Parameterized Border Basis

数学応用数理専攻修士 2 年 楫研究室
5113A004-1 石山健太

2016 年 2 月 1 日

1 Introduction

本論文では parameter の有理関数を交えて生成した新たな border basis、これを parameterized border basis と呼ぶことにし、さらにこれに対して一つの定理を導き、その定理により考えられる border basis の活用について考えた。

本来 border basis は zero-dimensional ideal に対してのみ定義されるものである。ここで zero-dimensional でない高次元の ideal に対して border basis を考えたい場合に、一部の変数を parameter としてみなすことで zero-dimensional ideal としてみなすことができる。しかし、parameter の値を固定した時に元々 border basis であった多項式の集合が本当に border basis という性質を維持しているかどうかを知る術がない。これに対して我々は、次の結果を得た。

Theorem 1.1. (Theorem 3.2) 単項式集合 $\mathbb{T}^n := \{x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n} \mid a_i \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}\}$ のある部分集合である order $\mathcal{O} = \{t_1, \ldots, t_\mu\}$ と border $\partial\mathcal{O} = \{b_1, \ldots, b_\nu\}$ を定める。
$e_1, \ldots, e_m$ を parameter とした有理関数を係数に持つ $k(e_1, \ldots, e_m)[x_1, \ldots, x_n](=: k(e)[x])$ の zero-dimensional ideal I と、$\mathcal{O}$ の $k(e)$-ベクトル空間 $\langle\mathcal{O}\rangle_{k(e)}$ の共通部分が 0 のみであるとする。この時 $I \cap k[e][x]$ の部分集合である parameterized border basis $G = \{g_1, \ldots, g_\nu\}$ について

$$g_i = \beta_i(e)b_i - \sum_{j=1}^{\mu} \alpha'_{ij}(e)t_j \quad (\alpha'_{ij}, \beta_i \in k[e]))$$

として、各 g_i は e について既約であるものとする。このとき parameterized border basis G が具体的な $e \mapsto a \in k^m$ でも I に対応するイデアルの border basis の定数倍となることの必要十分条件は、$\forall i\ \beta_i(a) \neq 0$ である。

この定理により parameterized border basis に注目することによって、border basis の利用をすることができる条件がわかるようになる。その例として、[T] や [AFT] で述べられている点の集合から曲線回帰を行っている方法に対し、次元を増やして曲線の集合から曲面回帰を行ってみせた。さらに、曲線回帰の際に必要な stable と呼ばれる条件がこの parameterized border basis で導いた定理と同一の条件となることが見いだせている。さらに、$\beta_i(a) = 0$ が border basis でなくなることを逆に利用し、幾何学的条件を探す用途にも使えることを示した。具体的には、border basis の条件を果たさない parameter を探すことを目的とすることもできる。例えば、平面上での点の集合を取った際に一直線上や二次曲線上に点が存在するパラメータを調べたい場合に parameterized border basis で border basis が維持されない条件を利用することができる。これらの挙動に関しては section 4 で具体的に述べることとする。

本論文では section 2 に parameterized border basis に向けた border basis の基本的な性質について述べる。さらに詳しい border basis の詳しい特徴や強みについては [KR2] を参考にしてほしい。section 3 で section 2 を踏まえた parameterized border basis と前定理について具体的に述べる。そして、section 4 では先ほど述べた parameterized border basis を活用した具体例について述べてゆく。

2 Border basis

多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n]$ について、単項式集合 $\mathbb{T}^n := \{x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n} \mid a_i \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}\}$ を定める。

Definition 2.1. $\mathcal{S}$ 及び $\mathcal{O}$ を空でない $\mathbb{T}^n$ の部分集合とする。

(a) $\mathcal{S}$ の closure $\overline{\mathcal{S}}$ とは次の $\mathbb{T}^n$ の部分集合である。$\overline{\mathcal{S}} := \{t \in \mathbb{T}^n | \quad t|t' \quad \exists t' \in \mathcal{S}\}$.
(b) $\overline{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ である時 $\mathcal{O}$ を order と言う。order ideal とも言う。

Definition 2.2. order $\mathcal{O}$ について

(a) $\mathcal{O}$ の border $\partial\mathcal{O}$ とは次のことを言う。

$$\partial\mathcal{O} := (x_1\mathcal{O} \cup \ldots \cup x_n\mathcal{O}) \setminus \mathcal{O}.$$

(b) $\mathcal{O}$ の $(k+1)$st border $\partial^{k+1}\mathcal{O}$ とは次のことを言う。

$$\partial^{k+1}\mathcal{O} := \partial(\overline{\partial^k\mathcal{O}}).$$

特に、$\partial^0\mathcal{O} = \mathcal{O}$。

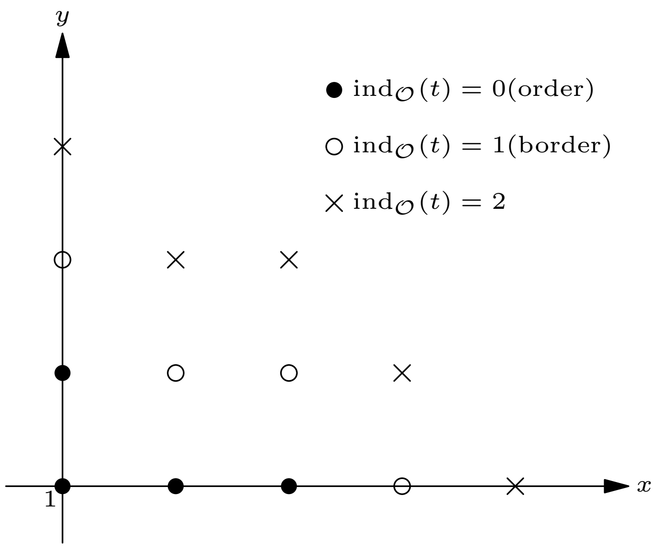
Proposition 2.3. *([KR2])* $t \in \mathbb{T}^n$ が $\partial\mathcal{O}$ の元で割り切れる必要十分条件は $t \in \mathbb{T}^n \setminus \mathcal{O}$ である。

Definition 2.4. order $\mathcal{O}$ について

(a) 任意の $t \in \mathbb{T}^n$ に対し $t \in \partial^k\mathcal{O}$ となる k を $\mathcal{O}$ に関する t の index と言い、$\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(\mathrm{t})$ と表す。
(b) 多項式 $f \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$ に対し、f の $\mathcal{O}$ に対する index とは次のことを言う

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(f) = \max\{\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(t) \mid t \in \mathrm{Supp}(f)\}.$$

Example 2.5. $k[x, y]$ において order $\mathcal{O} = \{1, x, x^2, y\}$ とした場合、border $\partial\mathcal{O} = \{x^3, x^2y, xy, y^2\}$、及び index が 2 となる単項式は $\partial^2\mathcal{O} = \{x^4, x^3y, x^2y^2, xy^2, y^3\}$ となる。これは下のグラフに対して横軸は x の指数、縦軸は y の指数に対応する。



以上のように order と border の定義を行い、order $\mathcal{O}=\{t_1,\ldots,t_\mu\}$ と border $\partial\mathcal{O}=\{b_1,\ldots,b_\nu\}$ を定めた上で、border basis の定義に入ってゆく。

Definition 2.6. 次のような多項式の集合 $G=\{g_1,\ldots,g_\nu\}$ を $\mathcal{O}$-border prebasis と呼ぶ。

$$g_j = b_j - \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_{ij} t_i \ (\alpha_{ij} \in k \ , \ 1 \leqq i \leqq \mu \ , \ 1 \leqq j \leqq \nu).$$

Definition 2.7. $\mathcal{O}$-border prebasis $G=\{g_1,\ldots,g_\nu\}$ に対し、G を含む $k[x_1,\ldots,x_n]$ のイデアル I に対して、次の同値な条件を満たす G を I の $\mathcal{O}$-border basis と呼ぶ。

(a) $\mathcal{O}$ は P/I における k-ベクトル空間の basis である。
(b) $I \cap \langle\mathcal{O}\rangle_k = \{0\}$
(c) $k[x_1,\ldots,x_n] = I \oplus \langle\mathcal{O}\rangle_k$

Proposition 2.8. ([KR2])(Existence and Uniqueness of Border Bases) $I \subseteq k[x_1,\ldots,x_n]$ を zero-dimensional ideal とする。また、order $\mathcal{O}$ の剰余類が $k[x_1,\ldots,x_n]/I$ における k-ベクトル空間の基底であると仮定する。この時 I の $\mathcal{O}$-border basis は一意的に存在する。

