, x^3, x^4, y, xy, xy^2, y^2, y^3\}$$
$$\rightarrow \partial\mathcal{O} = \{x^5, x^4y, x^3y, x^2y, x^2y^2, xy^3, y^4\}$$



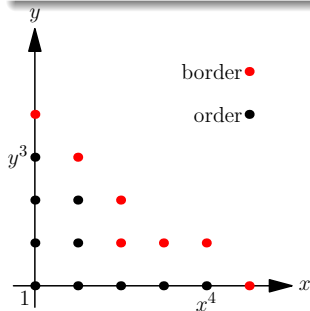
Example

Closure

$$\mathcal{S} = \{x^4, xy^2, y^3\} \rightarrow \overline{\mathcal{S}} = \{1, x, x^2, x^3, x^4, y, xy, xy^2, y^2, y^3\}$$

Border

$$\mathcal{O} = \{1, x, x^2, x^3, x^4, y, xy, xy^2, y^2, y^3\}$$
$$\rightarrow \partial\mathcal{O} = \{x^5, x^4y, x^3y, x^2y, x^2y^2, xy^3, y^4\}$$



Border basis[KR2]

Border basis

$\mathcal{O} = \{t_1, \dots, t_\mu\}$ 及び $\partial\mathcal{O} = \{b_1, \dots, b_\nu\}$ について次の g_i のような多項式の集合 $G = \{g_1, \dots, g_\nu\}$ を **$\mathcal{O}$ -border prebasis** と呼ぶ。

$$g_i = b_i - \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_{ij} t_i$$

更にこのような G を含むイデアル I について次の同値な条件を満たすとき G を I の **$\mathcal{O}$ -border basis** と言う。

- 剰余環上での $\mathcal{O} = \{t_1, \dots, t_\mu\}$ は P/I の k -ベクトル空間の基底
- $I \cap \langle \mathcal{O} \rangle_k = \{0\}$
- $P = I \oplus \langle \mathcal{O} \rangle_k$

Example (border basis)[KR2][T]

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{4}x^2 + y^2 - 1, & f_2 &= x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 1, & I &= \langle f_1, f_2 \rangle \\ \mathcal{O} &= \{1, x, y, xy\}, & \partial\mathcal{O} &= \{x^2, x^2y, xy^2, y^2\} \\ I \text{ の } \mathcal{O}\text{-border basis} \end{aligned}$$

$$G = \left\{ \begin{array}{l} x^2 - \frac{4}{5}, \\ x^2y - \frac{4}{5}y, \\ xy^2 - \frac{4}{5}x, \\ y^2 - \frac{4}{5} \end{array} \right\}$$

なお $\mathcal{O}' = \{1, x, x^2, y\}$ で I の $\mathcal{O}'$ -border basis を取ろうとした場合
 $I \cap \langle \mathcal{O}' \rangle_k \ni x^2 - \frac{4}{5} \neq 0$
であるため border basis としての条件を満たさない。

Example (border basis)[KR2][T]

$$\tilde{f}_1 = \frac{1}{4}x^2 + y^2 - 1 + \epsilon xy, \tilde{f}_2 = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 1 + \epsilon xy, \tilde{I} = \langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rangle$$

$$\mathcal{O} = \{1, x, y, xy\}, \partial\mathcal{O} = \{x^2, x^2y, xy^2, y^2\}$$

$\tilde{I}$ の $\mathcal{O}$ -border basis

$$G = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + \frac{4\epsilon}{5}xy - \frac{4}{5}, \\ x^2y - \frac{16\epsilon}{16\epsilon^2-25}x + \frac{20}{16\epsilon^2-25}y, \\ xy^2 + \frac{20}{16\epsilon^2-25}y - \frac{16\epsilon}{16\epsilon^2-25}y, \\ y^2 + \frac{4\epsilon}{5}xy - \frac{4}{5} \end{array} \right\}$$

このように生成元を微小変化させても border に影響が出ない。

Border basis の特徴

Border basis の特徴には一例として

- 多項式をあるアルゴリズムで G による割り算をすると余りが一意的である
- G の先頭項をある程度自在に選べる
- 生成元を微変化をさせた場合でも G に大きな変化が生じないことなどが挙げられた。

