

SHGH conjecture and the irrationality of Seshadri constants

広川未流

楫研究室

February 5, 2016

Question

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の線形系の次元を決定せよ.

線形系の次元について (例)

- 2 次曲線全体 : 6
2 次曲線の定義方程式 :
$$f = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz + a_6z^2$$
 - $p(= [0 : 0 : 1])$ で重複度 2 を持つ 2 次曲線全体 $\Lambda_1 : 3$
 $a_6 = 0, f_x(p) = f_y(p) = 0 \Leftrightarrow a_4 = a_5 = 0$
 $\Rightarrow 3 = 6 - 3$
 - p_1, p_2 で重複度 2 を持つ通る 2 次曲線全体 $\Lambda_2 :$
同様に $6 - 3 - 3 = 0$ と期待されるが, 次元は 1 となる
-
- 線形系 Λ_1 は “期待通り” の次元になる : nonspecial
 - 線形系 Λ_2 は “期待とは異なる” 次元になる : special

Question

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の線形系の次元を決定せよ.

線形系の次元について (例)

- 2 次曲線全体 : 6

2 次曲線の定義方程式 :

$$f = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz + a_6z^2$$

- $p(= [0 : 0 : 1])$ で重複度 2 を持つ 2 次曲線全体 $\Lambda_1 : 3$
 $a_6 = 0, f_x(p) = f_y(p) = 0 \Leftrightarrow a_4 = a_5 = 0$
 $\Rightarrow 3 = 6 - 3$

- p_1, p_2 で重複度 2 を持つ通る 2 次曲線全体 $\Lambda_2 :$
同様に $6 - 3 - 3 = 0$ と期待されるが, 次元は 1 となる

- 線形系 Λ_1 は “期待通り” の次元になる : nonspecial
- 線形系 Λ_2 は “期待とは異なる” 次元になる : special

Question

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の線形系の次元を決定せよ.

線形系の次元について (例)

- 2 次曲線全体 : 6

2 次曲線の定義方程式 :

$$f = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz + a_6z^2$$

- $p(= [0 : 0 : 1])$ で重複度 2 を持つ 2 次曲線全体 $\Lambda_1 : 3$
 $a_6 = 0, f_x(p) = f_y(p) = 0 \Leftrightarrow a_4 = a_5 = 0$
 $\Rightarrow 3 = 6 - 3$

- p_1, p_2 で重複度 2 を持つ通る 2 次曲線全体 $\Lambda_2 :$
同様に $6 - 3 - 3 = 0$ と期待されるが, 次元は 1 となる

- 線形系 Λ_1 は “期待通り” の次元になる : nonspecial
- 線形系 Λ_2 は “期待とは異なる” 次元になる : special

Question

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の線形系の次元を決定せよ.

線形系の次元について (例)

- 2 次曲線全体 : 6
2 次曲線の定義方程式 :
$$f = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz + a_6z^2$$
 - $p(= [0 : 0 : 1])$ で重複度 2 を持つ 2 次曲線全体 $\Lambda_1 : 3$
 $a_6 = 0, f_x(p) = f_y(p) = 0 \Leftrightarrow a_4 = a_5 = 0$
 $\Rightarrow 3 = 6 - 3$
 - p_1, p_2 で重複度 2 を持つ通る 2 次曲線全体 $\Lambda_2 :$
同様に $6 - 3 - 3 = 0$ と期待されるが, 次元は 1 となる
-
- 線形系 Λ_1 は “期待通り” の次元になる : nonspecial
 - 線形系 Λ_2 は “期待とは異なる” 次元になる : special

Question

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の線形系の次元を決定せよ.

線形系の次元について (例)

- 2 次曲線全体 : 6
2 次曲線の定義方程式 :
$$f = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz + a_6z^2$$
 - $p(= [0 : 0 : 1])$ で重複度 2 を持つ 2 次曲線全体 $\Lambda_1 : 3$
 $a_6 = 0, f_x(p) = f_y(p) = 0 \Leftrightarrow a_4 = a_5 = 0$
 $\Rightarrow 3 = 6 - 3$
 - p_1, p_2 で重複度 2 を持つ通る 2 次曲線全体 $\Lambda_2 :$
同様に $6 - 3 - 3 = 0$ と期待されるが, 次元は 1 となる
-
- 線形系 Λ_1 は “期待通り” の次元になる : nonspecial
 - 線形系 Λ_2 は “期待とは異なる” 次元になる : special

Question

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の線形系の次元を決定せよ.

線形系の次元について (例)

- 2 次曲線全体 : 6
2 次曲線の定義方程式 :
$$f = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz + a_6z^2$$
- $p(= [0 : 0 : 1])$ で重複度 2 を持つ 2 次曲線全体 $\Lambda_1 : 3$
 $a_6 = 0, f_x(p) = f_y(p) = 0 \Leftrightarrow a_4 = a_5 = 0$
 $\Rightarrow 3 = 6 - 3$
- p_1, p_2 で重複度 2 を持つ通る 2 次曲線全体 $\Lambda_2 :$
同様に $6 - 3 - 3 = 0$ と期待されるが, 次元は 1 となる
- 線形系 Λ_1 は “期待通り” の次元になる : nonspecial
- 線形系 Λ_2 は “期待とは異なる” 次元になる : special

Question

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の線形系の次元を決定せよ.