Example 2.9. $\mathbb{Q}[x,y]$ において $V=\{(0,0),(1,1),(2,0)\}$ のイデアル $I(V)$ について、order $\mathcal{O}=\{1,x,y\}$ と取った際、$I(V)\cap\langle\mathcal{O}\rangle_{\mathbb{Q}}=\{0\}$ であるため、$\partial\mathcal{O}=\{x^2,xy,y^2\}$ と共に次のような $I(V)$ の $\mathcal{O}$-border basis G が取れる。

$$G=\{x^2-2x+y, xy-y, y^2-y\}.$$

しかし、$\mathcal{O}'=\{1,y,y^2\}$ と取った場合、しかし $I(V)\cap\langle\mathcal{O}'\rangle_{\mathbb{Q}} \ni y^2-y \neq 0$ であるため $I(V)$ の $\mathcal{O}'$-border basis を取ることはできない。

Proposition 2.10. ([KR2])(The Border Division Algorithm) $\mathcal{O}$-border prebasis $G=\{g_1,\ldots,g_\nu\}$ に対し多項式 $f\in k[x_1,\ldots,x_n]$ を与えた時、次の手順を考える。

(1) $f_1=\cdots=f_\nu=0,\ c_1=\cdots=c_\mu=0,\ h=f.$
(2) $h=0$ の時 $(f_1,\ldots,f_\nu,c_1,\ldots,c_\mu)$ を返し終了。
(3) $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(h)=0$ の時、$h=c_1t_1+\cdots+c_\mu t_\mu$ と書き表せる $c_1,\ldots,c_\mu\in k$ を取り出し $(f_1,\ldots,f_\nu,c_1,\ldots,c_\mu)$ を返し終了。
(4) $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(h)>0$ の時、$h=a_1h_1+\ldots+a_sh_s$ となる $a_1,\ldots,a_s\in k\setminus\{0\},\ h_1,\ldots,h_s\in\mathbb{T}^n$ を $\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(h_1)=\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(h)$ となるように取る。次に $t'\in\mathbb{T}^n$ かつ $\deg(t')=\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(h)-1$、及び $h_1=t'b_i$ となるようなある t' と、最小の i を取る。h から $a_1t'g_i$ を引き、f_i に a_1t' を加え、(2) に戻る。

このアルゴリズムは次を満たす組 $(f_1,\ldots,f_\nu,c_1,\ldots,c_\mu)\in k[x_1,\ldots,x_n]^\nu\times k^\mu$ を返す。

$$f=f_1g_1+\cdots+f_\nu g_\nu+c_1t_1+\cdots+c_\mu t_\mu$$

この時 $\deg(f_i)\leq\mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(f)-1$ または $f_ig_i=0$ であり、この組は h_1 の選び方に依らない。

Proposition 2.11. ([KR2]) G が I の $\mathcal{O}$-border basis である時、多項式 f に対して The Border Division Algorithm を適用した際に返される $(c_1,\ldots,c_\mu)$ の値は G の元の順序に依らず一意的である。特に $f\in I$ の時 $(c_1,\ldots,c_\mu)=(0,\ldots,0)$。

Proposition 2.12. ([KR2])(Border Bases and Special Generation) G が I の $\mathcal{O}$-border basis であることと以下の二条件は同値である。

A1 任意の多項式 $f \in I \setminus \{0\}$ に対し、次を満たすある多項式 $f_1, \ldots, f_\nu \in k[x_1, \ldots, x_n]$ がとれる。

$$f = f_1 g_1 + \cdots + f_\nu g_\nu \quad (\text{if } f_i \neq 0 \ \rightarrow \ \deg(f_i) \leq \mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(f) - 1).$$

A2 任意の多項式 $f \in I \setminus \{0\}$ に対し、次を満たすある多項式 $f_1, \ldots, f_\nu \in k[x_1, \ldots, x_n]$ がとれる。

$$f = f_1 g_1 + \cdots + f_\nu g_\nu \quad (\max\{\deg(f_i) \mid i \in \{1, \ldots, \nu\},\ f_i \neq 0\} = \mathrm{ind}_{\mathcal{O}}(f) - 1).$$

3 Parameterized border basis

parameter $e_1, \ldots, e_m$ を含めた有理関数係数多項式環 $k(e_1, \ldots, e_m)[x_1, \ldots, x_n]$ (以後 $k(e)[x]$ と省略して書く) について考える。

Definition 3.1. $I \subset k(e)[x]$ を zero-dimensional ideal とし、$I \cap \langle \mathcal{O} \rangle_{k(e)} = \{0\}$ となるような適当な order $\mathcal{O} = \{t_1, \ldots, t_\mu\}$ と、対応する border $\partial\mathcal{O} = \{b_1, \ldots, b_\nu\}$ を取り、I の $\mathcal{O}$-border basis $G = \{g_1, \ldots, g_\nu\}$ を取る。

$$g_i = b_i - \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij}(e) t_j \quad (\alpha_{ij} \in k(e) \ \ e \text{ の有理関数})$$

このような border basis G に対し、次のような $G' = \{g'_1, \ldots, g'_\nu\}$ を取る

$$g'_i = \beta_i(e) b_i - \sum_{j=1}^{\mu} \alpha'_{ij}(e) t_j \quad (\alpha'_{ij}, \beta_i \in k[e])$$

この g'_i は $g'_i = \beta_i(e) g_i$ であり、e について既約であるものとする。特に、任意の i に対し $V(\beta_i(e), \alpha'_{i1}(e), \ldots, \alpha'_{i\mu}(e)) = \phi$ である。具体的には既約な α_{ij} の分母にあたる e の多項式を u_{ij} とした時 $\beta_i(e) = LCM(u_{i1}, \ldots, u_{i\mu})$ を取ればよい。この時この $G' = \{g'_1, \ldots, g'_\nu\}$ をここでは parameterized $\mathcal{O}$-border basis と呼ぶものとする。

この parameterized border basis は一意的なものではない。既約であることを除き先頭項の k の unit 倍について特に固定をしていないからである。しかし、有理関数を認めているパラメータを乗算したのみとなるので、$k(e)[x]$ 上での border basis としての特徴は失われていない。特に $G \subset I$ である為 $G' \subset I$ であることは自明である。

この parameterized border basis を踏まえた上で本論文の主張として次の定理を述べたい。

Theorem 3.2. zero-dimensional ideal I と $a \in k^m$ に対して定める写像

$$\phi_a : k[e][x] \rightarrow k[x] \ (f(e, x) \mapsto f(a, x))$$

について、I_aを$\phi_a(I \cap k[e][x])$ により生成された $k[x]$ のイデアルとする。I の $\mathcal{O}$-border basis G と、対応する parameterized $\mathcal{O}$-border basis G' について次のことが成り立つ。

$$\phi_a(G') \text{ は定数倍された } I_a \text{の } \mathcal{O}\text{-border basis である} \Leftrightarrow \beta_i(a) \neq 0 \ \ (\forall i = 1, \ldots, \mu).$$

Proof. $(\Rightarrow)\exists i,\ \beta_i(a)=0$ とする。$I_a \ni g'_i(a) = -\sum_{j=i}^{\mu}\alpha'_{ij}(a)t_j$ となる。しかし $I_a \cap \langle \mathcal{O}\rangle_k \ni g'_i(a)$。$V(\beta_i(e),\alpha'_{i1}(e),\dots,\alpha'_{i\mu}(e))=\phi$ 故 $g'_i \neq 0$ で $I_a \cap \langle \mathcal{O}\rangle_k \neq \{0\}$ となり border basis として成り立たない。
$(\Leftarrow)\forall i,\ \beta_i(a)\neq 0$ であるとき、$\phi_a(G')$ はそれぞれの先頭項を 1 になるように k の unit 倍をすれば明らかに border prebasis となる。また、$\phi_a(G') \subset I_a$ は明らか。
$I_a \ni h_a = c_1t_1+\cdots+c_\mu t_\mu$ $(\forall i\ c_i\in k)$ を取る。$I\cap k[e][x]\ni h,\ \phi_a(h)=h_a$ が取れる。$k(e)[x]$ において G は I の border basis である為

$$h = f_1g_1+\cdots+f_\nu g_\nu \quad (\text{if } f_i\neq 0 \ \to\ deg(f_i)\leq ind_{\mathcal{O}}(f)-1)$$