これに対して parameter を付与した border basis について考える。

$k(e)$ を係数に持つ border basis

parameter $e_1, \dots, e_m$ の有理関数を係数とした多項式環
 $k(e_1, \dots, e_m)[x_1, \dots, x_n](=: k(e)[x])$ について考えたい。

次の例は曲線のイデアルに対して、一つの文字を parameter として
みなして 0 次元イデアルとして border basis を求めている。

$k(e)$ を係数に持つ border basis

$k[x, y, z]$ において $f_1 = xyz - 1$, $f_2 = x - y$, $I = \langle f_1, f_2 \rangle$ とする。
 z をパラメータとした $k(z)[x, y]$ 上で I を I_z と定義しなおす。
 $\mathcal{O} = \{1, y\}$ の時の I_z の $\mathcal{O}$ -border basis を求める。

$$G = \left\{ x - y, xy - \frac{1}{z}, y^2 - \frac{1}{z} \right\}$$

question

$z = 0$ の時は？ それ以外の値を代入した時でも果たして border basis
として $I_z \cap \langle \mathcal{O} \rangle_k = \{0\}$ が成り立つのか？

parameterized border basis

Main def : parameterized border basis

$I \subset k(e)[x]$ を zero-dimensional ideal とし、 $I \cap \langle \mathcal{O} \rangle_{k(e)} = \{0\}$ となる
適当な order $\mathcal{O} = \{t_1, \dots, t_\mu\}$, border $\partial\mathcal{O} = \{b_1, \dots, b_\nu\}$ を取り、 I
の $\mathcal{O}$ -border basis $G = \{g_1, \dots, g_\nu\}$ を取る。これに対し

$$\begin{aligned} g'_i &= \beta_i(e)b_i - \sum_{j=1}^{\mu} \alpha'_{ij}(e)t_j \quad (\alpha'_{ij}, \beta_i \in k[e]) \\ &= \beta_i(e)g_i \quad \text{と置く} \end{aligned}$$

各 g'_i が e について既約である時この $G' = \{g'_1, \dots, g'_\nu\}$ を
parameterized border basis と呼ぶことにする。

parameterized border basis theorem

Main theorem

$a \in k^m$ に対して次の写像を定める。

$$\phi_a : k[e][x] \rightarrow k[x] \quad (f(e, x) \mapsto f(a, x))$$

また zero-dimensional ideal $I \subset k(e)[x]$ と、 I_a を $\phi_a(I \cap k[e][x])$ により生成された $k[x]$ のイデアルとする。 I の $\mathcal{O}$ -border basis G と、対応する I の parameterized $\mathcal{O}$ -border basis G' について次のことが成る。

$$\begin{aligned} \phi_a(G') \text{ は定数倍された } I_a \text{ の } \mathcal{O}\text{-border basis である} \\ \Leftrightarrow \beta_i(a) \neq 0 \quad (\forall i = 1, \dots, \mu) \end{aligned}$$

Example1 (イデアルの 0 次元化)

$$f_1 = xyz - 1, f_2 = x - y, I = \langle f_1, f_2 \rangle$$

この I から成る曲線のイデアルを z を parameter とした $k(z)[x, y]$ 上で $\mathcal{O} = \{1, y\}$ における I_z の parameterized $\mathcal{O}$ -border basis を求めると

$$G = \{x - y, (z)xy - 1, (z)y^2 - 1\}$$

この order では $z \neq 0$ において border basis としての活用ができる。
逆に、 $z = 0$ の時 $I_a = 1$ であり $I_a \cap \langle 1, y \rangle_{\mathbb{Q}} \ni \{1\}$
 $\{1\} \neq \{0\}$ であり border basis でないことがわかる。

Example2 (曲面回帰)

- border basis はイデアルの生成元を微変化をさせた場合でも basis に大きな変化が生じない
- この性質を利用した曲線回帰が用いられている。([AFT][T])

