SHGH Conjecture and the irrationality of Seshadri Constants

梠研究室　広川未流

1. Introduction

Question. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の線形系の次元を決定せよ.

以下, $\pi : X_r \to \mathbb{P}^2$ を一般の r 点での $\mathbb{P}^2$ の blow-up とし, その exceptional divisors を $e_1, \cdots, e_r$, l を $\mathbb{P}^2$ の直線の π による引き戻しとする.

Definition 1.1 (Special [1], [2])**.**
$\operatorname{Pic} X_r \ni D = dl - \sum_{i=1}^{r} m_i e_i$ に対して,
virtual dimension : $v\text{-}\dim(D) := \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i(m_i+1)}{2}$
expected dimension : $e\text{-}\dim(D) := \max\{v\text{-}\dim(D), 0\}$ と定義する.

$h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) \geq e\text{-}\dim(D)$ となることが知られており, "$=$" となるとき D は *nonspecial,* "$>$" となるとき D は *special* という.

Remark.
D が effective なら D:special $\Leftrightarrow h^1(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) \neq 0$ となることが Riemann-Roch の定理よりわかる.

Conjecture 1.2 (SHGH conjecture [1],[2],[8])**.**
次は同値である. この一つ *(*したがって全て*)* の命題を *SHGH* 予想と呼ぶ.
・C *: prime divisor on* $X_r \Rightarrow C$ *: nonspecial*
・$D \in \operatorname{Pic} X_r$ *: special* $\Rightarrow \exists C$ *:* (-1)*-curve s.t.* $D.C \leq -2$
・$D \in \operatorname{Pic} X_r$ *: standard form* $\Rightarrow D$ *: nonspecial*

Known Results on SHGH conjecture.
以下の場合に SHGH conjecture は肯定的である.
・$r \leq 9$ のとき [7]
・$D = dl - \sum_{i=1}^{r} m_i e_i$, $m_i \leq 11$ のとき [5]
・$D = dl - m\sum_{i=1}^{r} e_i$, $m \leq 42$ のとき [6]
また, SHGH conjecture は Nagata conjecture を含んでいることが知られている.[1]

Conjecture 1.3 (Nagata conjecture [10],[1])**.**
C *:* 既約かつ被約な平面曲線, $\deg(C) = d$, $\operatorname{mult}_{p_i} C = m_i$ *(*$p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{P}^2$*)* に対して,

$$d \geq \tfrac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^{r} m_i$$

Definition 1.4 (Seshadri constant [3],[9],[12])**.**
X*:*非特異射影代数多様体, L*:*X 上の *nef line bundle* とする. L の $p \in X$ における *Seshadri constant* を次で定義する.

$$\varepsilon(L; p) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \mu^* L - tE\text{: nef}\}$$

ただし, $\mu : \tilde{X} \to X$ *:* p における X の *blow-up* で, E は *exceptional divisor* とする.

Remark.
・very general な点での Seshadri constant の値は一定であり [11], その値を $\varepsilon_{\mathrm{gen}}$ と記す
・$\varepsilon_{\mathrm{gen}}$ が無理数になる例は知られていない

Theorem 1.5 (**Main Theorem**)**.**
$r \geq 9$ を整数とする. *SHGH* 予想が $r+1$ で成立すれば,
$\mathbb{P}^2$ の r 点 *blow-up* 上に *Seshadri constant* $\varepsilon_{\mathrm{gen}}(A)$ が無理数になる *ample divisor* A が存在する

Corollary 1.6.
基礎体を $\mathbb{C}$ とし, $r \geq 9$ を整数とする．SHGH 予想が $r+1$ で成立すれば,
任意の $a \in \{sn^2 \mid s, n \in \mathbb{N},\ 9 \leq s \leq r\}$ に対して, Seshadri constant が無理数になる ample divisor A が X_a 上に存在する．

Remark.
del Pezzo surface ($r \leq 8$) 上の ample divisor の Seshadri constant は有理数になる [11].

2. Outline of Proof

Theorem 1.5 (Main Theorem) は次の二つの命題を組み合わせると証明される．

Proposition 2.1 (Key Proposition).
r を正の整数とする．SHGH 予想が $r+1$ のときに成り立てば, r のときも成立する．

Outline of Proof.

- standard な divisor D に対して, π^*D を考え、SHGH conjecture for $r+1$ の仮定を満たすかどうかで場合分け
- SHGH conjecture for $r+1$ の仮定を満たす場合は, π^*D が nonspecial になるので, D, π^*D の dimension と expected dimension を計算すると D も nonspecial になる
- そうでない時は, X_r 上の nef divisor の条件, もしくは (-1)-curve について ideal long exact sequence を取って, 簡単な場合に帰着する．

Theorem 2.2 ([4])**.**
r を 9 以上の整数とする．SHGH 予想が $r+1$ で成立すれば, 次のどちらかが成り立つ．
(1)$\varepsilon_{\mathrm{gen}}(A)$ が無理数になる ample divisor $A \in \operatorname{Pic} X_r$ が存在する
(2)SHGH 予想が r で成立しない

- Key Proposition と [4] の結果を組み合わせると, Theorem 2.2 の仮定から (2) の場合は起こらないので, (1) が従い, Theorem 1.5 (Main Theorem) が得られる

References

[1] C. Ciliberto, B. Harbourne, R. Miranda and J. Roe, “Variations on Nagata's Conjecture”, arXiv:1202.0475.
[2] C. Ciliberto, “Geometric aspects of polynomial interpolation in more variables and of Waring's problem.” European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000), 289–316, Progr. Math., **201**, Birkhuser, Basel, 2001.
[3] J. P. Demailly, “Singular Hermitian metrics on positive line bundles.” Complex algebraic vari-eties (Bayreuth, 1990), Lect. Notes Math. **1507**, Springer-Verlag, 1992, pp. 87–104.
[4] M. Dumnicki, A. Küronya, C. Maclean, T. Szemberg, “Seshadri constants via Okounkov functions and the Segre-Harbourne-Gimigliano-Hirschowitz Conjecture”, arXiv:1304.0249.
[5] M. Dumnicki, W.Jarnicki, “New effective bounds on the dimension of a linear system in $\mathbb{P}^2$”, J. Symbolic Comput. **42**, 621–635 (2007).
[6] M. Dumnicki, “Cutting diagram method for systems of plane curves with base points,” Ann. Polon. Math. **90**, 131–143 (2007).
[7] B. Harbourne, “Complete linear systems on rational surfaces”, Trans. A.M.S. **289** (1985), 213–226.
[8] A. Hirschowitz, “Une conjecture pour la cohomologie des diviseurs sur les surfaces rationelles génériques, J. Reine Angew.Math. **397** (1989), 208–213.
[9] R. Lazarsfeld, “Positivity in Algebraic Geometry I”, Springer-Verlag, 2004.
[10] M. Nagata, “On the fourteenth problem of Hilbert”, Amer. J. Math. **81** (1959), 766–772.
[11] T. Sano, “Seshadri constants on rational surfaces with anticanonical pencils”. J. Pure Appl. Algebra **218** (2014), no. 4, 602–617.
[12] T. Bauer, Th., S. Di Rocco, B. Harbourne, M. Kapustka, A. Knutsen, W. Syzdek, T. Szemberg “A primer on Seshadri constants”, Interactions of Classical and Numerical Algebraic Geometry, Proceedings of a conference in honor of A. J. Sommese, held at Notre Dame, May 2224 2008. Contemporary Mathematics vol. **496**, (2009), 33–70.