線形系の次元について (例)

- 2 次曲線全体 : 6
2 次曲線の定義方程式 :
$$f = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz + a_6z^2$$
 - $p(= [0 : 0 : 1])$ で重複度 2 を持つ 2 次曲線全体 $\Lambda_1 : 3$
 $a_6 = 0, f_x(p) = f_y(p) = 0 \Leftrightarrow a_4 = a_5 = 0$
 $\Rightarrow 3 = 6 - 3$
 - p_1, p_2 で重複度 2 を持つ通る 2 次曲線全体 $\Lambda_2 :$
同様に $6 - 3 - 3 = 0$ と期待されるが, 次元は 1 となる
-
- 線形系 Λ_1 は “期待通り” の次元になる : nonspecial
 - 線形系 Λ_2 は “期待とは異なる” 次元になる : special

Question

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の線形系の次元を決定せよ.

線形系の次元について (例)

- 2 次曲線全体 : 6
2 次曲線の定義方程式 :
$$f = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz + a_6z^2$$
 - $p(= [0 : 0 : 1])$ で重複度 2 を持つ 2 次曲線全体 $\Lambda_1 : 3$
 $a_6 = 0, f_x(p) = f_y(p) = 0 \Leftrightarrow a_4 = a_5 = 0$
 $\Rightarrow 3 = 6 - 3$
 - p_1, p_2 で重複度 2 を持つ通る 2 次曲線全体 $\Lambda_2 :$
同様に $6 - 3 - 3 = 0$ と期待されるが, 次元は 1 となる
-
- 線形系 Λ_1 は “期待通り” の次元になる : nonspecial
 - 線形系 Λ_2 は “期待とは異なる” 次元になる : special

Question

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の線形系の次元を決定せよ。

線形系の次元について (例)

- 2 次曲線全体 : 6
2 次曲線の定義方程式 :
$$f = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz + a_6z^2$$
 - $p(= [0 : 0 : 1])$ で重複度 2 を持つ 2 次曲線全体 $\Lambda_1 : 3$
 $a_6 = 0, f_x(p) = f_y(p) = 0 \Leftrightarrow a_4 = a_5 = 0$
 $\Rightarrow 3 = 6 - 3$
 - p_1, p_2 で重複度 2 を持つ通る 2 次曲線全体 $\Lambda_2 :$
同様に $6 - 3 - 3 = 0$ と期待されるが, 次元は 1 となる
-
- 線形系 Λ_1 は “期待通り” の次元になる : nonspecial
 - 線形系 Λ_2 は “期待とは異なる” 次元になる : special

Question

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の線形系の次元を決定せよ。

線形系の次元について (例)

- 2 次曲線全体 : 6
2 次曲線の定義方程式 :
$$f = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz + a_6z^2$$
- $p(= [0 : 0 : 1])$ で重複度 2 を持つ 2 次曲線全体 $\Lambda_1 : 3$
 $a_6 = 0, f_x(p) = f_y(p) = 0 \Leftrightarrow a_4 = a_5 = 0$
 $\Rightarrow 3 = 6 - 3$
- p_1, p_2 で重複度 2 を持つ通る 2 次曲線全体 $\Lambda_2 :$
同様に $6 - 3 - 3 = 0$ と期待されるが, 次元は 1 となる
- 線形系 Λ_1 は “期待通り” の次元になる : nonspecial
- 線形系 Λ_2 は “期待とは異なる” 次元になる : special

Question

射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の線形系の次元を決定せよ.

線形系の次元について (例)

- 2 次曲線全体 : 6
2 次曲線の定義方程式 :
$$f = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4xz + a_5yz + a_6z^2$$
 - $p(= [0 : 0 : 1])$ で重複度 2 を持つ 2 次曲線全体 $\Lambda_1 : 3$
 $a_6 = 0, f_x(p) = f_y(p) = 0 \Leftrightarrow a_4 = a_5 = 0$
 $\Rightarrow 3 = 6 - 3$
 - p_1, p_2 で重複度 2 を持つ通る 2 次曲線全体 $\Lambda_2 :$
同様に $6 - 3 - 3 = 0$ と期待されるが, 次元は 1 となる
-
- 線形系 Λ_1 は “期待通り” の次元になる : nonspecial
 - 線形系 Λ_2 は “期待とは異なる” 次元になる : special

Definitions

$\pi : X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$ を一般の r 点での blow-up とし, その exceptional divisor を $e_1, \dots, e_r$, $l := \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$.

Definition (Special divisor)

$\text{Pic} X_r \ni D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i$ に対して,
virtual dimension : $v\text{-dim}(D) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \sum_{i=1}^r \frac{m_i(m_i+1)}{2}$
expected dimension : $e\text{-dim}(D) = \max\{v\text{-dim}(D), 0\}$
と定義する.

$h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) \geq e\text{-dim}(D)$ となることが知られており,

- “=” となるとき D は nonspecial,
- “>” となるとき D は *special* という

special divisor の例

- $D = 2l - 2e_1 - 2e_2$ は special.

$e\text{-dim}(D) = 6 - 3 - 3 = 0$ だが, $h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) = 1$ となる.

Definitions

$\pi : X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$ を一般の r 点での blow-up とし, その exceptional divisor を $e_1, \dots, e_r$, $l := \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$.