この性質と今回の parameter を用いるイデアルの 0 次元化を応用して、曲面回帰を行った。

Example2 (曲面回帰)

曲面 $xy - z$ を意識した以下の 0 次元でない 4 曲線を考える。

$$l_1 = \langle xy - \frac{1}{100}, z \rangle, l_2 = \langle xy - 1, z - 1 \rangle, \\ l_3 = \langle xy - \frac{19}{10}, z - 2 \rangle, l_4 = \langle xy - 3, z - \frac{31}{10} \rangle$$

この 4 曲線を通るイデアル $I \subset k(y)[x, z]$ について

$\mathcal{O} = \{1, z, z^2, z^3\}$ で I の parameterized border basis を求めると

$$G = \left\{ \begin{array}{l} (y)x - \frac{389}{13020}z^3 + \frac{5843}{43400}z^2 - \frac{142537}{130200}z - \frac{1}{100} \\ (y)xz - \frac{1}{21}z^3 - \frac{53}{70}z^2 - \frac{41}{210}z \\ (y)xz^2 - \frac{22}{21}z^3 + \frac{12}{35}z^2 - \frac{31}{105}z \\ (y)xz^3 - \frac{127}{21}z^3 + \frac{404}{35}z^2 - \frac{682}{105}z \\ z^4 - \frac{61}{10}z^3 + \frac{113}{10}z^2 - \frac{62}{10}z \end{array} \right\}$$

$y = 0$ だと border basis とならないが微小変化させることを考慮すると $xy - z$ に十分近い値が取れることが考えられる。

Example3 (stable)

ここからは本定理を用いることによる更なる応用法について述べる。

先ほどは述べなかったが曲線回帰には stable という条件が必要とされている。その条件を調べる方法も parameterized border basis で求めることができる。ここでは具体的な例のみを挙げる。詳しいことは [T] や [AFT] も参考にしてほしい。

Example3 (stable) [AFT] による方法

$$\mathbb{X} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 3)\}$$

に準じて次のような $\tilde{\mathbb{X}}$ を定める

$$\tilde{\mathbb{X}} = \{(0 + e_1, 0 + e_2), (1 + e_3, 1 + e_4), (2 + e_5, 3 + e_6)\}$$

ここで $\mathcal{O} = \{1, y, y^2\}$ とした時、stable の条件は各 order に $\mathbb{X}$ の具体的な座標を代入し生成した次の行列式が 0 にならないことである。

$$\begin{aligned} |M_{\mathcal{O}}(\mathbb{X})| &= \begin{vmatrix} 1 & e_2 & e_2^2 \\ 1 & 1 + e_4 & (1 + e_4)^2 \\ 1 & 3 + e_6 & (3 + e_6)^2 \end{vmatrix} \\ &= (e_4 - e_2 + 1)(e_6 - e_2 + 3)(e_6 - e_4 + 2) \end{aligned}$$

Example3 (stable) 主定理による方法

$$\tilde{\mathbb{X}} = \{(0 + e_1, 0 + e_2), (1 + e_3, 1 + e_4), (2 + e_5, 3 + e_6)\}$$

ここで order を同じく $\mathcal{O} = \{1, y, y^2\}$ とする。 $\tilde{\mathbb{X}}$ で生成される $k(e_1, \dots, e_6)[x, y]$ イデアル $\tilde{I}$ の parameterized $\mathcal{O}$ -border basis を求めると、先頭項は次のようなもののみが出てくる。

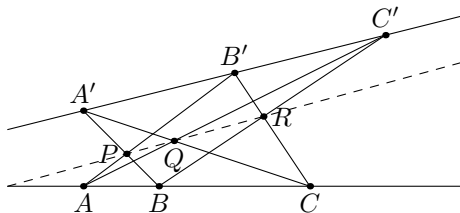
$$-(e_4 - e_2 + 1)(e_6 - e_2 + 3)(e_6 - e_4 + 2)$$

