

# Stable flag complexes と f-列

早稲田大学大学院基幹理工学研究科  
数学応用数理専攻修士2年 佐藤孝弘

学籍番号 5112A025-6

指導教員名 楯元

平成27年2月6日

## 概要

simplicial complex  $\Delta$  の  $N(\Delta)$  の元が2つの元の集合であるとき, flag complex という. また, Stanley-Reisner ideal  $I_\Delta$  が (strongly) stable で  $\Delta$  が flag ならば,  $\Delta$  を (strongly) stable flag という. この論文では  $\Delta$  が (strongly) stable flag であるときの  $G(I_\Delta)$  の性質を示す. また, a-列という数列を媒介にして  $G(I_\Delta)$  から  $f(\Delta)$  を, 逆に  $f(\Delta)$  から  $G(I_\Delta)$  を求めることができることを示す. 最後にこれらの結果を用いて, グラフ理論的な性質である balanced complex との比較と  $I_\Delta$  の Graded Betti number について成り立つ命題を示す.

## 1 序文

この論文では Stanley-Reisner ideal と flag complex の f-列の関係について考察する. 代数的組合せ論の中で simplicial complex と Stanley-Reisner ideal の関係はよく研究されている. その中で flag complex という特別な組合せ論的性質は研究の発展途上にある. この研究の中で flag complex とその f-列の研究が盛んであるが, Cohen-Macaulay 性を仮定したものがほとんどである (例えば [3][4] を参照). しかし, イデアルの組合せ論的な性質である stable および strongly stable を持つ stable または strongly stable flag complex についての研究はほとんど見当たらない.

この論文では simplicial complex  $\Delta$  が flag であり, その Stanley-Reisner ideal が strongly stable または stable であるとき, その極小生成元集合がどのような性質をもつのか, 極小生成元集合と f-列がどのような関係にあるのかを調べる. また, 得られた性質を元にして simplicial complex と stable ideal に関するいくつかの性質を示す. こうして具体的に計算ができることにより, アルゴリズムを通して様々な先行研究に接続できることが期待される.

以下でこの論文の概要を述べる.

まず, 2章では simplicial complex と stable ideal に関する定義を述べる.

3 章では simplicial complex が strongly stable flag complex または stable flag complex であるときの Stanley-Reisner ideal の極小生成元集合  $G(I_\Delta)$  の性質を示す. 具体的には以下の定理が成り立つことを示す.

**定理 1.1**  $[n]$  上の simplicial complex  $\Delta$  に対して,  $I_\Delta$  が strongly stable,  $G(I_\Delta) = G(I_\Delta)_2$  であることと

$$G(I_\Delta) = \{x_1x_2, \dots, x_1x_{d_1}\}$$

$$\cup \{x_2x_3, \dots, x_2x_{d_2}\}$$

$$\cup \dots$$

$$\cup \{x_kx_{k+1}, \dots, x_kx_{d_k}\},$$

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k$$

と表すことができることは同値である.

**定理 1.2**  $[n]$  上の simplicial complex  $\Delta$  に対して,  $I_\Delta$  が stable,  $G(I_\Delta) = G(I_\Delta)_2$  であることと

$$G(I_\Delta) = \{x_1x_2, \dots, x_1x_{d_1}\}$$

$$\cup \{x_2x_3, \dots, x_2x_{d_2}\}$$

$$\cup \dots$$

$$\cup \{x_kx_{k+1}, \dots, x_kx_{d_k}\},$$

$$1 \leq \forall i \leq k-1, k \leq d_i \leq n$$

と表すことができることは同値である.

4 章では 3 章で得られた性質を使って strongly stable flag complex についてその  $f$ -列と Stanley-Reisner ideal の極小生成元集合において  $a$ -列という数列を導入することで極小生成元集合から  $f$ -列が, 逆に  $f$ -列から極小生成元集がひと通りに決まることを示す. 具体的には次の定理を示す.

**定理 1.3**  $\Delta$  が strongly stable flag complex であるとき,  $G(I_\Delta)$  から  $f(\Delta)$  を, 逆に  $f(\Delta)$  から  $G(I_\Delta)$  をただ一通りに決めることができる.

また, stable flag complex の場合は定理 1.3 の類似は成り立たないことを示す.

5 章では  $k$ -colorable ないし balanced というグラフ理論の概念について調べる. この性質は Cohen-Macaulay flag complex についてはよく研究されている. この章では strongly stable flag complex はすべて balanced complex であることを示す. 同様に stable flag complex も balanced complex であることを示す.

6 章では (strongly) stable である Stanley-Reisner ideal の Graed Betti number の計算を調べる. stable monomial ideal の Graded Betti number は組合せ論的な考察により, 簡単に計算することができている. このことをつかって  $f$ -列が等しい strongly stable flag complex と stable flag

complex の Stanley-Reisner ideal の Graded Betti number が一致することを示す.

## 2 Simplicial complex と Stable ideal

$[n]=\{1,2,\dots,n\}$  とおく.

$S = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  を体  $K$  とする変数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の多項式環とする.

$\Delta$  が  $[n]$  上の simplicial complex であるとは以下の 2 条件を満たす  $[n]$  の部分集合の族のことである.

- (1)  $1 \leq i \leq n, i \in \Delta$
- (2)  $F \in \Delta, G \subset F \Rightarrow G \in \Delta$

simplicial complex  $\Delta$  の元  $F$  を face と呼び,  $\Delta$  に属さない  $[n]$  の元を nonface と呼ぶ.  $\Delta$  の元について包含関係で極大の元を facet と呼び, その集合を  $F(\Delta)$  と書く. また,  $N(\Delta)$  を包含関係で極小の nonface の集合とする. このとき  $F(\Delta) = \{F_1, F_2, \dots, F_k\}$  とすると  $\Delta = \langle F_1, F_2, \dots, F_k \rangle$  と書くことができる.

simplicial complex  $\Delta$  の  $f$ -列を  $f(\Delta) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$  とする. ここで  $f_i = f_i(\Delta) = |\{F \subset [n] \mid F \in \Delta, |F| = i+1\}|$  で,  $|F|$  は  $F$  に含まれる元の個数,  $\dim \Delta = d-1, d = \max\{|F| \mid F \in \Delta\}$  である.