Definition (Special divisor)

$\text{Pic} X_r \ni D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i$ に対して,

virtual dimension : $v\text{-dim}(D) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \sum_{i=1}^r \frac{m_i(m_i+1)}{2}$

expected dimension : $e\text{-dim}(D) = \max\{v\text{-dim}(D), 0\}$

と定義する.

$h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) \geq e\text{-dim}(D)$ となることが知られており,

- “=” となるとき D は nonspecial,
- “>” となるとき D は *special* という

special divisor の例

- $D = 2l - 2e_1 - 2e_2$ は special.

$e\text{-dim}(D) = 6 - 3 - 3 = 0$ だが, $h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) = 1$ となる.

Definitions

$\pi : X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$ を一般の r 点での blow-up とし, その exceptional divisor を $e_1, \dots, e_r$, $l := \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$.

Definition (Special divisor)

$\text{Pic} X_r \ni D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i$ に対して,

virtual dimension : $v\text{-dim}(D) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \sum_{i=1}^r \frac{m_i(m_i+1)}{2}$

expected dimension : $e\text{-dim}(D) = \max\{v\text{-dim}(D), 0\}$

と定義する.

$h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) \geq e\text{-dim}(D)$ となることが知られており,

- “=” となるとき D は nonspecial,
- “>” となるとき D は *special* という

special divisor の例

- $D = 2l - 2e_1 - 2e_2$ は special.

$e\text{-dim}(D) = 6 - 3 - 3 = 0$ だが, $h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) = 1$ となる.

Definitions

$\pi : X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$ を一般の r 点での blow-up とし, その exceptional divisor を $e_1, \dots, e_r$, $l := \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$.

Definition (Special divisor)

$\text{Pic} X_r \ni D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i$ に対して,
virtual dimension : $v\text{-dim}(D) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \sum_{i=1}^r \frac{m_i(m_i+1)}{2}$
expected dimension : $e\text{-dim}(D) = \max\{v\text{-dim}(D), 0\}$
と定義する.

$h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) \geq e\text{-dim}(D)$ となることが知られており,

- “=” となるとき D は nonspecial,
- “>” となるとき D は *special* という

special divisor の例

- $D = 2l - 2e_1 - 2e_2$ は special.

$e\text{-dim}(D) = 6 - 3 - 3 = 0$ だが, $h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) = 1$ となる.

Definitions

$\pi : X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$ を一般の r 点での blow-up とし, その exceptional divisor を $e_1, \dots, e_r$, $l := \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$.

Definition (Special divisor)

$\text{Pic} X_r \ni D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i$ に対して,

virtual dimension : $v\text{-dim}(D) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \sum_{i=1}^r \frac{m_i(m_i+1)}{2}$

expected dimension : $e\text{-dim}(D) = \max\{v\text{-dim}(D), 0\}$

と定義する.

$h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) \geq e\text{-dim}(D)$ となることが知られており,

- “=” となるとき D は nonspecial,
- “>” となるとき D は *special* という

special divisor の例

- $D = 2l - 2e_1 - 2e_2$ は special.

$e\text{-dim}(D) = 6 - 3 - 3 = 0$ だが, $h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) = 1$ となる.

Definitions

$\pi : X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$ を一般の r 点での blow-up とし, その exceptional divisor を $e_1, \dots, e_r$, $l := \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$.

Definition (Special divisor)

$\text{Pic} X_r \ni D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i$ に対して,

virtual dimension : $v\text{-dim}(D) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \sum_{i=1}^r \frac{m_i(m_i+1)}{2}$

expected dimension : $e\text{-dim}(D) = \max\{v\text{-dim}(D), 0\}$

と定義する.

$h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) \geq e\text{-dim}(D)$ となることが知られており,

- “=” となるとき D は nonspecial,
- “>” となるとき D は *special* という

special divisor の例

- $D = 2l - 2e_1 - 2e_2$ は special.

$e\text{-dim}(D) = 6 - 3 - 3 = 0$ だが, $h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) = 1$ となる.

Definitions

$\pi : X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$ を一般の r 点での blow-up とし, その exceptional divisor を $e_1, \dots, e_r$, $l := \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$.

Definition (Special divisor)

$\text{Pic} X_r \ni D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i$ に対して,

virtual dimension : $v\text{-dim}(D) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \sum_{i=1}^r \frac{m_i(m_i+1)}{2}$

expected dimension : $e\text{-dim}(D) = \max\{v\text{-dim}(D), 0\}$

と定義する.

$h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) \geq e\text{-dim}(D)$ となることが知られており,

- “=” となるとき D は nonspecial,
- “>” となるとき D は *special* という

special divisor の例

- $D = 2l - 2e_1 - 2e_2$ は special.

$e\text{-dim}(D) = 6 - 3 - 3 = 0$ だが, $h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) = 1$ となる.

Definitions

$\pi : X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$ を一般の r 点での blow-up とし, その exceptional divisor を $e_1, \dots, e_r$, $l := \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$.

Definition (Special divisor)

$\text{Pic} X_r \ni D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i$ に対して,

virtual dimension : $v\text{-dim}(D) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \sum_{i=1}^r \frac{m_i(m_i+1)}{2}$

expected dimension : $e\text{-dim}(D) = \max\{v\text{-dim}(D), 0\}$

と定義する.

$h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) \geq e\text{-dim}(D)$ となることが知られており,

- “=” となるとき D は nonspecial,
- “>” となるとき D は *special* という

special divisor の例

- $D = 2l - 2e_1 - 2e_2$ は special.