先程の式と全く同じ因子を確認することができ、これが 0 にならないならば stable であることが確認できる。

Example3 (stable) 留意点

- 主定理による方法は order と点の個数が一致する時のみ使える
- パラメータが混ざる等具体的な座標が定まっていない場合は主定理による方法が有効
- 具体的な座標が求まっているなら [AFT] の方法がよい

Example4 (パップスの定理)



A, B, C, A', B', C' の 6 点を
 $(0, 0), (1, 0), (e_1, 0), (e_2, e_3), (e_4, e_5), (e_6, e_7)$ として
 $\mathbb{Q}(e_1, \dots, e_7)[x, y]$ の環を定める。 A, B, C は既に同一直線状にある
ものとしてある。この 6 点から求めた交点の P, Q, R を零点とする
イデアル I を $\mathcal{O} = \{1, x, y\}$ の元で I の parameterized $\mathcal{O}$ -border basis
 G を求めてみる。

Example4 (パップスの定理)

$$\{\beta_1(e), \beta_2(e), \beta_3(e)\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} e_1(e_1 - 1)(-e_3e_4 + e_2e_5 - e_5)(-e_3e_6 - e_1e_7 + e_2e_7) \\ (-e_5e_6 - e_1e_7 + e_4e_7 + e_5)(-e_3e_4 + e_2e_5 + e_3e_6 - e_5e_6 - e_2e_7 + e_4e_7), \\ e_1(e_1 - 1)(-e_3e_4 + e_2e_5 - e_5)(-e_3e_6 - e_1e_7 + e_2e_7) \\ (-e_5e_6 - e_1e_7 + e_4e_7 + e_5)(-e_3e_4 + e_2e_5 + e_3e_6 - e_5e_6 - e_2e_7 + e_4e_7), \\ -f_1(e_1e_3e_4e_6 - e_1e_2e_5e_6 - e_3e_4e_6 + e_1e_5e_6 - e_1e_4e_7 + e_2e_4e_7) \\ (-e_1e_3e_4e_7 + e_1e_2e_5e_7 + e_3e_5e_6 + e_1e_3e_7 - e_1e_5e_7 - e_2e_5e_7 - e_2e_5e_7 - e_3e_5 + e_5e_7) \\ (e_1^2e_3e_7 - e_1e_3e_4e_7 - e_1^2e_5e_7 + e_1e_2e_5e_7 - e_1e_3e_5 + e_3e_5e_6 + e_1e_5e_7 - e_2e_5e_7) \end{array} \right\}$$

f_1 は余りに膨大なので省略している。

ここで先頭項が 0 になる $e \mapsto a$ は $I_a \cap \langle 1, x, y \rangle_{\mathbb{Q}} \neq \{0\}$ であることを指す。これは、今回の order の取り方の場合 P, Q, R が一直線上に存在する可能性を示唆する。

Example4 (パップスの定理)

- $-e_3e_4 + e_2e_5 + e_3e_6 - e_5e_6 - e_2e_7 + e_4e_7 = 0$

A', B', C' が一直線上になる多項式であり、目的であるパップスの定理の性質である。

- $e_1 = 0$

A と C が一致し、 P, Q, R は $\overline{AB'} = \overline{B'C}$ 上で一直線である。

- $-e_3e_4 + e_2e_5 - e_5 = 0$

$\overline{AB'} \parallel \overline{A'B}$ であり P が存在せず $I_a = \mathbb{Q}[x, y]$ である。

このように、逆に border の係数が 0 になることを利用して幾何学的な検討をすることができる。

References

- [AFT] J. Abbott, C. Fassino, M.-L. Torrente, Stable border bases for ideals of points, Journal of Symbolic Computation 43, 2008, 883-894
- [T] 手島 悠人, Border Bases による代数曲線回帰について, 楫元空間 (<http://pc193097.pc.waseda.ac.jp/MasterThesis/index.html>), 2011
- [KR2] M. Kreuzer, L. Robbiano, Computational Commutative Algebra 2, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000
- [CLO] D.-A. Cox, J. Little, D. O'Shea Ideals, Varieties, and Algorithms, Springer International Publishing Switzerland, 2015
- [S] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann Singular , 2015