また,  $\binom{[n]}{d}$  を  $d$  個の元を持つ集合の集合とする.  $\binom{[n]}{d}$  に含まれる元の個数は  $|\binom{[n]}{d}| = \binom{n}{d}$  で与えられる. たとえば,  $\binom{[5]}{3} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$  となり, 元の個数は  $\binom{5}{3} = 10$  である.

多項式環  $S$  上の単項式は  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^n$  を使って

$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \dots x_n^{a_n}$  と表すことができる. また, squarefree monomial は  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^n, \mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \dots x_n^{a_n} = \mathbf{x}_F$  と書くことができる. ここで  $F = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}, j_1 < j_2 < \dots < j_k$  は  $F = \text{supp}(\mathbf{a}) = \{j \mid a_j \neq 0, 1 \leq j \leq n\}$  と書くこともできる.

生成元がすべて単項式であるイデアルを monomial ideal とよび, 生成元がすべて squarefree monomial であるイデアルを squarefree monomial ideal とよぶ.

$\Delta$  を  $[n]$  上の simplicial complex とする. このとき,  $I_{\Delta} = \langle \mathbf{x}_F \mid F \notin \Delta \rangle$  とおく. ここで  $\mathbf{x}_F = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}, F = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}, j_1 < j_2 < \dots < j_k$  である. この  $I_{\Delta}$  を simplicial complex  $\Delta$  の Stanley-Reisner ideal と呼ぶ.  $I_{\Delta}$  は定義より squarefree monomial ideal である. また, Stanley-Reisner ideal  $I_{\Delta}$  の極小生成元集合  $G(I_{\Delta})$  は  $G(I_{\Delta}) = \{\mathbf{x}_F \mid F \in N(\Delta)\}$  と表すことができる.

$I$  が squarefree monomial ideal ならば, ある simplicial complex  $\Delta$  が存在して,  $I = I_{\Delta}$  である. このことより simplicial complex  $\Delta$  を通して, squarefree monomial ideal と Stanley-Reisner ideal を同一視することができる.

monomial ideal が stable であるとは  $\forall u \in I, x_i(u/x_{m(u)}) \in I, (i < m(u)), m(u) = \max\{j \mid x_j \mid u\}$  をみたすことである。また, monomial ideal が strongly stable であるとは  $\forall u \in I, x_i(u/x_j) \in I, (i < j, s.t. x_j \mid u)$  をみたすことである。squarefree monomial ideal が squarefree stable であるとは  $\forall u \in I, x_i(u/x_{m(u)}) \in I, (i < m(u), s.t. x_i \nmid u), m(u) = \max\{j \mid x_j \mid u\}$  をみたすことである。また, squarefree monomial ideal が squarefree strongly stable であるとは  $\forall u \in I, x_i(u/x_j) \in I, (i < j, s.t. x_j \mid u, x_i \nmid u)$  をみたすことである。

$I_\Delta$  は squarefree monomial ideal よりこの論文では  $I_\Delta$  が squarefree (strongly) stable のとき, たんに (strongly) stable と呼ぶことにする。また, 定義より strongly stable monomial ideal は stable monomial ideal であり, strongly stable squarefree monomial ideal は stable squarefree monomial ideal であることがわかる。

**命題 2.1** ([1] Lemma 4.2.3)  $I$  が  $S$  上の monomial ideal で  $u \in G(I)$ ,  $u$  は monomial,  $x_i(u/x_j) \in I, i < j, s.t. x_j \mid u$  を満たすならば  $I$  は strongly stable monomial ideal である。

$I$  が stable であるときや squarefree monomial ideal であるときも命題 2.1 の類似が成り立つ。つまり,  $S$  上のイデアル  $I$  が (strongly) stable または squarefree (strongly) stable であるかを調べるときはその極小生成元集合  $G(I)$  を調べるだけでよい。

$[n]$  上の simplicial complex  $\Delta$  が flag であるとは  $\forall F \in N(\Delta), |F| = 2$  をみたすことである。つまり,  $N(\Delta) \subset \binom{[n]}{2}$  であるとき,  $\Delta$  は flag である。また,  $\Delta$  が flag で  $I_\Delta$  が strongly stable のとき,  $\Delta$  を strongly stable flag と呼ぶ。同様に  $\Delta$  が flag で  $I_\Delta$  が stable のとき,  $\Delta$  を stable flag と呼ぶ。

### 3 $G(I_\Delta)$ の性質

この章では strongly stable flag complex または stable flag complex に関する Stanley-Reisner ideal の極小生成元集合  $G(I_\Delta)$  の性質を示したあと, 定理 1.1, 定理 1.2 を証明する。

はじめに  $G(I_\Delta)$  について成り立つ補題をいくつか示す。

**補題 3.1**  $[n]$  上の simplicial complex を  $\Delta$  とし, その Stanley-Reisner ideal を  $I_\Delta$  とする。このとき  $G(I_\Delta) = G(I_\Delta)_2$  であることと  $\Delta$  は flag であることは同値である。

**証明**  $G(I_\Delta) = G(I_\Delta)_2$  から  $G(I_\Delta) = \{x_F \mid F \in N(\Delta)\}$  より  $\forall u \in G(I_\Delta), \deg(u) = 2$  が成り立つ。ここで  $u = x_F, F \in N(\Delta)$  と書くことができる。よって,  $\forall F \in N(\Delta), |F| = 2$  が成り立つ。したがって,  $\Delta$  は flag である。

逆に  $\Delta$  が flag であれば  $G(I_\Delta) = G(I_\Delta)_2$  が成り立つことは flag complex の定義よりわかる.

**補題 3.2**  $\Delta$  を  $[n]$  上の simplicial complex とする.  $I_\Delta$  が stable ,  $G(I_\Delta) = G(I_\Delta)_2$  ならば  $x_1x_2 \in G(I_\Delta)$  が成り立つ.

