

2015年2月6日

Stable flag complex と f -列

早稲田大学基幹理工学研究科数学応用数理専攻

楫元研究室修士2年 佐藤孝弘

1 概要

simplicial complex が flag であり, その Stanley-Reisner ideal が strongly stable または stable であるとき, その極小生成元集合がどのような性質をもつのか, 極小生成元集合と f -列がどのような関係にあるのかを調べた.

2 主定理

主定理 1 $[n]$ 上の simplicial complex Δ に対して,
 I_Δ が strongly stable, $G(I_\Delta) = G(I_\Delta)_2$ であることと

$$G(I_\Delta) = \{x_1x_2, \dots, x_1x_{d_1}\}$$

$$\cup \{x_2x_3, \dots, x_2x_{d_2}\}$$

$$\cup \dots$$

$$\cup \{x_kx_{k+1}, \dots, x_kx_{d_k}\},$$

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k$$

と表すことができることは同値である.

主定理2 $[n]$ 上の simplicial complex Δ に対して,
 I_Δ が stable, $G(I_\Delta) = G(I_\Delta)_2$ であることと

$$G(I_\Delta) = \{x_1x_2, \dots, x_1x_{d_1}\}$$

$$\cup \{x_2x_3, \dots, x_2x_{d_2}\}$$

$$\cup \dots$$

$$\cup \{x_kx_{k+1}, \dots, x_kx_{d_k}\},$$

$$1 \leq \forall i \leq k-1, k \leq d_i \leq n$$

と表すことができることは同値である.

主定理3 Δ がstrongly stable flag complexであるとき, $G(I_\Delta)$ から $f(\Delta)$ を, 逆に $f(\Delta)$ から $G(I_\Delta)$ をただ一通りに決めることができる.

また, stable flag complexの場合は主定理3の類似は成り立たない.

3 基本的な定義

3.1 Simplicial complex

$[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ とおく.

$S = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ を体 K とする変数

$x_1, x_2, \dots, x_n$ の多項式環とする.

Δ が $[n]$ 上の simplicial complex であるとは以下の
2条件を満たす $[n]$ の部分集合の族のことである.

(1) $1 \leq \forall i \leq n, i \in \Delta$

(2) $F \in \Delta, G \subset F \Rightarrow G \in \Delta$

simplicial complex Δ の元を face と呼び, Δ に属さない $[n]$ の元を nonface と呼ぶ. また, $N(\Delta)$ を包含関係で極小の nonface の集合とする.

3.2 f-列

simplicial complex Δ のf-列を

$f(\Delta) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ とする.

ここで,

$$f_i = f_i(\Delta) = |\{F \subset [n] \mid F \in \Delta, |F| = i + 1\}|$$

で, $|F|$ は F に含まれる元の個数,

$$\dim \Delta = d - 1, d = \max\{|F| \mid F \in \Delta\}.$$

3.3 Stanley-Reisner ideal

Δ を $[n]$ 上の simplicial complex とする. このとき,
 $I_\Delta = \langle \mathbf{x}_F \mid F \notin \Delta \rangle$ とおく. ここで $\mathbf{x}_F =$
 $x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_k}$, $F = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$,
 $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ である. この I_Δ を simplicial
complex Δ の Stanley-Reisner ideal と呼ぶ.

また, Stanley-Reisner ideal I_Δ の極小生成元集合
 $G(I_\Delta)$ は $G(I_\Delta) = \{\mathbf{x}_F \mid F \in N(\Delta)\}$ と表すこと
ができる.

3.4 Stable, Strongly stable

S上のsquarefree monomial idealがsquarefree stableであるとは $\forall u \in I, x_i(u/x_{m(u)}) \in I, (i < m(u), s.t. x_i \nmid u), m(u) = \max\{j \mid x_j \mid u\}$ をみたすことである. また, S上のsquarefree monomial idealがsquarefree strongly stableであるとは $\forall u \in I, x_i(u/x_j) \in I, (i < j, s.t. x_j \mid u, x_i \nmid u)$ をみたすことである.

3.5 flag complex

$[n]$ 上の simplicial complex Δ が flag であるとは $\forall F \in N(\Delta), |F| = 2$ をみたすことである.

また, Δ が flag で I_Δ が strongly stable のとき, Δ を strongly stable flag と呼ぶ. 同様に Δ が flag で I_Δ が stable のとき, Δ を stable flag と呼ぶ.

4 計算例

Δ_1, Δ_2 を $[4]$ 上の simplicial complex とする

$$G(I_{\Delta_1}) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4\} \\ \cup \{x_2x_3\}$$

とおく. このとき, $d_1 = 4, d_2 = 3$.

$d_1 \geq d_2$ が成り立つので主定理1より I_{Δ_1} は strongly stable であることがわかる. また, Δ_1 は strongly stable flag complex であることもわかる.

$$G(I_{\Delta_2}) = \{x_1x_2, x_1x_3\} \\ \cup \{x_2x_3, x_2x_4\}$$

とおく. このとき, $d'_1 = 3, d'_2 = 4$.

$d'_1 < d'_2$ が成り立つので主定理 1 より I_{Δ_2} は strongly stable ではない. しかし, $2 \leq d'_1, d'_2 \leq 4$ が成り立つので主定理 2 より I_{Δ_2} は stable であることがわかる. また, Δ_2 が stable flag complex であることもわかる.

5 $G(I_\Delta)$ と f-列の関係

5.1 Strongly stable flag complex の場合

定義 a-列 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^{n-1}$ は以下の条件を満たす数列である.

$$1 \leq \exists k \leq n-1, 1 \leq \forall i \leq n-1, 0 \leq a_i \leq n - (i+1),$$

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq a_{k+1} > a_{k+2} > \dots >$$

$$a_{n-1},$$

$$k+2 \leq \forall i \leq n-1, a_i = a_{k+1} - (i - k - 1)$$

5.2 Stable flag complexの場合

定義 a -列 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^{n-1}$ は以下の条件を満たす数列である.

$$1 \leq \exists k \leq n-1, 1 \leq \forall i \leq k-1, 0 \leq a_i \leq n-k$$

$$a_k \leq a_{k+1} > a_{k+2} > \dots > a_{n-1}$$

$$k+2 \leq \forall i \leq n-1, a_i = a_{k+1} - (i - k - 1)$$

5.3 主定理3

Strongly stable flag complex

$$G(I_{\Delta}) \iff \mathbf{a} \iff f(\Delta)$$

Stable flag complex

$$G(I_{\Delta}) \iff \mathbf{a} \implies f(\Delta)$$

stable flag complex **の場合は f-列から a-列を求めるとき, 複数通り決まる. このため, stable flag complex のとき主定理3 の類似が成り立たない.**