と表すことができ、更にこれを boder division algorithm で取得することができる。この時 prop2.11. により $h \overset{G}{\to} 0$ となるような簡約化が順序に依らず可能であり、具体的に以下のような変化がされるものとする。

$$\overbrace{h=h_0 \overset{g_{i_1}}{\to} h_1 \overset{g_{i_2}}{\to} \cdots \overset{g_{i_v}}{\to} h_v \overset{g_{i_{v+1}}}{\to} 0}^{G}.$$

algorithm に従って h^j で選択した最大の index の単項式を $b'_1(e)t'_1$ として取る。$h\in I\cap k[e][x]$ であるので $b'_1(e)\in k[e]$。ある $t'\in\mathbb{T}$ で次のような式で簡約を表すことができる。

$$\begin{aligned}
h_{j+1} =& h_j - b'_1(e)t'g_{i_{j+1}}\\
=& h_j - \frac{1}{\beta_{j+1}(e)}b'_1(e)t'g'_{i_{j+1}}\\
\beta_{j+1}(e)h_{j+1} =& \beta_{j+1}(e)h_j - b'_1(e)t'g'_{i_{j+1}}
\end{aligned}$$

ここで $\phi_a(\beta_{j+1}(e)h_{j+1})$ に注目すると、$\beta_{j+1}(a)\neq 0$ から

$$\begin{aligned}
\phi_a(\beta_{j+1}(e)h_{j+1}) =& \phi_a(\beta_{j+1}(e)h_j - b'_1(e)t'g'_{i_{j+1}})\\
\beta_{j+1}(a)\phi_a(h_{j+1}) =& \beta_{j+1}(a)\phi_a(h_j) - b'_1(a)t'\phi_a(g'_{i_{j+1}})
\end{aligned}$$

特に $j=0$ の時、$\beta_{i_{j+1}}(a)\phi_a(h_1)=\beta_{i_{j+1}}(a)\phi_a(h_0)-b'_1(a)t'\phi_a(g'_{i_1})$ であり、$\phi_a(h_0)=h_a$ においては $b'_1(a)=0$ であり、$\beta_{i_{j+1}}(a)\neq 0$ であるので、$\phi_a(h_1)=h_a$。同様にして $h_a=\phi_a(h_0)=\cdots=\phi_a(h_v)=\phi_a(0)=0$。すなわち $h_a=0$。$I_a\cap\langle\mathcal{O}\rangle_k=\{0\}$ である。 従って、$\phi_a(G')$ の border の係数を unit 倍し 1 にしたものは I_a の $\mathcal{O}$-border basis となる。 □

4 Parameterized border basis の利用

上記の定理を述べた上での活用例を提示しておく。ただし、parameterized border basis を利用した計算は計算量が非常に膨大である為、計算機を利用する場合は制約を多く設ける等の工夫が必要である。

4.1 イデアルの 0 次元化による border basis の活用

border basis は zero-dimentional ideal にのみ適用されるイデアルである。しかし、変数の一部を parameter として見ることで border basis の利用が可能となる。

Example 4.1. $k[x,y,z]$ において

$$f_1 = xyz-1, f_2 = x-y, I=\langle f_1,f_2\rangle$$

この I から成る曲線のイデアルを z を parameter とした $k(z)[x,y]$ 上で $\mathcal{O}=\{1,y\}$ における I_z の parameterized $\mathcal{O}$-border basis を求めると $G=\{x-y,(z)xy-1,(z)y^2-1\}$ が求められ、この order では $z\neq 0$ において border basis としての活用ができることがわかる。

Example 4.2. $k[x,y,z]$ において

$$f_1=xyz-1, f_2=z-1, I=\langle f_1,f_2\rangle$$

この I から成る曲線のイデアルを z を parameter とした $k(z)[x,y]$ 上で同じく $\mathcal{O}=\{1,y\}$ における I_z の parameterized $\mathcal{O}$-border basis を求めたいが、このまま z を parameter として扱ったところで値が有限集合にならず、zero-dimentional ideal にはならない。この場合 Noether nomalization([KR2]) と呼ばれる変数変換を行うとよい。
仮に $x\mapsto x', y\mapsto y', z\mapsto 3x'+2y'+z'$ として変換すると

$$f_1'=3x'^2y'+2x'y'^2+x'y'z'-1, f_2'=3x'+2y'+z'-1, I'=\langle f_1',f_2'\rangle$$

この場合 $I_{z'}$ の parameterized $\mathcal{O}$-border basis $G=\{x'+\frac{2}{3}y'+\frac{(z')-1}{3}, x'y'-1, y'^2+\frac{(z')-1}{2}y'+\frac{3}{2}\}$ が求められる。これは z' の値に依らず $\mathcal{O}$-border basis として利用することができる。

4.2 Stable border basis

[AFT] 及び [T] では、border basis を用いた stable border basis と呼ばれるものを用いた曲線回帰の方法が述べられている。ここでは [AFT] 及び [T] で述べられている曲線回帰に必要な条件 stable と呼ばれるものに向けた概略と、parameterized border basis の活用方法について説明する。

Definition 4.3. $v={}^t(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ とし、E を正の $n\times n$ 対角行列とする。この時以下の norm を定義する。

$$||v||:=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}v_i^2}\ \text{ and }\ ||v||_E=||Ev||$$

Definition 4.4. $p\in\mathbb{R}^n$、$\epsilon\in\mathbb{R}^{+n}$ を定めた時、組 (p,ϵ) を empirical point と言い、p^ϵ とも表記する。p を specified value と呼び、ϵ を tolerance と呼ぶこととする。

Definition 4.5. $p\in\mathbb{R}^n$、$\epsilon=(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)$ とした empirical point p^ϵ について、対角行列 $E=diag(\frac{1}{\epsilon_1},\dots,\frac{1}{\epsilon_n})$ と定める。この時 p^ϵ に対して次の ellipsoid of perturbations を定義する。

$$N(p^\epsilon)=\{\tilde{p}\in\mathbb{R}^n \ \mid\ ||\tilde{p}-p||_E\leq 1\}$$

Definition 4.6. 点の集合 $\mathbb{X}=(p_1,\dots,p_s)\subset\mathbb{R}^n$、tolerance ϵ に対し、emprical point の集合 $\mathbb{X}^\epsilon=\{p_1^\epsilon,\dots,p_s^\epsilon\}$ に対して

$$(\tilde{p_1},\dots,\tilde{p_s})\in\prod_{i=i}^{s}N(p_i^\epsilon)$$

となる $\tilde{\mathbb{X}}=\{\tilde{p_1},\dots,\tilde{p_s}\}\subset\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{X}^\epsilon$ の admissible perturbation と言う。

Definition 4.7. $\mathbb{X} = \{p_1, \ldots, p_s\} \subset \mathbb{R}^n$、$G = \{g_1, \ldots, g_k\} \subset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ に対し、
G の $\mathbb{X}$ に関する evalution matrix とは次のものを言う。

$$M_G(\mathbb{X}) = \begin{bmatrix} g_1(p_1) & \cdots & g_k(p_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(p_s) & \cdots & g_k(p_s) \end{bmatrix}$$

Definition 4.8. order $\mathcal{O}$ が $\mathbb{X}^\epsilon$ に関して stable であるとは、$\mathbb{X}^\epsilon$ の任意の admissible perturbation $\tilde{\mathbb{X}}$ に対して、evalution matrix $M_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathbb{X}})$ が full rank となることである。

特に [AFT] では stable であるか調べるために次のような方法を用いている。

Example 4.9.

$$\mathbb{X} = \{(0,0), (1,1), (2,3)\}$$

に対し tolerance $\epsilon = (0.4, 0.4)$ に準じて次のような $\tilde{\mathbb{X}}$ を定める

$$\tilde{\mathbb{X}} = \{(0 + e_1, 0 + e_2), (1 + e_3, 1 + e_4), (2 + e_5, 3 + e_6)\}$$

$$||(e_1, e_2)||_E \leq 1 \quad ||(e_3, e_4)||_E \leq 1 \quad ||(e_5, e_6)||_E \leq 1$$