**証明**  $u \in G(I_\Delta), u = x_kx_l (k < l)$  とおくと  $I_\Delta$  が stable であることから  $u' = x_i(u/x_{m(u)}), i < m(u)$  より  $m(u) = l$  である. よって  $u' = x_ix_k (i < k)$  または  $u' = x_kx_i (k < i)$  となる. また  $u' = x_ix_k (i < k)$  のとき,  $i = 1$  と置くことができる. すると  $u' = x_1x_k$  ,  $m(u') = k$  より  $u'' = x_{i'}(u'/x_{m(u')}) = x_1x_{i'}$  が成り立つ. よって  $i' = 2$  と取ることができるので  $u'' = x_1x_2$  となり,  $I_\Delta$  が stable であることから  $x_1x_2 \in G(I_\Delta)$  である.

$u' = x_kx_i (k < i)$  のとき  $m(u') = i$  より  $u'' = x_{i'}(u'/x_{m(u')}) = x_kx_{i'}$  または  $u'' = x_{i'}x_k$  となる. このとき,  $k=1$  と置くことができる. すると  $u'' = x_1x_{i'}$  となる.  $i'=2$  とおけば  $u'' = x_1x_2$  となる.  $I_\Delta$  が stable であることから  $x_1x_2 \in G(I_\Delta)$  が成り立つ.

以上より  $x_1x_2 \in G(I_\Delta)$  が成り立つ.

**補題 3.3**  $\Delta$  を  $[n]$  上の simplicial complex とする.  $I_\Delta$  が stable,  $G(I_\Delta) = G(I_\Delta)_2$  ,  $x_jx_{d_j} \in G(I_\Delta) (j < d_j)$  ならば  $j+1 < \forall l \leq d_j, x_jx_l \in G(I_\Delta)$  が成り立つ.

**証明**  $u = x_jx_{d_j} (i < d_j)$  とおくと  $u' = x_i(u/x_{m(u)}) = x_jx_i (j < i)$  が成り立つ.

よって  $x_kx_l \in G(I_\Delta)$  ならば  $k+1 \leq \forall j \leq l, x_kx_j \in G(I_\Delta)$  である.

上で示した補題群を元にして定理 1.1 および定理 1.2 を示す.

**定理 1.1 の証明** ( $\Leftarrow$ )

$\forall u \in G(I_\Delta), x_i(u/x_j) \in I_\Delta$  を示せばよい.  $u = x_mx_l (m < l)$  とおくと以下の 3通りとなる.

$$(1) u' = x_ix_l (j = m, i < m < l)$$

$$(2) u' = x_ix_m (j = l, i < m < l)$$

$$(3) u' = x_mx_i (j = l, m < i < l)$$

これらが  $G(I_\Delta)$  に属することを示す.

$$(1) i < l \text{ より } d_l \leq d_i \text{ が成り立つ. よって } l < d_i.$$

したがって,  $u' = x_ix_l \in \{x_ix_{i+1}, \dots, x_ix_{d_i}\}$  である.

よって  $u' \in G(I_\Delta)$ .

$$(2) i < m \text{ より } d_m \leq d_i \text{ が成り立つ. よって } m < d_i.$$

したがって,  $u' = x_ix_m \in \{x_ix_{i+1}, \dots, x_ix_{d_i}\}$  である.

よって  $u' \in G(I_\Delta)$ .

(3)  $m < i$  より  $d_i \leq d_m$  が成り立つ. よって  $i < d_m$ .

したがって,  $u' = x_m x_i \in \{x_m x_{m+1}, \dots, x_m x_{d_m}\}$  である.

よって  $u' \in G(I_\Delta)$ .

(1),(2),(3) より  $I_\Delta$  は strongly stable であり,  $G(I_\Delta) = G(I_\Delta)_2$  が成り立つ.

( $\Rightarrow$ )

$G(I_\Delta) = G(I_\Delta)_2$  より  $G(I_\Delta)$  は以下のように表すことができる.

$G(I_\Delta) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ,  $1 \leq \forall i \leq l, \deg(u_i) = 2$ .

ここで辞書式順序  $<$  を使って  $\min G(I_\Delta) = u_m = x_k x_l (k < l)$  とおく.

このとき補題 3.3 より

$\{x_k x_{k+1}, x_k x_{k+2}, \dots, x_k x_l\} \subset G(I_\Delta)$  である.

また  $I_\Delta$  は strongly stable であるから  $u'_m = x_i(u_m/x_j) \in I_\Delta$

したがって  $\{x_1 x_l, x_2 x_l, \dots, x_k x_l\} \subset G(I_\Delta)$  が成り立つ.

この集合に含まれる各元に補題 3.3 を使うと

$\{x_1 x_2, x_1 x_3, \dots, x_1 x_l\}$

$\cup \{x_2 x_3, x_2 x_4, \dots, x_2 x_l\}$

$\cup \dots$

$\cup \{x_k x_{k+1}, x_k x_{k+2}, \dots, x_k x_l\} \subset G(I_\Delta)$  となる.

$\min G(I_\Delta) = x_k x_l$  より  $u = x_i x_j$  とおくと  $1 \leq i \leq k$  となる.

したがって  $G(I_\Delta) = \{x_1 x_2, \dots, x_1 x_{d_1}\}$

$\cup \{x_2 x_3, \dots, x_2 x_{d_2}\}$

$\cup \dots$

$\cup \{x_k x_{k+1}, \dots, x_k x_{d_k}\}$

とおくことができる.

ここで  $d_1, d_2, \dots, d_k$  の関係を見る.  $1 \leq \exists l \leq k-1, d_l < d_{l+1}$  とする.  $u = x_{l+1} x_{d_{l+1}}$  とおくと  $u' = x_i(u/x_j) = x_l x_{d_{l+1}}$  とすることができる (ここで  $j=l+1, i=1$  とおいた). しかし,  $d_l < d_{l+1}$  より  $u' = x_l x_{d_{l+1}} \notin \{x_l x_{l+1}, \dots, x_l x_{d_l}\}$  である. これは  $I_\Delta$  が strongly stable であることに矛盾する. したがって,  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k$  が成り立つ.

