Stable flag complex と f-列

早稲田大学基幹理工学研究科数学応用数理専攻
楫元研究室修士 2 年佐藤孝弘

平成 27 年 2 月 6 日

概要

この論文では simplicial complex Δ が flag であり, その Stanley-Reisner ideal が strongly stable または stable であるとき, その極小生成元集合がどのような性質をもつのか, 極小生成元集合と f-列がどのような関係にあるのかを調べた.

主定理 1 [n] 上の simplicial complex Δ に対して, I_Δ が strongly stable, $G(I_\Delta) = G(I_\Delta)_2$ であることと
$G(I_\Delta) = \{x_1x_2, \ldots, x_1x_{d_1}\}$
$\cup\{x_2x_3, \ldots, x_2x_{d_2}\}$
$\cup \ldots$
$\cup\{x_kx_{k+1}, \ldots, x_kx_{d_k}\}$,
$d_1 \geqq d_2 \geqq \cdots \geqq d_k$
と表すことができることは同値である.

主定理 2 [n] 上の simplicial complex Δ に対して, I_Δ が stable, $G(I_\Delta) = G(I_\Delta)_2$ であることと
$G(I_\Delta) = \{x_1x_2, \ldots, x_1x_{d_1}\}$
$\cup\{x_2x_3, \ldots, x_2x_{d_2}\}$
$\cup \ldots$
$\cup\{x_kx_{k+1}, \ldots, x_kx_{d_k}\}$,
$1 \leqq \forall i \leqq k-1, k \leqq d_i \leqq n$
と表すことができることは同値である.

主定理 3 Δ が strongly stable flag complex であるとき, $G(I_\Delta)$ から $f(\Delta)$ を , 逆に $f(\Delta)$ から $G(I_\Delta)$ をただ一通りに決めることができる.

また, stable flag complex の場合は主定理 3 の類似は成り立たない.

例 4

Δ_1, Δ_2 を [4] 上の simplicial complex とする

$G(I_{\Delta_1}) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4\} \cup \{x_2x_3\}$ とおく. このとき, $d_1 = 4, d_2 = 3. d_1 \geqq d_2$ が成り立つので主定理 1 より I_{Δ_1} は strongly stable であることがわかる. また, Δ_1 は strongly stable flag complex であることもわかる.

$G(I_{\Delta_2}) = \{x_1x_2, x_1x_3\} \cup \{x_2x_3, x_2x_4\}$ とおく. このとき, $d'_1 = 3, d'_2 = 4. d'_1 < d'_2$ が成り立つので主定理 1 より I_{Δ_2} は strongly stable ではない. しかし, $2 \leqq d'_1, d'_2 \leqq 4$ が成り立つので主定理 2 より I_{Δ_2} は stable であることがわかる. また,Δ_2 が stable flag complex であることもわかる.

定義 5 a-列 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{Z}^{n-1}_{\geqq 0}$ は以下の条件を満たす数列である.

$1 \leqq \exists k \leqq n-1, 1 \leqq \forall i \leqq n-1, 0 \leqq a_i \leqq n-(i+1)$,

$a_1 \leqq a_2 \leqq ... \leqq a_k \leqq a_{k+1} > a_{k+2} > \cdots > a_{n-1}$,

$k+2 \leqq \forall i \leqq n-1, a_i = a_{k+1} - (i-k-1)$

定義 6 a-列 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{Z}^{n-1}_{\geqq 0}$ は以下の条件を満たす数列である.

$1 \leqq \exists k \leqq n-1, 1 \leqq \forall i \leqq k-1, 0 \leqq a_i \leqq n-k$

$a_k \leqq a_{k+1} > a_{k+2} > \cdots > a_{n-1}$

$k+2 \leqq \forall i \leqq n-1, a_i = a_{k+1} - (i-k-1)$.

例 7

例 4 の Δ_1, Δ_2 について a-列と f-列について計算すると以下のようになる.

$\Delta_1 : \mathbf{a} = (0,1,1), f(\Delta_1) = (4,2)$

$\Delta_2 : \mathbf{a} = (1,0,1), f(\Delta_2) = (4,2)$

参考文献

[1] J.Herzog, T.Hibi, *Monomial Ideals.* Springer-verlag London,2011

[2] R.stanley,*Combinatorics and Commutative Algebra,Second Edition.*Birkhäuser,1995