ここで $\mathcal{O} = \{1, y, y^2\}$ とした時、evalution matrix $M_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathbb{X}})$ が full rank である条件は正方行列であるので

$$\begin{aligned} |M_{\mathcal{O}}(\mathbb{X})| =& \begin{vmatrix} 1 & e_2 & e_2^2 \\ 1 & 1 + e_4 & (1 + e_4)^2 \\ 1 & 3 + e_6 & (3 + e_6)^2 \end{vmatrix} \\ =& -e_2^2 e_4 + e_2 e_4^2 + e_2^2 e_6 - e_4^2 e_6 - e_2 e_6^2 + e_4 e_6^2 + 2e_2^2 \\ & +2e_2 e_4 - 3e_4^2 - 6e_2 e_6 + 4e_4 e_6 + e_6^2 - 8e_2 + 3e_4 + 5e_6 + 6 \\ =& (e_4 - e_2 + 1)(e_6 - e_2 + 3)(e_6 - e_4 + 2) \end{aligned}$$

この行列式が 0 にならないことである。取った ϵ では $||e_2||, ||e_4||, ||e_6|| \leq 0.4$ であるので存在しなく $\mathcal{O}$ は $\mathbb{X}^\epsilon$ に関して stable である。

この例において evalution matrix が full rank となることは正方行列である為行列式を用いることができた。勿論 order と点の個数が一致しない場合は正方行列であることを用いることができない。そこで次の性質に注目する。

Proposition 4.10. ([CLO]) $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ が zero-dimensional ある時、I の零点集合の個数は dim $k[x_1, \ldots, x_n]/I$ 以下である。また、I が根基イデアルであり k が代数的閉体である時は一致をする。

この性質から、k が代数的閉体であり、zero-dimensional ideal I が根基イデアルである時。あるいは example と同じように最初から相異なる点列からイデアルを取得した時は order が零点の個数が一致するように取れるため、evalution matrix は正方行列がとれることがわかる。この行列式が 0 であることは order $\mathcal{O}$ について線形従属であることを表すため、$I \cap \langle \mathcal{O} \rangle_k \neq \{0\}$ と見ることができる。つまり、border basis としての性質を満たさないことを言う。ここで先程の example を parameterized border basis を用いて観察する。

Example 4.11. order $\mathcal{O} = \{1, y, y^2\}$ とする。この時

$$\tilde{\mathbb{X}} = \{(0 + e_1, 0 + e_2), (1 + e_3, 1 + e_4), (2 + e_5, 3 + e_6)\}$$

これを零点とする $k(e_1,\dots,e_6)[x,y]$ のイデアル I の parameterized $\mathcal{O}$-border basis G を求める。量の多い basis となるため後述とするが、border の係数を見ると border basis がとなる条件は以下の多項式が 0 にならないこととなる。

$$\begin{aligned}
&e_2^2e_4 - e_2e_4^2 - e_2^2e_6 + e_4^2e_6 - e_2e_6^2 - e_4e_6^2 - 2e_2^2\\
&-2e_2e_4 + 3e_4^2 + 6e_2e_6 - 4e_4e_6 - e_6^2 + 8e_2 - 3e_4 + 5e_6 - 6\\
=&-(e_4 - e_2 + 1)(e_6 - e_2 + 3)(e_6 - e_4 + 2)
\end{aligned}$$

このように零点の個数と order の個数が一致しているとわかっている場合 evalution matrix を用いなくても stable である条件を求めることができる。既に零点がわかっている場合は evalution matrix を用いるほうが容易である。しかし、parameter が混じっていたり、代数的閉体で調べることができない計算機など、具体的な零点がわからない場合はこの方法を用いることで stable であるかどうかの判別ができる。これと同様の応用方法は 4.4 でも述べられている。

4.3 曲線の 0 次元化による曲面回帰

[T][AFT] では点の集合から求めた零点のイデアルで border basis を計算し、点の集合を通る曲線回帰の話題をしている。特に前例で挙げた stable を条件とした曲線回帰を行っている。詳しい方法は [T][AFT] を見てほしい。ここでは、曲線のイデアルを 0 次元化し、曲線を点の集合として見て曲面回帰を行ってみる。

Example 4.12. $xy - z$ が曲面回帰されることを期待した次のような曲線群を取る。

$$I_1 = \langle xy - \frac{1}{100}, z\rangle, I_2 = \langle xy - 1, z - 1\rangle, I_3 = \langle xy - \frac{19}{10}, z - 2\rangle, I_4 = \langle xy - 3, z - \frac{31}{10}\rangle$$

この 4 曲線を y を parameter とした $\mathbb{Q}(y)[x,z]$ 上で考え、$\mathcal{O} = \{1, z, z^2, z^3\}$ とする。このイデアルは z の値をそれぞれ固定している。そのためこの order の場合、z の値が同値になるほど動かなければ stable である。この parameterized $\mathcal{O}$-border basis を求めると

$$\left\{\begin{array}{c}
(y)x - \frac{389}{13020}z^3 + \frac{5843}{43400}z^2 - \frac{142537}{130200}z - \frac{1}{100},\\
(y)xz - \frac{1}{21}z^3 - \frac{53}{70}z^2 - \frac{41}{210}z,\\
(y)xz^2 - \frac{22}{21}z^3 + \frac{12}{35}z^2 - \frac{31}{105}z,\\
(y)xz^3 - \frac{127}{21}z^3 + \frac{404}{35}z^2 - \frac{682}{105}z,\\
z^4 - \frac{61}{10}z^3 + \frac{113}{10}z^2 - \frac{62}{10}z
\end{array}\right\}$$

$y \neq 0$ においてこれは border basis を常に維持する。特に最も上の多項式は求めている $xy - z$ に近似したもの。二番目の多項式も $z(xy - z)$ に近似したものを取れており、十分な曲面回帰ができている。

Example 4.13. $x^2 + y^2 + z^2 - 100$ を曲面回帰されることを期待した次のような曲線群を取る。

$$\begin{aligned}
&I_1 = \langle \frac{101}{100}x^2 + y^2 - 36, z - 8\rangle, I_2 = \langle x^2 + \frac{99}{100}y^2 - 64, z - 6\rangle,\\
&I_3 = \langle x^2 + y^2 - 99, z\rangle, I_4 = \langle x^2 + y^2 - 64, z + 6\rangle, I_5 = \langle x^2 + y^2 - 36, z + \frac{801}{100}\rangle
\end{aligned}$$

この 5 曲線を y を parameter とした $\mathbb{Q}(y)[x,z]$ 上で考える。この時、border basis が取れる order は $\mathcal{O} = \{1, z, z^2, z^3, z^4, x, xz, xz^2, xz^3, xz^4\}$ となる。y を parameter とした際に取れる x が 2 点存在するためである。このイデアルは z の値をそれぞれ固定しているが、この order では stable か判明しづらい。先程の

parameterized border basis による方法を用いれば stable であるかどうかの判別は理論上可能であるが、その計算量は非常に膨大なこととなり求めることが難しい。さらに、このイデアルが parameter 次第で根基イデアルかどうかの判別が困難である。この parameterized $\mathcal{O}$-border basis を求める。とても大きな basis となったため、具体的な値は後述として近似値の一部を表示する。

$$\left\{\begin{array}{c} 100z^5 + z^4 - 10008z^3 - 36z^2 + 230688z, \\ x^2 + (0.0000227y^2 + 0.005)z^4 + (0.00000768y^2 + 0.00116)z^3 \\ +(0.000218y^2 + 0.954)z^2 - (0.00111y^2 + 0.0416)z + y^2 - 99, \\ \vdots \end{array}\right\}$$

省略されている他の先頭項を含めても、この parameterized border basis の先頭項には parameter である y が存在しないため、係数が 0 になることはなくこれは y の値に依らず border basis となる（詳しい多項式は後述されている式を見よ）。提示した式が近似した式を十分にとっている。しかし、先程挙げた stable であるかどうかを判別することに難点を抱えている。

Example 4.14. 特に何も意識せず次のような直線群を取る。

$$I_1 = \langle x - y, x - z\rangle, I_2 = \langle x + 2y - 5, 3x - z - 35\rangle, I_3 = \langle 3x + y - 15, x - z - 5\rangle$$

この 3 直線を z を parameter とした $\mathbb{Q}(z)[x, y]$ 上で考え、$\mathcal{O} = \{1, y, y^2\}$ とする。stable であるかどうかは先述の parameterized border basis の方法を用いればよい。ひとまず、この parameterized $\mathcal{O}$-border basis を求める。これも一部のみ表示する。

$$\left\{\begin{array}{c} 6y^3 + (13z + 20)y^2 + (-16z^2 + 40z)y + (-3z^3 - 60z^2), \\ (119z^3 + 200z^2 - 400z)x + \frac{48z^2+735z-300}{2}y^2 + \frac{-192z^3+3535z^2-200z-2000}{4}y + \frac{-188z^4-5805z^3+2400z^2-2000z}{4}, \\ \vdots \end{array}\right\}$$