### 定理 1.2 の証明 ( $\Leftarrow$ )

$u = x_l x_m \in G(I_\Delta), l < m$  とおくと  $u \in \{x_l x_{l+1}, \dots, x_l x_{d_l}\}$  より  $m \leq d_l$  が成り立つ.  $u' = x_i(u/x_m(u)), m(u) = m$  より以下の 2通りとなる.

(1)  $u' = x_l x_i (l < i < m)$

(2)  $u' = x_i x_l (i < l < m)$

これらが  $G(I_\Delta)$  に属することを示す.

(1)  $i < m, m \leq d_l$  より  $i < d_l$ .

よって,  $u' = x_l x_i \in \{x_l x_{l+1}, \dots, x_l x_{d_l}\}$  である.

したがって,  $u' \in G(I_\Delta)$ .

(2)  $1 \leq i < l \leq k-1, k \leq d_i \leq n$  より  $l < d_i$ .

よって,  $u' = x_i x_l \in \{x_i x_{i+1}, \dots, x_i x_{d_i}\}$  である.

したがって,  $u' \in G(I_\Delta)$ .

(1),(2) より  $I_\Delta$  は stable であり,  $G(I_\Delta) = G(I_\Delta)_2$  が成り立つ.

( $\Rightarrow$ )

$G(I_\Delta) = G(I_\Delta)_2$  より  $G(I_\Delta)$  は以下のように表すことができる.

$G(I_\Delta) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, 1 \leq \forall i \leq l, \deg(u_i) = 2$ .

ここで辞書式順序  $<$  を使って  $\min G(I_\Delta) = u_m = x_k x_l (k < l)$  とおく.

このとき補題 3.3 より

$\{x_k x_{k+1}, x_k x_{k+2}, \dots, x_k x_l\} \subset G(I_\Delta)$

が成り立つ.

また  $I_\Delta$  は stable であるから  $u'_m = x_i(u_m/x_{m(u_m)}) \in I_\Delta (i < m(u_m))$  である.

したがって  $\{x_1 x_l, x_2 x_l, \dots, x_k x_l\} \subset G(I_\Delta)$  が成り立つ.

この集合に含まれる各元に補題 3.3 を使うと

$\{x_1 x_2, x_1 x_3, \dots, x_1 x_l\}$

$\cup \{x_2 x_3, x_2 x_4, \dots, x_2 x_l\}$

$\cup \dots$

$\cup \{x_k x_{k+1}, x_k x_{k+2}, \dots, x_k x_l\} \subset G(I_\Delta)$  となる.

$\min G(I_\Delta) = x_k x_l$  より  $u = x_i x_j$  とおくと  $1 \leq i \leq k$  となる.

したがって  $G(I_\Delta) = \{x_1 x_2, \dots, x_1 x_{d_1}\}$

$\cup \{x_2 x_3, \dots, x_2 x_{d_2}\}$

$\cup \dots$

$\cup \{x_k x_{k+1}, \dots, x_k x_{d_k}\}$

とおくことができる.

ここで  $d_1, d_2, \dots, d_k$  の関係を見る.  $1 \leq \exists l \leq k-1, d_l < k$  とおく. このとき  $u = x_k x_{d_k}$  とすると  $u' = x_l x_k (l < k < d_k)$  とできる. しかし  $d_l < k$  より  $u' = x_l x_k \notin \{x_l x_{l+1}, \dots, x_l x_{d_l}\}$  したがって,  $I_\Delta$  は stable ではない. これは矛盾. したがって,  $1 \leq \forall i \leq k-1, k \leq d_i \leq n$  が成り立つ.

以下の例で flag complex  $\Delta$  の Stanley-Reisner ideal の極小生成元集合  $G(I_\Delta)$  に定理 1.1 と定理 1.2 を使うことによって,  $I_\Delta$  が strongly stable かどうか, stable であるかどうかを具体的に判定できることを示す.

**例 3.6**  $\Delta$  を [6] 上の simplicial complex とする.

$G(I_{\Delta_1}) = \{x_1 x_2, x_1 x_3, x_1 x_4, x_1 x_5\}$

$\cup \{x_2 x_3, x_2 x_4\}$

$\cup \{x_3 x_4\}$

は  $d_1 = 5, d_2 = 4, d_3 = 4$  より  $d_1 \geq d_2 \geq d_3$  が成り立つので定理 1.1 より  $I_{\Delta_1}$  が strongly stable であることがわかる.

$$G(I_{\Delta_2}) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\}$$

$$\cup \{x_2x_3, x_2x_4\}$$

$$\cup \{x_3x_4, x_3x_5\}$$

は  $d_1 = 5, d_2 = 4, d_3 = 5$  より  $d_1 \geq d_2 \geq d_3$  は成り立たないが,  $k=3$  で  $k \leq d_1, d_2, d_3 \leq 6$  が成り立つ. よって, 定理 1.2 より  $I_{\Delta_2}$  が stable であることがわかる.

$$G(I_{\Delta_3}) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\}$$

$$\cup \{x_2x_3\}$$

$$\cup \{x_3x_4, x_3x_5\}$$

$$\cup \{x_4x_5\}$$

としたとき,  $d_1 = 5, d_2 = 3, d_3 = 5, d_4 = 5$  である. このとき  $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq d_4$  は成り立たない. また,  $k=4$  で  $d_2 < k$  が成り立つ. したがって  $I_{\Delta_3}$  は strongly stable でも stable でもないことがわかる.

最後に一つ補題を示す. この補題は後の章の命題の証明において重要な役割を果たす.

**補題 3.7**  $[n]$  上の simplicial complex  $\Delta$  が (strongly) stable flag で

$$\dim \Delta = d-1,$$

$$G(I_{\Delta}) = \{x_1x_2, \dots, x_1x_{d_1}\}$$

$$\cup \{x_2x_3, \dots, x_2x_{d_2}\}$$

$$\cup \dots$$

$$\cup \{x_kx_{k+1}, \dots, x_kx_{d_k}\}$$

であるとき  $n=d+k$  が成り立つ.