$e\text{-dim}(D) = 6 - 3 - 3 = 0$ だが, $h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) = 1$ となる.

Definitions

$\pi : X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$ を一般の r 点での blow-up とし, その exceptional divisor を $e_1, \dots, e_r$, $l := \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$.

Definition (Special divisor)

$\text{Pic} X_r \ni D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i$ に対して,

virtual dimension : $v\text{-dim}(D) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - \sum_{i=1}^r \frac{m_i(m_i+1)}{2}$

expected dimension : $e\text{-dim}(D) = \max\{v\text{-dim}(D), 0\}$

と定義する.

$h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) \geq e\text{-dim}(D)$ となることが知られており,

- “=” となるとき D は nonspecial,
- “>” となるとき D は *special* という

special divisor の例

- $D = 2l - 2e_1 - 2e_2$ は special.

$e\text{-dim}(D) = 6 - 3 - 3 = 0$ だが, $h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) = 1$ となる.

Conjecture

SHGH Conjecture

C : prime divisor on $X_r \Rightarrow C$: nonspecial.

ただし, $\pi: X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$ は平面上の一般 r 点での blow-up とする.
これを **Segre-Harbourne-Gimigliano-Hirschowitz 予想** という.

SHGH 予想は次と同値である.

- $D \in \text{Pic}X_r$: special $\Rightarrow \exists C$: (-1) -curve s.t. $D.C \leq -2$
- $D \in \text{Pic}X_r$: standard form $\Rightarrow D$: nonspecial

SHGH 予想は **Nagata 予想** を導く

Nagata 予想

C : 既約かつ被約な平面曲線, $\deg(C) = d$, $\text{mult}_{p_i} C = m_i$
($p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}^2$) に対して,

$$d \geq \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^r m_i$$

Conjecture

SHGH Conjecture

C : prime divisor on $X_r \Rightarrow C$: nonspecial.

ただし, $\pi: X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$ は平面上の一般 r 点での blow-up とする.
これを **Segre-Harbourne-Gimigliano-Hirschowitz 予想** という.

SHGH 予想は次と同値である.

- $D \in \text{Pic}X_r$: special $\Rightarrow \exists C$: (-1) -curve s.t. $D.C \leq -2$
- $D \in \text{Pic}X_r$: standard form $\Rightarrow D$: nonspecial

SHGH 予想は **Nagata 予想** を導く

Nagata 予想

C : 既約かつ被約な平面曲線, $\deg(C) = d$, $\text{mult}_{p_i} C = m_i$
($p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}^2$) に対して,

$$d \geq \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^r m_i$$

Conjecture

SHGH Conjecture

C : prime divisor on $X_r \Rightarrow C$: nonspecial.

ただし, $\pi: X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$ は平面上の一般 r 点での blow-up とする.
これを **Segre-Harbourne-Gimigliano-Hirschowitz 予想** という.

SHGH 予想は次と同値である.

- $D \in \text{Pic}X_r$: special $\Rightarrow \exists C$: (-1) -curve s.t. $D.C \leq -2$
- $D \in \text{Pic}X_r$: standard form $\Rightarrow D$: nonspecial

SHGH 予想は **Nagata 予想** を導く

Nagata 予想

C : 既約かつ被約な平面曲線, $\deg(C) = d$, $\text{mult}_{p_i} C = m_i$
($p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}^2$) に対して,

$$d \geq \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^r m_i$$

Conjecture

SHGH Conjecture

C : prime divisor on $X_r \Rightarrow C$: nonspecial.

ただし, $\pi: X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$ は平面上の一般 r 点での blow-up とする.
これを **Segre-Harbourne-Gimigliano-Hirschowitz 予想** という.

SHGH 予想は次と同値である.

- $D \in \text{Pic}X_r$: special $\Rightarrow \exists C$: (-1) -curve s.t. $D.C \leq -2$
- $D \in \text{Pic}X_r$: standard form $\Rightarrow D$: nonspecial

SHGH 予想は **Nagata 予想** を導く

Nagata 予想

C : 既約かつ被約な平面曲線, $\deg(C) = d$, $\text{mult}_{p_i} C = m_i$
($p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}^2$) に対して,

$$d \geq \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^r m_i$$

Conjecture

SHGH Conjecture

C : prime divisor on $X_r \Rightarrow C$: nonspecial.

ただし, $\pi : X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$ は平面上の一般 r 点での blow-up とする.
これを **Segre-Harbourne-Gimigliano-Hirschowitz 予想** という.

SHGH 予想は次と同値である.

- $D \in \text{Pic}X_r$: special $\Rightarrow \exists C$: (-1) -curve s.t. $D.C \leq -2$
- $D \in \text{Pic}X_r$: standard form $\Rightarrow D$: nonspecial

SHGH 予想は **Nagata 予想** を導く

Nagata 予想

C : 既約かつ被約な平面曲線, $\deg(C) = d$, $\text{mult}_{p_i} C = m_i$
($p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}^2$) に対して,

$$d \geq \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^r m_i$$

Conjecture

SHGH Conjecture

C : prime divisor on $X_r \Rightarrow C$: nonspecial.

ただし, $\pi: X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$ は平面上の一般 r 点での blow-up とする.
これを **Segre-Harbourne-Gimigliano-Hirschowitz 予想** という.

SHGH 予想は次と同値である.