省略されている先頭項を含め、$119z^3 + 200z^2 - 400z \neq 0$ においてこれは border basis をとなる。この例の場合、order を取った x と y については次数の制限が行われているが、z については自由な次数が取られていることもわかる。parameter の挙動は自在に扱うことができないことに留意する必要がある。
また、$119z^3 + 200z^2 - 400z = 0$ となる $z = 0, \frac{20}{17}, -\frac{20}{7}$ に着目すると I_1, I_2, I_3 それぞれにおいて次のような座標をとる。

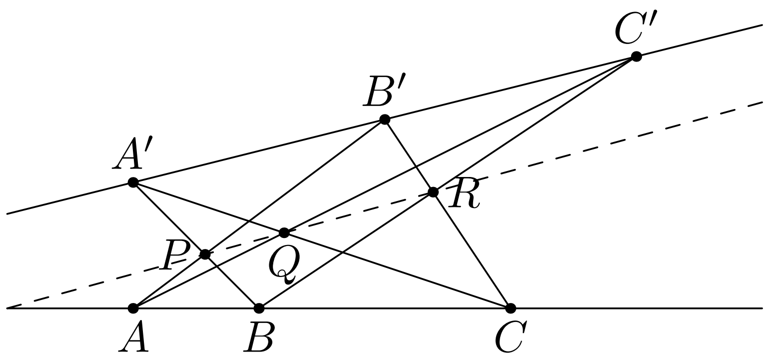
- $z = 0$
  $\{(0, 0, 0), (\frac{35}{3}, -\frac{10}{3}, 0), (5, 0, 0))\}$
- $z = \frac{20}{17}$
  $\{(\frac{20}{17}, \frac{20}{17}, \frac{20}{17}), (\frac{205}{17}, -\frac{60}{17}, \frac{20}{17}), (\frac{105}{17}, -\frac{60}{17}, \frac{20}{17})\}$
- $z = -\frac{20}{7}$
  $\{(-\frac{20}{7}, -\frac{20}{7}, -\frac{20}{7}), (\frac{75}{7}, -\frac{20}{7}, -\frac{20}{7}), (\frac{15}{7}, \frac{60}{7}, -\frac{20}{7})\}$

このようにどれか 2 つの y 一致した値が出てくる。この場合 y を解とする order で作れ二次方程式を取ることができる。これは $z = a$ とした時の $I_a \cap \langle\mathcal{O}\rangle_{\mathbb{Q}} \neq \{0\}$ となっていることを指している。この example を踏まえて次の内容についても考慮したいと思う。

4.4 幾何学的な検討の利用

本定理の性質を逆手に利用した場合、逆に border の先頭項 $\beta_i(a)=0$ となることにより、$I_a\cap\langle\mathcal{O}\rangle_k\neq\{0\}$ となることを利用した証明の可能性を提唱しておく。

Example 4.15. パップスの定理を意識した border basis を取得することとする。



パップスの定理とは同一直線状にある三点の組 A,B,C と A',B',C' に対し、次のように直線の交点 P,Q,R を定める。

$$P=\overline{AB'}\cap\overline{A'B}\quad,\quad Q=\overline{AC'}\cap\overline{A'C}\quad,\quad R=\overline{BC'}\cap\overline{B'C}$$

この時 P,Q,R は同一直線状にある。という定理である。
計算の簡略化のためそれぞれ A,B,C,A',B',C' の 6 点を $(0,0),(1,0),(e_1,0),(e_2,e_3),(e_4,e_5),(e_6,e_7)$ として $\mathbb{Q}(e_1,\dots,e_7)[x,y]$ の環で定める。A,B,C は既に同一直線状にあるものとしてある。この 6 点から求めた P,Q,R を零点とするイデアル I を $\mathcal{O}=\{1,x,y\}$ の上で parameterized $\mathcal{O}$-border basis G を求めると、それぞれの border とその係数は次のようになる

$$
\begin{aligned}
&\{\beta_1(e),\beta_2(e),\beta_3(e)\}\\
&=\left\{\begin{array}{l}
e_1(e_1-1)(-e_3e_4+e_2e_5-e_5)(-e_3e_6-e_1e_7+e_2e_7)(-e_5e_6-e_1e_7+e_4e_7+e_5)\\
(-e_3e_4+e_2e_5+e_3e_6-e_5e_6-e_2e_7+e_4e_7),\\
e_1(e_1-1)(-e_3e_4+e_2e_5-e_5)(-e_3e_6-e_1e_7+e_2e_7)(-e_5e_6-e_1e_7+e_4e_7+e_5)\\
(-e_3e_4+e_2e_5+e_3e_6-e_5e_6-e_2e_7+e_4e_7),\\
-f_1(e_1e_3e_4e_6-e_1e_2e_5e_6-e_3e_4e_6+e_1e_5e_6-e_1e_4e_7+e_2e_4e_7)\\
(-e_1e_3e_4e_7+e_1e_2e_5e_7+e_3e_5e_6+e_1e_3e_7-e_1e_5e_7-e_2e_5e_7-e_2e_5e_7-e_3e_5+e_5e_7)\\
(e_1^2e_3e_7-e_1e_3e_4e_7-e_1^2e_5e_7+e_1e_2e_5e_7-e_1e_3e_5+e_3e_5e_6+e_1e_5e_7-e_2e_5e_7)
\end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

f_1 は余りにも膨大な既約多項式であったため省略している。
$\exists a,i\ \beta_i(a)=0$ となることが $I_a\cap\langle\mathcal{O}\rangle_{\mathbb{Q}}\neq\{0\}$ となる。つまり $I_a\ni ax+by+c(a,b,c\in\mathbb{Q})$ と表せる。P,Q,R は一直線に存在することの検討できる。今回の例においてもその挙動は様々である。

- $-e_3e_4+e_2e_5+e_3e_6-e_5e_6-e_2e_7+e_4e_7=0$
  A',B',C' が一直線上になる多項式であり、目的であるパップスの定理の性質である。

- $e_1 = 0$
  A と C が一致し、P, Q, R は $\overline{AB'} = \overline{B'C}$ 上で一直線である。
- $-e_3e_4 + e_2e_5 - e_5 = 0$
  $\overline{AB'} \parallel \overline{A'B}$ であり P が存在せず $I_a = \mathbb{Q}[x, y]$ である。
- $e_1e_3e_4e_6 - e_1e_2e_5e_6 - e_3e_4e_6 + e_1e_5e_6 - e_1e_4e_7 + e_2e_4e_7 = 0$
  例えば $e_4e_7 - e_5e_6 = 0$ の時、即ち A, B', C' が一直線上にある時 $e_1 = 1$、$e_4 = 0$、$e_3e_6 - e_4e_5 = 0$ の時この多項式は 0 となる。特に $e_4 = 0$ の場合 R は一点に定まらないものの、何処にせよ P, Q, R は $\overline{ABC}$ 上で一直線となる。

このように、幾何学的に検討したい order $\mathcal{O}$ を取り、parameterized $\mathcal{O}$-border basis を取ることにより、その挙動を見ることができる。ただし、検討して出てきた値が意味する事は式により変動する場合がある。今回の example でも、元々欲しかった三点が一直線上に並ぶ場合もあれば、二点が一致する場合、$I_a = \mathbb{Q}[x, y]$ となる場合も考え得る。

5 謝辞

本論文の執筆に当たり、論文の執筆や研究についてわからないことが多い中でも毎週のセミナーや多くの相談、助言、指摘をしてくだり、曲線回帰を行うことについて border basis についてご紹介いただいた後、0 次元化についての言及から始まり、多くのことについて具体的なアドバイスをいただき、執筆した論文にも多くの指摘を頂きながら本論文を書き上げることができました。椙先生へここに感謝の言葉を申し上げます。また、研究室内で助言を頂きお世話になった多くの方々へも重ねて、感謝を申し上げます。ありがとうございました。

参考文献

[AFT] J. Abbott, C. Fassino, M. L. Torrente, Stable border bases for ideals of points, Journal of Symbolic Computation 43, 2008, 883-894.

[T] 手島 悠人, Border Bases による代数曲線回帰について, 椙元空間 (http://pc193097.pc.waseda.ac.jp/MasterThesis/index.html), 2011.