**証明**  $\dim \Delta = d-1$  より

$$\exists F \subset [n], F \in \Delta, |F| = d$$

ここで  $G = \{k+1, k+2, \dots, n\}$  とすると  $|G| = n-k$  である. また,  $G \in \Delta$ . よって,  $d=n-k$ . したがって,  $n=d+k$  が成り立つ.

## 4 $G(I_{\Delta})$ と f-列の関係

この章では 3 章で示した定理を用いて  $G(I_{\Delta})$  と  $f(\Delta)$  との関係を見る.

### 4.1 Strongly stable flag complex の場合

この節では  $\Delta$  が strongly stable flag complex であるとき,  $G(I_{\Delta})$  から f-列を, 逆に f-列から  $G(I_{\Delta})$  を導くことができることを示す. その後, 定理 1.3 が成り立つことを説明する.

$\Delta$  を  $[n]$  上の simplicial complex とし,  $I_\Delta$  は strongly stable,  $G(I_\Delta) = G(I_\Delta)_2$  とする. つまり,  $\Delta$  は strongly stable flag complex とする. はじめに  $\mathbf{a}$ -列という数列の定義を述べる.

**定義 4.1.1**  $\mathbf{a}$ -列  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^{n-1}$  は以下の条件を満たす数列である.

$$\begin{aligned} 1 &\leq \forall i \leq n-1, 0 \leq a_i \leq n-(i+1), \\ a_1 &\leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq a_{k+1} > a_{k+2} > \dots > a_{n-1}, \\ k+2 &\leq \forall i \leq n-1, a_i = a_{k+1} - (i-k-1) \end{aligned}$$

$$M_i = \{x_i x_{i+1}, x_i x_{i+2}, \dots, x_i x_{d_i}\}$$

$$N_i = \{x_i x_{i+1}, x_i x_{i+2}, \dots, x_i x_n\}$$

とおいたとき,  $a_i$  は  $N_i \setminus M_i$  に含まれる元の個数を表す.

この  $\mathbf{a}$ -列が simplicial complex と関係があることを以下の補題で示す.

**補題 4.1.2**

任意の  $\mathbf{a}$ -列  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  に対して, ある simplicial complex  $\Delta$  が存在して,  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\Delta)$  が成り立つ.

**証明**  $\mathbf{a}$ -列  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  とする.

上で説明した通り,  $a_i$  は  $N_i \setminus M_i$  に含まれる元の個数を表す数であった.

$$\text{よって, } 1 \leq \forall i \leq k, N_i \setminus M_i = \{x_i x_{d_i+1}, x_i x_{d_i+2}, \dots, x_i x_n\}$$

$$k+1 \leq \forall i \leq n, N_i \setminus M_i = \{x_i x_{i+1}, x_i x_{i+2}, \dots, x_i x_n\}$$

である.

$$\text{このとき, } F_i = \{i, d_i+1, d_i+2, \dots, n\}$$

$$F_{k+1} = \{k+1, k+2, \dots, n\}$$

として  $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2, \dots, F_k, F_{k+1} \rangle$  とおく.

このとき  $\mathbf{F}$  が simplicial complex であることを示すため, 以下の2条件をみたすことを見る.

$$(1) \ 1 \leq \forall i \leq n, i \in \mathbf{F}$$

$$(2) \ F \in \mathbf{F}, F' \subset F \rightarrow F' \in \mathbf{F}$$

$$(1) \ F_i, F_{k+1} \text{ のとり方により, } 1 \leq \forall i \leq k, i \in F_i$$

$$k+1 \leq \forall i \leq n, i \in F_{k+1} \text{ が成り立つ. よって, } 1 \leq \forall i \leq n, i \in \mathbf{F}.$$

(2)  $F \in \mathbf{F} \Rightarrow 1 \leq \exists i \leq k+1, F \subset F_i$  である. また  $F' \subset F$  より  $F' \subset F_i$  が成り立つ. よって,  $F' \in \mathbf{F}$ .

(1),(2) より  $\mathbf{F}$  は simplicial complex である.

補題 4.1.2 より任意の  $\mathbf{a}$ -列に対して  $\Delta$  を作ることができることが示された. このことより  $G(I_\Delta)$  と  $\mathbf{a}$  の関係を見る.

**定理 4.1.3**  $[n]$  上の simplicial complex  $\Delta$  が strongly stable flag であるとき  $G(I_\Delta)$  から  $\mathbf{a}(\Delta)$  が, 逆に  $\mathbf{a}(\Delta)$  から  $G(I_\Delta)$  がただ一通りに決まる.

**証明**  $\Delta$  は strongly stable flag complex なので, 定理 1.1 より

$$G(I_\Delta) = \{x_1x_2, \dots, x_1x_{d_1}\}$$

$$\cup \{x_2x_3, \dots, x_2x_{d_2}\}$$

$$\cup \dots$$

$$\cup \{x_kx_{k+1}, \dots, x_kx_{d_k}\}$$

$$(d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k)$$

が成り立つ. ここで

$$1 \leq \forall i \leq k, a_i = n - d_i,$$

$$k+1 \leq \forall i \leq n-1, a_i = n - i$$

とおくと,  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k$  より  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$  が成り立つ.

また,  $a_{k+1} = n - (k+1), a_i = n - i$  より  $k+2 \leq \forall i \leq n-1, a_i = a_{k+1} - (i - k - 1), a_k \leq a_{k+1}$  が成り立つ. よって  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  とおくと, 補題 4.1.2 より  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\Delta)$  となる.

逆に  $\mathbf{a}$ -列  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  が与えられたとする.

$k+1 = \maxindex(\max \mathbf{a})$  とおくと  $k$  を求めることができる. なぜならば  $\mathbf{a}$  の中で最も大きな数字は  $k+1$  以下となるため,  $\max \mathbf{a}$  の中で最も index が大きい  $a_i$  を取ればよいからである.