- $D \in \text{Pic}X_r$: special $\Rightarrow \exists C$: (-1) -curve s.t. $D.C \leq -2$
- $D \in \text{Pic}X_r$: standard form $\Rightarrow D$: nonspecial

SHGH 予想は **Nagata 予想** を導く

Nagata 予想

C : 既約かつ被約な平面曲線, $\deg(C) = d$, $\text{mult}_{p_i} C = m_i$
($p_1, \dots, p_r \in \mathbb{P}^2$) に対して,

$$d \geq \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^r m_i$$

Conjecture

SHGH Conjecture

C : prime divisor on $X_r \Rightarrow C$: nonspecial.

ただし, $\pi: X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$ は平面上の一般 r 点での blow-up とする.
これを **Segre-Harbourne-Gimigliano-Hirschowitz 予想** という.

SHGH 予想は次と同値である.

- $D \in \text{Pic}X_r$: special $\Rightarrow \exists C$: (-1) -curve s.t. $D.C \leq -2$
- $D \in \text{Pic}X_r$: standard form $\Rightarrow D$: nonspecial

SHGH 予想は **Nagata 予想** を導く

Known Results

- $r \leq 9$ のとき [Harbourne, 1985]
- $D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i$, $m_i \leq 11$ のとき [Dumnicki-Jarnicki, 2007]
- $D = dl - m \sum_{i=1}^r e_i$, $m \leq 42$ のとき [Dumnicki, 2007]

Definition (Seshadri constant)

X : 非特異射影代数多様体, L : X 上の nef divisor とする.
 L の $p \in X$ における Seshadri constant を次で定義する.

$$\varepsilon(L; p) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \mu^* \mathcal{O}_X(L) - tE : \text{nef}\}$$

ただし, $\mu : \tilde{X} \rightarrow X : p$ における X の blow-up,
exceptional divisor を E とする.

Seshadri constant の例

$X = \mathbb{P}^2$ の 1 点 blow-up"

- $L = 2l \quad \rightarrow \varepsilon(L; p) = 2$
- $L = 2l - e_1 \quad \rightarrow \varepsilon(L; p) = 1$
- $L = 2l - 2e_1 \quad \rightarrow \varepsilon(L; p) = 0$

Definition (Seshadri constant)

X : 非特異射影代数多様体, L : X 上の nef divisor とする.
 L の $p \in X$ における **Seshadri constant** を次で定義する.

$$\varepsilon(L; p) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \mu^* \mathcal{O}_X(L) - tE : \text{nef}\}$$

ただし, $\mu : \tilde{X} \rightarrow X : p$ における X の blow-up,
exceptional divisor を E とする.

Seshadri constant の例

$X = \mathbb{P}^2$ の 1 点 blow-up"

- $L = 2l \quad \rightarrow \varepsilon(L; p) = 2$
- $L = 2l - e_1 \quad \rightarrow \varepsilon(L; p) = 1$
- $L = 2l - 2e_1 \quad \rightarrow \varepsilon(L; p) = 0$

Definition (Seshadri constant)

X : 非特異射影代数多様体, L : X 上の nef divisor とする.
 L の $p \in X$ における **Seshadri constant** を次で定義する.

$$\varepsilon(L; p) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \mu^* \mathcal{O}_X(L) - tE : \text{nef}\}$$

ただし, $\mu : \tilde{X} \rightarrow X : p$ における X の blow-up,
exceptional divisor を E とする.

Seshadri constant の例

$X = \mathbb{P}^2$ の 1 点 blow-up"

- $L = 2l \quad \rightarrow \varepsilon(L; p) = 2$
- $L = 2l - e_1 \quad \rightarrow \varepsilon(L; p) = 1$
- $L = 2l - 2e_1 \quad \rightarrow \varepsilon(L; p) = 0$

Definition (Seshadri constant)

X : 非特異射影代数多様体, L : X 上の nef divisor とする.
 L の $p \in X$ における **Seshadri constant** を次で定義する.

$$\varepsilon(L; p) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \mu^* \mathcal{O}_X(L) - tE : \text{nef}\}$$

ただし, $\mu : \tilde{X} \rightarrow X : p$ における X の blow-up,
exceptional divisor を E とする.

Seshadri constant の例

$X = \mathbb{P}^2$ の 1 点 blow-up"

- $L = 2l \quad \rightarrow \varepsilon(L; p) = 2$
- $L = 2l - e_1 \quad \rightarrow \varepsilon(L; p) = 1$
- $L = 2l - 2e_1 \quad \rightarrow \varepsilon(L; p) = 0$

Definition (Seshadri constant)

X : 非特異射影代数多様体, L : X 上の nef divisor とする.
 L の $p \in X$ における **Seshadri constant** を次で定義する.

$$\varepsilon(L; p) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \mu^* \mathcal{O}_X(L) - tE : \text{nef}\}$$

ただし, $\mu : \tilde{X} \rightarrow X : p$ における X の blow-up,
exceptional divisor を E とする.

- very general な点での Seshadri constant の値は一定であり [Sano,2014], その値を ε_{gen} と記す
- ε_{gen} が無理数になる例は知られていない

Definition (Seshadri constant)

X : 非特異射影代数多様体, L : X 上の nef divisor とする.
 L の $p \in X$ における **Seshadri constant** を次で定義する.

$$\varepsilon(L; p) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \mu^* \mathcal{O}_X(L) - tE : \text{nef}\}$$

ただし, $\mu : \tilde{X} \rightarrow X : p$ における X の blow-up,
exceptional divisor を E とする.