[KR2] M. Kreuzer, L. Robbiano, Computational Commutative Algebra 2, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.

[CLO] D. A. Cox,J. Little,D O'Shea Ideals, Varieties, and Algorithms, Springer International Publishing Switzerland, 2015.

[S] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schoenemann Singular , 2015.

6 計算式

(Example 4.11.) の parameterized border basis

$$G = \left\{ \begin{array}{l} y^3 + (-e_2 - e_4 - e_6 - 4)y^2 \\ +(e_2e_4 + e_2e_6 + 4e_2 + e_4e_6 + 3e_4 + e_6 + 3)y \\ +(-e_2e_4e_6 - 3e_2e_4 - e_2e_6 - 3e_2), \\ \\ -(e_4 - e_2 + 1)(e_6 - e_2 + 3)(e_6 - e_4 + 2)x \\ +(-e_1e_4 + e_1e_6 + 2e_1 + e_2e_3 - e_2e_5 - e_2 - e_3e_6 \\ -3e_3 + e_4e_5 + 2e_4 + e_5 - e_6 - 1)y^2 \\ +(e_1e_4^2 + 2e_1e_4 - e_1e_6^2 - 6e_1e_6 - 8e_1 - e_2^2e_3 \\ +e_2^2e_5 + e_2^2 + e_3e_6^2 + 6e_3e_6 + 9e_3 - e_4^2e_5 \\ -2e_4^2 - 2e_4e_5 - 4e_4 - e_5 + e_6^2 + 6e_6 + 7)y \\ +(-e_1e_4^2e_6 - 3e_1e_4^2 + e_1e_4e_6^2 + 4e_1e_4e_6 \\ +3e_1e_4 + e_1e_6^2 + 5e_1e_6 + 6e_1 + e_2^2e_3e_6 + 3e_2^2e_3 \\ -e_2^2e_4e_5 - 2e_2^2e_4 - e_2^2e_5 + e_2^2e_6 + e_2^2 - e_2e_3e_6^2 \\ -6e_2e_3e_6 - 9e_2e_3 + e_2e_4^2e_5 + 2e_2e_4^2 + 2e_2e_4e_5 \\ +4e_2e_4 + e_2e_5 - e_2e_6^2 - 6e_2e_6 - 7e_2), \\ \\ (e_4 - e_2 + 1)(e_6 - e_2 + 3)(e_6 - e_4 + 2)xy \\ +(e_1e_2e_4 - e_1e_2e_6 - 2e_1e_2 - e_2e_3e_4 - e_2e_3 - e_2e_4 \\ +e_2e_5e_6 + 3e_2e_5 + 2e_2e_6 + 5e_2 + e_3e_4e_6 + 3e_3e_4 + e_3e_6 \\ +3e_3 - e_4e_5e_6 - 3e_4e_5 - e_4e_6 - 3e_4 - e_5e_6 - 3e_5 - e_6 - 3)y^2 \\ +(-e_1e_2e_4^2 - 2e_1e_2e_4 + e_1e_2e_6^2 + 6e_1e_2e_6 + 8e_1e_2 \\ +e_2^2e_3e_4 + e_2^2e_3 + e_2^2e_4 - e_2^2e_5e_6 - 3e_2^2e_5 \\ -2e_2^2e_6 - 5e_2^2 - e_3e_4e_6^2 - 6e_3e_4e_6 - 9e_3e_4 - e_3e_6^2 \\ -6e_3e_6 - 9e_3 + e_4^2e_5e_6 + 3e_4^2e_5 + 2e_4^2e_6 + 6e_4^2 + 2e_4e_5e_6 \\ +6e_4e_5 - e_4e_6^2 - 2e_4e_6 + 3e_4 + e_5e_6 + 3e_5 - e_6^2 - 4e_6 - 3)y \\ +(e_1e_2e_4^2e_6 + 3e_1e_2e_4^2 - e_1e_2e_4e_6^2 - 4e_1e_2e_4e_6 \\ -3e_1e_2e_4 - e_1e_2e_6^2 - 5e_1e_2e_6 - 6e_1e_2 - e_2^2e_3e_4e_6 \\ -3e_2^2e_3e_4 - e_2^2e_3e_6 - 3e_2^2e_3 + e_2^2e_4e_5e_6 + 3e_2^2e_4e_5 \\ +e_2^2e_4e_6 + 3e_2^2e_4 + e_2^2e_5e_6 + 3e_2^2e_5 + e_2^2e_6 + 3e_2^2 \\ +e_2e_3e_4e_6^2 + 6e_2e_3e_4e_6 + 9e_2e_3e_4 + e_2e_3e_6^2 + 6e_2e_3e_6 \\ +9e_2e_3 - e_2e_4^2e_5e_6 - 3e_2e_4^2e_5 - 2e_2e_4^2e_6 \\ -6e_2e_4^2 - 2e_2e_4e_5e_6 - 6e_2e_4e_5 + e_2e_4e_6^2 \\ +2e_2e_4e_6 - 3e_2e_4 - e_2e_5e_6 - 3e_2e_5 + e_2e_6^2 + 4e_2e_6 + 3e_2) \end{array} \right\}$$

(Example 4.13.) の parameterized border basis

$$
\left\{
\begin{array}{c}
z^5 + \frac{1}{100}z^4 - \frac{2502}{25}z^3 - \frac{9}{25}z^2 + \frac{57672}{25}z, \\[2ex]
xz^5 - \frac{1}{100}xz^4 - \frac{2502}{25}xz^3 - \frac{9}{25}xz^2 + \frac{57672}{25}xz, \\[2ex]
x^2 + \frac{2990188091y^2+665239702650}{1361683523353104}z^4 + \frac{1045228372691y^2+157290259222650}{136168352335310400}z^3 \\
+\frac{-4946158047547y^2+21665172529039000}{22694725389218400}z^2 + \frac{-699545594273y^2-26215043203775}{630409038589400}z + y^2 - 99, \\[2ex]
x^2z - \frac{-19517569y^2-2933052800}{2549969144856}z^4 - \frac{-466018969y^2-255896543292800}{254996914485600}z^3 \\
-\frac{47126779523y^2+1759831680000}{42499485747600}z^2 - \frac{-1761841341877y^2+177306097816800}{1770811906150}z, \\[2ex]
x^2z^2 - \frac{-744169y^2-426489350400}{424994857476}z^4 - \frac{14571474431y^2-3132500390400}{42499485747600}z^3 \\
-\frac{-7047384885077y^2+709221458214400}{7083247624600}z^2 - \frac{15633572769y^2+2349375292800}{885405953075}z, \\[2ex]
x^2z^3 - \frac{24287031y^2-4510018400}{70832476246}z^4 - \frac{-7048626158969y^2-2162778252800}{7083247624600}z^3 \\
-\frac{62532058569y^2+8118033120000}{3541623812300}z^2 - \frac{3576476214y^2+2049707818022400}{885405953075}z, \\[2ex]
x^2z^4 - \frac{-35243252230y^2-10791341172}{35416238123}z^4 - \frac{184064361693y^2-14450098953600}{3541623812300}z^3 \\
-\frac{7371535707y^2+4099375045879200}{1770811906150}z^2 - \frac{-700340825916y^2+130050890582400}{885405953075}z
\end{array}
\right\}
$$

(Example 4.14.) の parameterized border basis

$$
\left\{
\begin{array}{c}
6y^3 + (13z+20)y^2 + (-16z^2+40z)y + (-3z^3-60z^2), \\[2ex]
(119z^3+200z^2-400z)x + \frac{48z^2+735z-300}{2}y^2 \\
+\frac{-192z^3+3535z^2-200z-2000}{4}y + \frac{-188z^4-5805z^3+2400z^2-2000z}{4}, \\[2ex]
(119z^3+200z^2-400z)xy - \frac{-8z^3-335z^2+1900z}{2}y^2 \\
-\frac{444z^4+1245z^3+9000z^2-6000z}{4}y - \frac{48z^5+225z^4-14400z^3+6000z^2}{4}, \\[2ex]
(119z^3+200z^2-400z)xy^2 - \frac{718z^4+4125z^3+4500z^2-28000z}{6}y^2 \\
-\frac{16z^5-4365z^4+600z^3-58000z^2}{12}y - \frac{-8z^6-495z^5-4800z^4+38000z^3}{4}
\end{array}
\right\}
$$

(Example 4.15.)