以上より求めた  $k$  を使って  $1 \leq \forall i \leq k, d_i = n - a_i$  とおくと  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$  より  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k$  が成り立つ.

$$\text{よって } G(I_\Delta) = \{x_1x_2, \dots, x_1x_{d_1}\}$$

$$\cup \{x_2x_3, \dots, x_2x_{d_2}\}$$

$$\cup \dots$$

$$\cup \{x_kx_{k+1}, \dots, x_kx_{d_k}\}$$

$$(d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k)$$

となり,  $I_\Delta$  が strongly stable となる  $G(I_\Delta)$  が決まる.

次に  $\mathbf{a}(\Delta)$  から  $f$ -列  $f(\Delta) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$  を導くことができることを示す.

**定理 4.1.4**  $\mathbf{a}$ -列  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  が与えられたとすると, ある simplicial complex  $\Delta$  が存在して,  $f(\Delta)$  が決まる. このとき  $f(\Delta) = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_{d-1})$  は以下の式で求めることができる.

$$f_j = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{a_i}{j}, 1 \leq \forall j \leq d-1,$$

$$f_0 = n.$$

**証明**  $f$ -列の定義より  $f_i(\Delta) = |\{F \in [n] \mid F \in \Delta, |F| = i+1\}|$  である.

また,  $\mathbf{a}$ -列の定義より  $1 \leq \forall i \leq k, a_i = |\{F = \{i, l\} \mid i < d_i < l, F \in \Delta\}|,$

$k+1 \leq \forall i \leq n-1, a_i = |\{F = \{i, l\} \mid i < l, F \in \Delta\}|$  である.

$\mathbf{a}$ -列が与えられたとき, ある simplicial complex  $\Delta$  が存在して  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\Delta)$  となることは補題 4.1.2 からわかる.

ここで simplicial complex  $\Delta$  の定義より  $f_0 = n$  であることがわかる.

また,  $F = \{i, l_1, l_2, \dots, l_j\}, i < l_1 < l_2 < \dots < l_j \Rightarrow |F| = j+1$  が成り立つので  $|F| = j+1$  となる  $F(\in \Delta)$  を作るには  $a_i$  から  $j$  個えらべばよい.

補題 3.7 より  $n=d+k$ . そして  $\max(\mathbf{a})$  のうち index が最も大きいのは  $a_{k+1} = n - (k+1)$  である. よって,  $j$  が動く範囲の上限は  $d-1 = n-(k+1)$  である. これを  $i$  が 1 から  $n-1$  の範囲で動いたものの総和を取れば  $f_j(\Delta)$  が求まる.

最後に定理 4.1.4 の逆, つまり  $f(\Delta)$  から  $\mathbf{a}$ -列を導くアルゴリズムを以下で説明する.

$f(\Delta) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$  とする.

#### アルゴリズム 4.1.5

1.  $m = d - 1$  とおく.
2.  $a_{b_m} = m$  とおく, ただし  $b_m < b_{m-1}$
3.  $c_m = -1 + \sum_{i=m}^{d-1} (-1)^{i-m} \binom{i}{m} f_m$
4.  $c_m \neq 0$  ならば 5 へ  
 $c_m = 0$  ならば 6 へ
5.  $a_{l_1^m} = a_{l_2^m} = \dots = a_{l_{c_m}^m} = m$  とおく.  
 ただし  $l_1^m < l_2^m < \dots < l_{c_m}^m < l_1^{m+1}$
6.  $m \neq 1$  ならば  $m = m - 1$  とし 2 に戻る.  
 $m = 1$  ならばアルゴリズムを終了する.

アルゴリズムから得られた  $l_1^1, \dots, l_{c_{d-1}}^{d-1}, b_{d-1}, \dots, b_1$  から  $\mathbf{a}$ -列は以下のよう求めることができる.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}) \\ &= (a_{l_1^1}, a_{l_2^1}, \dots, a_{l_{c_1}^1}, a_{l_1^2}, a_{l_2^2}, \dots, a_{l_{c_2}^2}, \dots, \\ &\quad a_{l_1^{d-2}}, a_{l_2^{d-2}}, \dots, a_{l_{c_{d-2}}^{d-2}}, a_{l_1^{d-1}}, a_{l_2^{d-1}}, \dots, a_{l_{c_{d-1}}^{d-1}}, a_{b_{d-1}}, a_{b_{d-2}}, \dots, a_{b_1}) \end{aligned}$$

ただし  $1 \leq i \leq d-1, c_i = 0 \Rightarrow a_{l_1^i} = a_{l_2^i} = \dots = a_{l_{c_i}^i} = 0$  である.

この  $\mathbf{a}$  が  $\mathbf{a}$ -列であることを示す. つまり,  $1 \leq \exists k \leq n-1, a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq a_{k+1}, k+2 \leq \forall i \leq n-1, a_i = a_{k+1} - (i - k - 1)$  を満たすことを示せばよい.

$k+1 = a_{b_{d-1}}$  とおけばアルゴリズムより  $a_{k+1} = d-1$ . よって,  $\forall i < j \leq k+1, a_i \leq a_j \leq a_{k+1}$  が成り立つ. したがって,  $1 \leq \exists k \leq n-1, a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq a_{k+1}$  が成り立つ.

また  $1 \leq \forall m \leq d-1, a_{b_m} = m$  と  $n=d+k$  より  $k+1 \leq \forall n-m \leq n-1, n-a_{b_m} = n-m, a_{b_{d-1}} = d-1 = n-k-1 = a_{k+1}$  が成り立つ.

$n-m=i$  とおけば  $k+1 \leq \forall i \leq n-1, a_{b_{n-i}} = a_i = n-i$ . よって,  $k+2 \leq \forall i \leq n-1, a_i = a_{k+1} - (i-k-1)$

以上より, アルゴリズム 4.1.5 で得られた  $\mathbf{a}$  は  $\mathbf{a}$ -列であることがわかる.

定理 4.1.2, 定理 4.1.4, アルゴリズム 4.1.5 より定理 1.3 が導かれる. つまり,  $G(I_\Delta)$  から  $f(\Delta)$  を求めるには, 定理 4.1.3 の前半により  $G(I_\Delta)$  から  $\mathbf{a}$ -列を求め, 定理 4.1.4 により  $\mathbf{a}$ -列から  $f(\Delta)$  を求めることができる. 逆に  $G(I_\Delta)$  から  $f(\Delta)$  を求めるには, アルゴリズム 4.1.5 により  $f(\Delta)$  から  $\mathbf{a}$ -列を求め, 定理 4.1.3 の後半により  $\mathbf{a}$ -列から  $G(I_\Delta)$  を求めることができる. これらを求める過程においてそれぞれがただ一通りに決まる. 以下では具体的な計算によって定理 1.3 が成り立っていることを見る.