- very general な点での Seshadri constant の値は一定であり [Sano,2014], その値を ε_{gen} と記す
- ε_{gen} が無理数になる例は**知られていない**

Main Theorem

Main Theorem

$r \geq 9$ を整数とする. SHGH 予想が $r + 1$ で成立すれば,
 $\mathbb{P}^2$ の r 点 blow-up 上に Seshadri constant $\varepsilon_{gen}(A)$ が無理数になる ample divisor A が存在する

定理の意義

- SHGH 予想の必要条件
- Seshadri constant の無理数性の十分条件
- SHGH 予想の研究に対する新たな視点
SHGH 予想 $\Rightarrow$ いくつかの予想 $\Rightarrow$ Nagata 予想



Seshadri constant の無理数性

いくつかの予想

- nef divisor $\Rightarrow$ nonspecial
- negative curve $\Rightarrow$ rational etc...

Main Theorem

Main Theorem

$r \geq 9$ を整数とする. SHGH 予想が $r + 1$ で成立すれば,
 $\mathbb{P}^2$ の r 点 blow-up 上に Seshadri constant $\varepsilon_{gen}(A)$ が無理数になる ample divisor A が存在する

定理の意義

- SHGH 予想の必要条件
- Seshadri constant の無理数性の十分条件
- SHGH 予想の研究に対する新たな視点
SHGH 予想 $\Rightarrow$ いくつかの予想 $\Rightarrow$ Nagata 予想
 $\searrow$
Seshadri constant の無理数性

いくつかの予想

- nef divisor $\Rightarrow$ nonspecial
- negative curve $\Rightarrow$ rational etc...

Main Theorem

Main Theorem

$r \geq 9$ を整数とする. SHGH 予想が $r + 1$ で成立すれば,
 $\mathbb{P}^2$ の r 点 blow-up 上に Seshadri constant $\varepsilon_{gen}(A)$ が無理数になる ample divisor A が存在する

定理の意義

- SHGH 予想の必要条件
 - Seshadri constant の無理数性の十分条件
 - SHGH 予想の研究に対する新たな視点
- SHGH 予想 $\Rightarrow$ いくつかの予想 $\Rightarrow$ Nagata 予想



Seshadri constant の無理数性

いくつかの予想

- nef divisor $\Rightarrow$ nonspecial
- negative curve $\Rightarrow$ rational etc...

Main Theorem

$r \geq 9$ を整数とする. SHGH 予想が $r + 1$ で成立すれば,
 $\mathbb{P}^2$ の r 点 blow-up 上に Seshadri constant $\varepsilon_{gen}(A)$ が無理数になる ample divisor A が存在する

- del Pezzo surface ($r \leq 8$) 上の ample divisor の Seshadri constant は有理数になる [Sano, 2014]

$\Rightarrow$ Main Theorem の $r \geq 9$ という条件は sharp になっている.

Main Theorem

Main Theorem

$r \geq 9$ を整数とする。SHGH 予想が $r + 1$ で成立すれば、 $\mathbb{P}^2$ の r 点 blow-up 上に Seshadri constant $\varepsilon_{gen}(A)$ が無理数になる ample divisor A が存在する

- これは [Dumnicki-Küronya-Maclean-Szemberg,2013] の結果の拡張になっている：

先行結果

Theorem 2.2 [Dumnicki-Küronya-Maclean-Szemberg,2013]

r を 9 以上の整数とする。SHGH 予想が $r + 1$ で成立すれば、次のどちらかが成り立つ。

- (1) $\varepsilon_{gen}(A)$ が無理数になる ample divisor $A \in \text{Pic}X_r$ が存在する
- (2) SHGH 予想が r で成立しない

Corollary [Dumnicki-Küronya-Maclean-Szemberg,2013]

SHGH 予想が 10 で成立すれば、

$\mathbb{P}^2$ の 9 点 blow-up 上に $\varepsilon_{gen}(A)$ が無理数になる ample divisor A が存在する

Main Theorem

Main Theorem

$r \geq 9$ を整数とする。SHGH 予想が $r + 1$ で成立すれば,
 $\mathbb{P}^2$ の r 点 blow-up 上に Seshadri constant $\varepsilon_{gen}(A)$ が無理数になる ample divisor A が存在する

- これは [Dumnicki-Küronya-Maclean-Szemberg,2013] の結果の拡張になっている :

先行結果

Theorem 2.2 [Dumnicki-Küronya-Maclean-Szemberg,2013]

r を 9 以上の整数とする。SHGH 予想が $r + 1$ で成立すれば、次のどちらかが成り立つ。

- (1) $\varepsilon_{gen}(A)$ が無理数になる ample divisor $A \in \text{Pic}X_r$ が存在する
- (2) SHGH 予想が r で成立しない

Corollary [Dumnicki-Küronya-Maclean-Szemberg,2013]

SHGH 予想が 10 で成立すれば、

$\mathbb{P}^2$ の 9 点 blow-up 上に $\varepsilon_{gen}(A)$ が無理数になる ample divisor A が存在する

Key Proposition

r を正の整数とする.

SHGH 予想が $r + 1$ のときに成り立てば, r のときも成立する.