$$
\begin{aligned}
f_1 =& -e_1^4e_2^2e_3e_5^2e_6^2e_7 + e_1^4e_2^2e_5^3e_6^2e_7 - e_1^4e_2^2e_5^3e_6e_7 + e_1^4e_2^2e_5^2e_6e_7^2 + 2e_1^4e_2e_3^2e_4e_5e_6^2e_7 - e_1^4e_2e_3^2e_5e_6^2e_7 \\
& -2e_1^4e_2e_3e_4e_5^2e_6^2e_7 + 2e_1^4e_2e_3e_4e_5^2e_6e_7 - 3e_1^4e_2e_3e_4e_5e_6e_7^2 + e_1^4e_2e_3e_4e_5e_7^2 - e_1^4e_2e_3e_4e_7^3 \\
& +3e_1^4e_2e_3e_5^2e_6^2e_7 - e_1^4e_2e_3e_5^2e_6e_7 + e_1^4e_2e_3e_5e_6e_7^2 + e_1^4e_2e_4e_5^2e_6e_7^2 - e_1^4e_2e_4e_5^2e_7^2 + e_1^4e_2e_4e_5e_7^3 \\
& -2e_1^4e_2e_5^3e_6^2e_7 + 2e_1^4e_2e_5^3e_6e_7 - 2e_1^4e_2e_5^2e_6e_7^2 - e_1^4e_3^3e_4^2e_6^2e_7 + e_1^4e_3^3e_4e_6^2e_7 + e_1^4e_3^2e_4^2e_5e_6^2e_7 \\
& -e_1^4e_3^2e_4^2e_5e_6e_7 + 2e_1^4e_3^2e_4^2e_6e_7^2 - e_1^4e_3^2e_4^2e_7^2 - 3e_1^4e_3^2e_4e_5e_6^2e_7 + e_1^4e_3^2e_4e_5e_6e_7 - e_1^4e_3^2e_4e_6e_7^2 + e_1^4e_3^2e_5e_6^2e_7 \\
& -e_1^4e_3e_4^2e_5e_6e_7^2 + e_1^4e_3e_4^2e_5e_7^2 + 2e_1^4e_3e_4e_5^2e_6^2e_7 - 2e_1^4e_3e_4e_5^2e_6e_7 + 3e_1^4e_3e_4e_5e_6e_7^2 - e_1^4e_3e_4e_5e_7^2 \\
& +e_1^4e_3e_4e_7^3 - 2e_1^4e_3e_5^2e_6^2e_7 + e_1^4e_3e_5^2e_6e_7 - e_1^4e_3e_5e_6e_7^2 - e_1^4e_4e_5^2e_6e_7^2 + e_1^4e_4e_5^2e_7^2 - e_1^4e_4e_5e_7^3 \\
& +e_1^4e_5^3e_6^2e_7 - e_1^4e_5^3e_6e_7 + e_1^4e_5^2e_6e_7^2 - e_1^3e_2^3e_5^3e_6^2e_7 + e_1^3e_2^3e_5^3e_6e_7 - e_1^3e_2^3e_5^2e_6e_7^2 + 3e_1^3e_2^2e_3e_4e_5^2e_6^2e_7 \\
& -2e_1^3e_2^2e_3e_4e_5^2e_6e_7 + 3e_1^3e_2^2e_3e_4e_5e_6e_7^2 - e_1^3e_2^2e_3e_4e_5e_7^2 + e_1^3e_2^2e_3e_4e_7^3 + e_1^3e_2^2e_3e_5^2e_6^2e_7 \\
& +e_1^3e_2^2e_3e_5^2e_6e_7 - e_1^3e_2^2e_3e_5e_6e_7^2 - 3e_1^3e_2^2e_4e_5^2e_6e_7^2 + 2e_1^3e_2^2e_4e_5^2e_7^2 - 2e_1^3e_2^2e_4e_5e_7^3 + e_1^3e_2^2e_5^3e_6^2e_7 \\
& -e_1^3e_2^2e_5^3e_6e_7 + e_1^3e_2^2e_5^2e_6e_7^2 - 3e_1^3e_2e_3^2e_4^2e_5e_6^2e_7 + e_1^3e_2e_3^2e_4^2e_5e_6e_7 - 2e_1^3e_2e_3^2e_4^2e_6e_7^2 + e_1^3e_2e_3^2e_4^2e_7^2 \\
& -2e_1^3e_2e_3^2e_4e_5e_6^2e_7 - e_1^3e_2e_3^2e_5^2e_6^3 + e_1^3e_2e_3^2e_5^2e_6^2 + e_1^3e_2e_3^2e_5e_6^2e_7 + 5e_1^3e_2e_3e_4^2e_5e_6e_7^2 - 3e_1^3e_2e_3e_4^2e_5e_7^2 \\
& +2e_1^3e_2e_3e_4^2e_7^3 - 2e_1^3e_2e_3e_4e_5^2e_6^2e_7 + e_1^3e_2e_3e_4e_5^2e_6e_7 - e_1^3e_2e_3e_4e_5^2e_7 - 2e_1^3e_2e_3e_4e_5e_6e_7^2 \\
& +2e_1^3e_2e_3e_4e_5e_7^2 - e_1^3e_2e_3e_4e_7^3 + e_1^3e_2e_3e_5^3e_6^3 - 2e_1^3e_2e_3e_5^3e_6^2 + e_1^3e_2e_3e_5^3e_6 - 2e_1^3e_2e_3e_5^2e_6^2e_7 \\
& -2e_1^3e_2e_3e_5^2e_6e_7 + e_1^3e_2e_3e_5e_6e_7^2 - e_1^3e_2e_4^2e_5e_7^3 + 3e_1^3e_2e_4e_5^2e_6e_7^2 - e_1^3e_2e_4e_5^2e_7^2 + e_1^3e_2e_4e_5e_7^3 \\
& +e_1^3e_2e_5^3e_6^2e_7 - e_1^3e_2e_5^3e_6e_7 + e_1^3e_2e_5^2e_6e_7^2 + e_1^3e_3^3e_4^3e_6^2e_7 + e_1^3e_3^3e_4^2e_6^2e_7 - e_1^3e_3^3e_4^2e_6e_7 + e_1^3e_3^3e_4e_5e_6^3 \\
& -e_1^3e_3^3e_4e_5e_6^2 - e_1^3e_3^3e_4e_6^2e_7 - 2e_1^3e_3^2e_4^3e_6e_7^2 + e_1^3e_3^2e_4^3e_7^2 + e_1^3e_3^2e_4^2e_5e_6^2e_7 + e_1^3e_3^2e_4^2e_5e_7 + e_1^3e_3^2e_4^2e_7^2 \\
& -e_1^3e_3^2e_4e_5^2e_6^3 + 2e_1^3e_3^2e_4e_5^2e_6^2 - e_1^3e_3^2e_4e_5^2e_6 + 2e_1^3e_3^2e_4e_5e_6^2e_7 + e_1^3e_3^2e_4e_6e_7^2 + e_1^3e_3^2e_5^2e_6^3 - e_1^3e_3^2e_5^2e_6^2 \\
& -e_1^3e_3^2e_5e_6^2e_7 - e_1^3e_3e_4^2e_5e_6e_7^2 - e_1^3e_3e_4^2e_5e_7^2 - 2e_1^3e_3e_4^2e_7^3 - e_1^3e_3e_4e_5^2e_6^2e_7 + e_1^3e_3e_4e_5^2e_6e_7 + e_1^3e_3e_4e_5^2e_7 \\
& -e_1^3e_3e_4e_5e_6e_7^2 - e_1^3e_3e_4e_5e_7^2 - e_1^3e_3e_5^3e_6^3 + 2e_1^3e_3e_5^3e_6^2 - e_1^3e_3e_5^3e_6 + e_1^3e_3e_5^2e_6^2e_7 + e_1^3e_3e_5^2e_6e_7 \\
& +e_1^3e_4^2e_5e_7^3 - e_1^3e_4e_5^2e_7^2 + e_1^3e_4e_5e_7^3 - e_1^3e_5^3e_6^2e_7 + e_1^3e_5^3e_6e_7 - e_1^3e_5^2e_6e_7^2 + 2e_1^2e_2^3e_4e_5^2e_6e_7^2 \\
& -e_1^2e_2^3e_4e_5^2e_7^2 + e_1^2e_2^3e_4e_5e_7^3 + e_1^2e_2^3e_5^3e_6^2e_7 - e_1^2e_2^3e_5^3e_6e_7 + e_1^2e_2^3e_5^2e_6e_7^2 - 4e_1^2e_2^2e_3e_4^2e_5e_6e_7^2 \\