**例 4.1.6**  $\Delta$  を [8] 上の simplicial complex とする.

$$G(I_\Delta) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\}$$

$$\cup \{x_2x_3, x_2x_4\}$$

$$\cup \{x_3x_4\}$$

とおく. このとき,  $d_1 = 5, d_2 = 4, d_3 = 4, k = 3$  である. 定理 1.1 から  $\Delta$  が strongly stable flag であることがわかる.

定理 4.1.3 の前半を用いて  $\mathbf{a}$ -列を求める.

$$1 \leq \forall i \leq k, a_i = n - d_i, k+1 \leq \forall i \leq n-1, a_i = n - i \text{ より}$$

$$a_1 = 8 - 5 = 3, a_2 = 8 - 4 = 4, a_3 = 8 - 4 = 4$$

$$a_4 = 8 - 4 = 4, a_5 = 8 - 5 = 3, a_6 = 8 - 6 = 2, a_7 = 8 - 7 = 1$$

したがって,  $\mathbf{a} = (3, 4, 4, 4, 3, 2, 1)$  である.

定理 4.1.4 を用いて  $\mathbf{f}$ -列を求める.

$$\begin{aligned} f_j &= \sum_{i=1}^{n-1} \binom{a_i}{j} \text{ より } f_1 = \sum_{i=1}^7 \binom{a_i}{1} \\ &= \binom{3}{1} + \binom{4}{1} + \binom{4}{1} + \binom{4}{1} + \binom{3}{1} + \binom{2}{1} + \binom{1}{1} \\ &= 3 + 4 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \sum_{i=1}^7 \binom{a_i}{2} \\ &= \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{4}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} + \binom{1}{2} \\ &= 3 + 6 + 6 + 6 + 3 + 1 = 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 &= \sum_{i=1}^7 \binom{a_i}{3} \\ &= \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{4}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} + \binom{2}{3} + \binom{1}{3} \\ &= 1 + 4 + 4 + 4 + 1 = 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4 &= \sum_{i=1}^7 \binom{a_i}{4} \\ &= \binom{3}{4} + \binom{4}{4} + \binom{4}{4} + \binom{4}{4} + \binom{3}{4} + \binom{2}{4} + \binom{1}{4} \\ &= 1 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

したがって  $f(\Delta) = (8, 21, 25, 14, 3)$  となる.

逆に  $f(\Delta) = (8, 21, 25, 14, 3)$  とおく.

アルゴリズム 4.1.5 を用いて  $\mathbf{a}$ -列を求める.

$$f_4 = 3 \text{ より } m=4$$

$$a_{b_4} = 4 \text{ とおく.}$$

$$c_4 = -1 + f_4 = 2$$

よつて  $a_{l_1^4}, a_{l_2^4} = 4$  とおく. ここで  $l_1^4 < l_2^4 < b_4$

$m \neq 1$  より  $m=3$  とおく.

$a_{b_3} = 3$  とおく. ただし,  $b_4 < b_3$

$$c_3 = -1 - \binom{4}{3}f_4 + f_3$$

$$= -1 - 4 * 3 + 14 = 1$$

よつて  $a_{l_1^3} = 3$  とする. ただし,  $l_1^3 < l_1^4$

$m \neq 1$  より  $m=2$  とおく.

$a_{b_2} = 2$  とおく. ただし,  $b_3 < b_2$

$$c_2 = -1 + \binom{4}{2}f_4 - \binom{3}{2}f_3 + f_2$$

$$= -1 + 6 * 3 - 3 * 14 - 25 = 0$$

$m \neq 1$  より  $m=1$  とおく.

$a_{b_1} = 1$  とする. ただし,  $b_2 < b_1$

$$c_1 = -1 - \binom{4}{1}f_4 + \binom{3}{1}f_3 - \binom{2}{1}f_2 + f_1$$

$$= -1 - 4 * 3 + 3 * 14 - 2 * 25 + 21 = 0$$

$m=1$  よりアルゴリズムは終了する.

よつて  $\mathbf{a} = (a_{l_1^3}, a_{l_1^4}, a_{l_2^4}, a_{l_3^4}, a_{b_3}, a_{b_2}, a_{b_1})$

$= (3, 4, 4, 4, 3, 2, 1)$  である.

定理 4.1.3 の後半を用いて  $G(I_\Delta)$  を求める.

$$\maxindex(\max \mathbf{a}) = \maxindex\{a_2, a_3, a_4\} = 4$$

よつて,  $k + 1 = 4$  より  $k = 3$ . したがつて,  $d_1 = n - a_1 = 8 - 3 = 5, d_2 =$

$$n - a_2 = 8 - 4 = 4, d_3 = n - a_3 = 4$$

よつて,  $G(I_\Delta) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\}$

$\cup \{x_2x_3, x_2x_4\}$

$\cup \{x_3x_4\}$

が成り立つ.

以上より f-列  $f(\Delta) = (8, 21, 25, 14, 3)$  と

$$G(I_\Delta) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\}$$

$\cup \{x_2x_3, x_2x_4\}$

$\cup \{x_3x_4\}$

において  $G(I_\Delta)$  から  $f(\Delta)$  を, 逆に  $f(\Delta)$  から  $G(I_\Delta)$  を求めるときただ一通りに決まることがわかる.

## 4.2 Stable flag complex の場合

strongly stable flag complex のときと同様にして stable flag complex の場合でも  $G(I_\Delta)$  から f-列を, 逆に f-列から  $G(I_\Delta)$  を導くことができることを示す. また, strongly stable flag complex の場合とは異なり, 一通りではなく複

数導くことができることを見る. はじめに strongly stable flag complex のときとは異なる  $\mathbf{a}$ -列を定義する.