- SHGH 予想 : $\text{Pic}X_r \ni D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i$,
 $m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq -1$, $d \geq m_1 + m_2 + m_3$
 $\Rightarrow D$: nonspecial

$\pi : X_{r+1} \rightarrow X_r$ 1 点 blow-up とすると,

$\pi^*D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i - 0e_{r+1}$ とかける.

方針 : m_1, m_2, m_3 の正負により場合分け

- case0: $m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq 0 \Rightarrow \underline{\pi^*D: \text{nonspecial}}$
- case1: $m_1 \geq m_2 \geq 0 > m_3$
- case2: $m_1 \geq 0 > m_2 \geq m_3$
- case3: $0 > m_1 \geq m_2 \geq m_3$

Key Proposition

r を正の整数とする.

SHGH 予想が $r + 1$ のときに成り立てば, r のときも成立する.

- SHGH 予想 : $\text{Pic}X_r \ni D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i$,
 $m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq -1$, $d \geq m_1 + m_2 + m_3$
 $\Rightarrow D$: nonspecial

$\pi : X_{r+1} \rightarrow X_r$ 1 点 blow-up とすると,

$\pi^*D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i - 0e_{r+1}$ とかける.

方針 : m_1, m_2, m_3 の正負により場合分け

- case0: $m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq 0 \Rightarrow \underline{\pi^*D: \text{nonspecial}}$
- case1: $m_1 \geq m_2 \geq 0 > m_3$
- case2: $m_1 \geq 0 > m_2 \geq m_3$
- case3: $0 > m_1 \geq m_2 \geq m_3$

Key Proposition

r を正の整数とする.

SHGH 予想が $r + 1$ のときに成り立てば, r のときも成立する.

- SHGH 予想 : $\text{Pic}X_r \ni D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i$,
 $m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq -1$, $d \geq m_1 + m_2 + m_3$
 $\Rightarrow D$: nonspecial

$\pi : X_{r+1} \rightarrow X_r$ 1 点 blow-up とすると,

$\pi^*D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i - 0e_{r+1}$ とかける.

方針 : m_1, m_2, m_3 の正負により場合分け

- case0: $m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq 0 \Rightarrow \underline{\pi^*D: \text{nonspecial}}$
- case1: $m_1 \geq m_2 \geq 0 > m_3$
- case2: $m_1 \geq 0 > m_2 \geq m_3$
- case3: $0 > m_1 \geq m_2 \geq m_3$

Key Proposition

r を正の整数とする.

SHGH 予想が $r + 1$ のときに成り立てば, r のときも成立する.

- SHGH 予想 : $\text{Pic}X_r \ni D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i$,
 $m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq -1$, $d \geq m_1 + m_2 + m_3$
 $\Rightarrow D$: nonspecial

$\pi : X_{r+1} \rightarrow X_r$ 1 点 blow-up とすると,

$\pi^*D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i - \textcolor{red}{0}e_{r+1}$ とかける.

方針 : m_1, m_2, m_3 の正負により場合分け

- case0: $m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq 0 \Rightarrow \underline{\pi^*D: \text{nonspecial}}$
- case1: $m_1 \geq m_2 \geq 0 > m_3$
- case2: $m_1 \geq 0 > m_2 \geq m_3$
- case3: $0 > m_1 \geq m_2 \geq m_3$

Key Proposition

r を正の整数とする.

SHGH 予想が $r + 1$ のときに成り立てば, r のときも成立する.

- SHGH 予想 : $\text{Pic}X_r \ni D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i$,
 $m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq -1$, $d \geq m_1 + m_2 + m_3$
 $\Rightarrow D$: nonspecial

$\pi : X_{r+1} \rightarrow X_r$ 1 点 blow-up とすると,

$\pi^*D = dl - \sum_{i=1}^r m_i e_i - 0e_{r+1}$ とかける.

方針 : m_1, m_2, m_3 の正負により場合分け

- case0: $m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq 0 \Rightarrow \underline{\pi^*D: \text{nonspecial}}$
- case1: $m_1 \geq m_2 \geq 0 > m_3$
- case2: $m_1 \geq 0 > m_2 \geq m_3$
- case3: $0 > m_1 \geq m_2 \geq m_3$

Outline of Proof

case1: $m_1 \geq m_2 \geq 0 > m_3$

- $m_3, \dots, m_r = -1,$

$$D = dl - m_1 e_1 - m_2 e_2 + e_3 + \dots + e_r$$

- $e_r((-1)\text{-curve})$ についての ideal exact sequence:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X_r}(D - e_r) \rightarrow \mathcal{O}_{X_r}(D) \rightarrow \mathcal{O}_{e_r}(D|_{e_r}) \rightarrow 0$$

を考えて, 次が成立する.

$$h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D - e_r)) = h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D))$$

- 同じ操作を繰り返すと,

$$\begin{aligned} h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) &= h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D - e_3 - \dots - e_r)) \\ &= h^0(X_2, \mathcal{O}_{X_2}(dl - m_1 e_1 - m_2 e_2)) \end{aligned}$$

- SHGH 予想が $r = 2$ で正しいことから D : nonspecial

Outline of Proof

case1: $m_1 \geq m_2 \geq 0 > m_3$

- $m_3, \dots, m_r = -1,$

$$D = dl - m_1 e_1 - m_2 e_2 + e_3 + \dots + e_r$$

- $e_r((-1)\text{-curve})$ についての ideal exact sequence:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X_r}(D - e_r) \rightarrow \mathcal{O}_{X_r}(D) \rightarrow \mathcal{O}_{e_r}(D|_{e_r}) \rightarrow 0$$