& +2e_1^2e_2^2e_3e_4^2e_5e_7^2 - 2e_1^2e_2^2e_3e_4^2e_7^3 - 4e_1^2e_2^2e_3e_4e_5^2e_6^2e_7 + e_1^2e_2^2e_3e_4e_5^2e_6e_7 + e_1^2e_2^2e_3e_4e_5^2e_7 \\
& -e_1^2e_2^2e_3e_4e_5e_6e_7^2 - e_1^2e_2^2e_3e_4e_5e_7^2 - e_1^2e_2^2e_3e_5^3e_6^3 + 2e_1^2e_2^2e_3e_5^3e_6^2 - e_1^2e_2^2e_3e_5^3e_6 - 2e_1^2e_2^2e_3e_5^2e_6^2e_7 \\
& +e_1^2e_2^2e_3e_5^2e_6e_7 + 2e_1^2e_2^2e_4^2e_5e_7^3 - e_1^2e_2^2e_4e_5^2e_7^2 + e_1^2e_2^2e_4e_5e_7^3 - 2e_1^2e_2^2e_5^3e_6^2e_7 + 2e_1^2e_2^2e_5^3e_6e_7 \\
& -2e_1^2e_2^2e_5^2e_6e_7^2 + 2e_1^2e_2e_3^2e_4^3e_6e_7^2 - e_1^2e_2e_3^2e_4^3e_7^2 + 5e_1^2e_2e_3^2e_4^2e_5e_6^2e_7 - e_1^2e_2e_3^2e_4^2e_5e_6e_7 \\
& -e_1^2e_2e_3^2e_4^2e_5e_7 + 2e_1^2e_2e_3^2e_4^2e_6e_7^2 - e_1^2e_2e_3^2e_4^2e_7^2 + 2e_1^2e_2e_3^2e_4e_5^2e_6^3 - 2e_1^2e_2e_3^2e_4e_5^2e_6^2 \\
& +e_1^2e_2e_3^2e_4e_5e_6^2e_7 + e_1^2e_2e_3^2e_5^2e_6^3 - e_1^2e_2e_3^2e_5^2e_6^2 - e_1^2e_2e_3e_4^3e_7^3 - 3e_1^2e_2e_3e_4^2e_5e_6e_7^2 \\
& +2e_1^2e_2e_3e_4^2e_5e_7^2 + 2e_1^2e_2e_3e_4^2e_7^3 + 3e_1^2e_2e_3e_4e_5^2e_6^2e_7 + 2e_1^2e_2e_3e_4e_5^2e_6e_7 - e_1^2e_2e_3e_4e_5^2e_7 \\
& -e_1^2e_2e_3e_4e_5e_6e_7^2 + e_1^2e_2e_3e_4e_5e_7^2 + e_1^2e_2e_3e_5^3e_6^3 - 2e_1^2e_2e_3e_5^3e_6^2 + e_1^2e_2e_3e_5^3e_6 + 3e_1^2e_2e_3e_5^2e_6^2e_7 \\
& -e_1^2e_2e_3e_5^2e_6e_7 - e_1^2e_2e_4^2e_5e_7^3 - 3e_1^2e_2e_4e_5^2e_6e_7^2 + 2e_1^2e_2e_4e_5^2e_7^2 - 2e_1^2e_2e_4e_5e_7^3 + e_1^2e_2e_5^3e_6^2e_7 \\
& -e_1^2e_2e_5^3e_6e_7 + e_1^2e_2e_5^2e_6e_7^2 - 2e_1^2e_3^3e_4^3e_6^2e_7 + e_1^2e_3^3e_4^3e_6e_7 - e_1^2e_3^3e_4^2e_5e_6^3 + e_1^2e_3^3e_4^2e_5e_6 \\
& +e_1^2e_3^3e_4^2e_6e_7 - e_1^2e_3^3e_4e_5e_6^3 + e_1^2e_3^3e_4e_5e_6^2 + e_1^2e_3^2e_4^3e_6e_7^2 - e_1^2e_3^2e_4^3e_7^2 - 2e_1^2e_3^2e_4^2e_5e_6e_7 \\
& -e_1^2e_3^2e_4^2e_5e_7 - 2e_1^2e_3^2e_4^2e_6e_7^2 - e_1^2e_3^2e_4e_5^2e_6^3 + e_1^2e_3^2e_4e_5^2e_6 - e_1^2e_3^2e_4e_5e_6e_7 - e_1^2e_3^2e_5^2e_6^3 \\
& +e_1^2e_3^2e_5^2e_6^2 + e_1^2e_3e_4^3e_7^3 + e_1^2e_3e_4^2e_5e_6e_7^2 + 2e_1^2e_3e_4^2e_5e_7^2 + e_1^2e_3e_4e_5^2e_6^2e_7 - 3e_1^2e_3e_4e_5^2e_6e_7 \\
& +2e_1^2e_3e_4e_5e_6e_7^2 - e_1^2e_3e_5^2e_6^2e_7 - e_1^2e_4^2e_5e_7^3 + e_1^2e_4e_5^2e_6e_7^2 - e_1e_2^3e_4^2e_5e_7^3 - 2e_1e_2^3e_4e_5^2e_6e_7^2 \\
& +e_1e_2^3e_4e_5^2e_7^2 - e_1e_2^3e_4e_5e_7^3 + e_1e_2^2e_3e_4^3e_7^3 + 4e_1e_2^2e_3e_4^2e_5e_6e_7^2 - e_1e_2^2e_3e_4^2e_5e_7^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+4e_1e_2^2e_3e_4e_5^2e_6^2e_7-3e_1e_2^2e_3e_4e_5^2e_6e_7+2e_1e_2^2e_3e_4e_5e_6e_7^2-e_1e_2^2e_4^2e_5e_7^3+3e_1e_2^2e_4e_5^2e_6e_7^2\\
&-e_1e_2^2e_4e_5^2e_7^2+e_1e_2^2e_4e_5e_7^3-2e_1e_2e_3^2e_4^3e_6e_7^2+e_1e_2e_3^2e_4^3e_7^2-5e_1e_2e_3^2e_4^2e_5e_6^2e_7\\
&+2e_1e_2e_3^2e_4^2e_5e_6e_7+e_1e_2e_3^2e_4^2e_5e_7-2e_1e_2e_3^2e_4e_5^2e_6^3+2e_1e_2e_3^2e_4e_5^2e_6^2-e_1e_2e_3^2e_4e_5e_6^2e_7\\
&-e_1e_2e_3e_4^3e_7^3+2e_1e_2e_3e_4^2e_5e_6e_7^2-3e_1e_2e_3e_4^2e_5e_7^2-5e_1e_2e_3e_4e_5^2e_6^2e_7+3e_1e_2e_3e_4e_5^2e_6e_7\\
&-2e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7^2+2e_1e_2e_4^2e_5e_7^3-e_1e_2e_4e_5^2e_6e_7^2+e_1e_3^3e_4^3e_6^2e_7-e_1e_3^3e_4^3e_6e_7+2e_1e_3^3e_4^2e_5e_6^3\\
&-e_1e_3^3e_4^2e_5e_6^2-e_1e_3^3e_4^2e_5e_6+e_1e_3^2e_4^3e_6e_7^2-e_1e_3^2e_4^2e_5e_6^2e_7+3e_1e_3^2e_4^2e_5e_6e_7+2e_1e_3^2e_4e_5^2e_6^3\\
&-2e_1e_3^2e_4e_5^2e_6^2+e_1e_3^2e_4e_5e_6^2e_7-2e_1e_3e_4^2e_5e_6e_7^2+e_1e_3e_4e_5^2e_6^2e_7+e_2^3e_4^2e_5e_7^3-3e_2^2e_3e_4^2e_5e_6e_7^2\\
&+e_2^2e_3e_4^2e_5e_7^2-e_2^2e_4^2e_5e_7^3+3e_2e_3^2e_4^2e_5e_6^2e_7-2e_2e_3^2e_4^2e_5e_6e_7+2e_2e_3e_4^2e_5e_6e_7^2-e_3^3e_4^2e_5e_6^3\\
&+e_3^3e_4^2e_5e_6^2-e_3^2e_4^2e_5e_6^2e_7
\end{aligned}
$$