を考えて, 次が成立する.

$$h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D - e_r)) = h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D))$$

- 同じ操作を繰り返すと,

$$\begin{aligned} h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) &= h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D - e_3 - \dots - e_r)) \\ &= h^0(X_2, \mathcal{O}_{X_2}(dl - m_1 e_1 - m_2 e_2)) \end{aligned}$$

- SHGH 予想が $r = 2$ で正しいことから D : nonspecial

Outline of Proof

case1: $m_1 \geq m_2 \geq 0 > m_3$

- $m_3, \dots, m_r = -1$,
 $D = dl - m_1 e_1 - m_2 e_2 + e_3 + \dots + e_r$
- $e_r((-1)\text{-curve})$ についての ideal exact sequence:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X_r}(D - e_r) \rightarrow \mathcal{O}_{X_r}(D) \rightarrow \mathcal{O}_{e_r}(D|_{e_r}) \rightarrow 0$$

を考えて, 次が成立する.

$$h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D - e_r)) = h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D))$$

- 同じ操作を繰り返すと,

$$\begin{aligned} h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) &= h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D - e_3 - \dots - e_r)) \\ &= h^0(X_2, \mathcal{O}_{X_2}(dl - m_1 e_1 - m_2 e_2)) \end{aligned}$$

- SHGH 予想が $r = 2$ で正しいことから D : nonspecial

Outline of Proof

case1: $m_1 \geq m_2 \geq 0 > m_3$

- $m_3, \dots, m_r = -1$,
 $D = dl - m_1 e_1 - m_2 e_2 + e_3 + \dots + e_r$
- $e_r((-1)\text{-curve})$ についての ideal exact sequence:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X_r}(D - e_r) \rightarrow \mathcal{O}_{X_r}(D) \rightarrow \mathcal{O}_{e_r}(D|_{e_r}) \rightarrow 0$$

を考えて, 次が成立する.

$$h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D - e_r)) = h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D))$$

- 同じ操作を繰り返すと,

$$\begin{aligned} h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) &= h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D - e_3 - \dots - e_r)) \\ &= h^0(X_2, \mathcal{O}_{X_2}(dl - m_1 e_1 - m_2 e_2)) \end{aligned}$$

- SHGH 予想が $r = 2$ で正しいことから D : nonspecial

Outline of Proof

case1: $m_1 \geq m_2 \geq 0 > m_3$

- $m_3, \dots, m_r = -1$,
 $D = dl - m_1 e_1 - m_2 e_2 + e_3 + \dots + e_r$
- $e_r((-1)\text{-curve})$ についての ideal exact sequence:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X_r}(D - e_r) \rightarrow \mathcal{O}_{X_r}(D) \rightarrow \mathcal{O}_{e_r}(D|_{e_r}) \rightarrow 0$$

を考えて, 次が成立する.

$$h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D - e_r)) = h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D))$$

- 同じ操作を繰り返すと,

$$\begin{aligned} h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D)) &= h^0(X_r, \mathcal{O}_{X_r}(D - e_3 - \dots - e_r)) \\ &= h^0(X_2, \mathcal{O}_{X_2}(dl - m_1 e_1 - m_2 e_2)) \end{aligned}$$

- SHGH 予想が $r = 2$ で正しいことから D : nonspecial

Corollary of Main Theorem

Corollary

r を 9 以上の整数とする. SHGH 予想が $r + 1$ で成立
 $\Rightarrow$ 任意の $a \in \{sn^2 \mid s, n \in \mathbb{N}, 9 \leq s \leq r\}$ に対して, Seshadri constant が無理数になる A : ample divisor on X_a が存在する.

- Main Theorem : r 点 blow-up
- Corollary : $r \times n^2$ 点 blow-up (など)

Corollary of Main Theorem

Corollary

r を 9 以上の整数とする. SHGH 予想が $r + 1$ で成立
 $\Rightarrow$ 任意の $a \in \{sn^2 \mid s, n \in \mathbb{N}, 9 \leq s \leq r\}$ に対して, Seshadri constant が無理数になる A : ample divisor on X_a が存在する.

- Main Theorem : r 点 blow-up
- Corollary : $r \times n^2$ 点 blow-up (など)

Corollary of Main Theorem

Corollary

r を 9 以上の整数とする. SHGH 予想が $r + 1$ で成立
 $\Rightarrow$ 任意の $a \in \{sn^2 \mid s, n \in \mathbb{N}, 9 \leq s \leq r\}$ に対して, Seshadri constant が無理数になる A : ample divisor on X_a が存在する.

- Main Theorem : r 点 blow-up
- Corollary : $r \times n^2$ 点 blow-up (など)

Main Theorem

$r \geq 9$ を整数とする. SHGH 予想が $r + 1$ で成立すれば,
 $\mathbb{P}^2$ の r 点 blow-up 上に Seshadri constant $\varepsilon_{gen}(A)$ が無理数になる ample divisor A が存在する

Works in progress

- SHGH 予想
- Nagata 予想
- Seshadri constant の有理性
- nef divisor は nonspecial か？
- X_r 上の negative curve は rational か？

etc...

Remark

SHGH conjecture



“nef divisors は nonspecial” & “negative curves が rational”