**定義 4.2.1**  $\mathbf{a}$ -列  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^{n-1}$  は以下の条件を満たす数列とする.

$$\begin{aligned} 1 \leq \exists k \leq n-1, 1 \leq \forall i \leq k-1, 0 \leq a_i \leq n-k \\ a_k \leq a_{k+1} > a_{k+2} > \dots > a_{n-1} \\ k+2 \leq \forall i \leq n-1, a_i = a_{k+1} - (i - k - 1). \end{aligned}$$

このとき, 補題 4.1.2 と同様に  $\mathbf{a}$ -列から simplicial complex  $\Delta$  を作ることができる,  $\mathbf{a} = a(\Delta)$  が成り立つ. また,  $G(I_\Delta)$  と  $\mathbf{a}$ -列の関係は定理 4.1.3 と同様のものが得られる.

**定理 4.2.2** simplicial complex  $\Delta$  が stable flag であるとき  $G(I_\Delta)$  から  $a(\Delta)$  が, 逆に  $a(\Delta)$  から  $G(I_\Delta)$  がただ一通りに決まる.

**証明**  $G(I_\Delta)$  から  $\mathbf{a}$ -列を求める.

定理 1.2 より

$$G(I_\Delta) = \{x_1x_2, \dots, x_1x_{d_1}\}$$

$$\cup \{x_2x_3, \dots, x_2x_{d_2}\}$$

$$\cup \dots$$

$$\cup \{x_kx_{k+1}, \dots, x_kx_{d_k}\}$$

$$1 \leq \forall i \leq k-1, k \leq d_i \leq n$$

$$\text{このとき } 1 \leq \forall i \leq k, a_i = n - d_i$$

$$k+1 \leq \forall i \leq n-1, a_i = n - i \text{ である.}$$

$$1 \leq \forall i \leq k-1, k \leq d_i \leq n \text{ より}$$

$$1 \leq \forall i \leq k-1, 0 \leq a_i \leq n-k \text{ が成り立つ.}$$

また,  $a_k = n - d_k, a_{k+1} = n - (k+1), k+1 \leq d_k$  より  $a_k \leq a_{k+1}$  が成り立つ. よって  $a_k \leq a_{k+1} > a_{k+2} > \dots > a_{n-1}$  である.

$$k+2 \leq \forall i \leq n-1, a_i = n-i \text{ より } a_i - a_{k+1} = n-i - (n-k-1) = -i+k+1.$$

$$\text{よって } k+2 \leq \forall i \leq n-1, a_i = a_{k+1} - (i - k - 1)$$

$$\text{したがって } \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \text{ は } \mathbf{a}\text{-列であり, } \mathbf{a} = a(\Delta) \text{ となる.}$$

逆に  $\mathbf{a}$ -列から  $G(I_\Delta)$  を求める.

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  とおく. ここで  $k+1 = \min\{i \mid a_i + i = n\}$  とすれば,  $k$  が求まり,  $1 \leq \forall i \leq k, d_i = n - a_i$  とおけば  $d_1, d_2, \dots, d_k$  が求められる.

$$\text{したがって, } G(I_\Delta) = \{x_1x_2, \dots, x_1x_{d_1}\}$$

$$\cup \{x_2x_3, \dots, x_2x_{d_2}\}$$

$$\cup \dots$$

$$\cup \{x_kx_{k+1}, \dots, x_kx_{d_k}\}$$

$$1 \leq \forall i \leq k-1, k \leq d_i \leq n$$

となり, simplicial complex  $\Delta$  が stable flag である Stanley-Reisner ideal の極小生成元集合が求まる.

$a$ -列から  $f(\Delta)$  を求めるとき, 定理 4.1.3 を使って求めることができる. これは  $a$ -列の各成分である  $a_i$  の順序にかかわらず,  $\binom{a_i}{j}$  の総和をとるからである.

次に  $f(\Delta)$  から  $a$ -列を求めるアルゴリズムについて説明する.

$f(\Delta) = (f_1, f_2, \dots, f_{d-1})$  とおく.

#### アルゴリズム 4.2.3

1.  $m=d-1$
2.  $a_{b_m} = m$  とおく.  
ただし  $b_m < b_{m-1}$
3.  $c_m = -1 + \sum_{i=m}^{d-1} (-1)^{i-m} \binom{i}{m} f_i$
4.  $c_m \neq 0$  ならば 5 へ  
 $c_m = 0$  ならば 6 へ
5.  $a_{l_1^m} = a_{l_2^m} = \dots = a_{l_{c_m}^m} = m$   
ただし  $l_1^m < l_2^m < \dots < l_{c_m}^m < b_{d-1}$
6.  $m \neq 1$  ならば  $m = m - 1$  とし, 2 へ  
 $m = 1$  ならばアルゴリズムを終了する.

アルゴリズム 4.2.3 より以下の関係式が成り立つ.

$$l_1^1 < l_2^1 < \dots < l_{c_1}^1 < b_{d-1}$$

$$l_1^2 < l_2^2 < \dots < l_{c_2}^2 < b_{d-1}$$

...

$$l_1^{d-2} < l_2^{d-2} < \dots < l_{c_{d-2}}^{d-2} < b_{d-2}$$

$$l_1^{d-1} < l_2^{d-1} < \dots < l_{c_{d-1}}^{d-1} < b_{d-2}$$

$$b_{d-2} < b_{d-3} < \dots < b_1$$

ただし,  $1 \leq i \leq d-1, c_i = 0 \Rightarrow a_{l_1^i} = a_{l_2^i} = \dots = a_{l_{c_i}^i} = 0$  である.

$a$ -列  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  を求めるとき,

$$l_1^1 < l_2^1 < \dots < l_{c_1}^1 < b_{d-1}$$

$$l_1^2 < l_2^2 < \dots < l_{c_2}^2 < b_{d-1}$$

...

$$l_1^{d-2} < l_2^{d-2} < \dots < l_{c_{d-2}}^{d-2} < b_{d-2}$$

$$l_1^{d-1} < l_2^{d-1} < \dots < l_{c_{d-1}}^{d-1} < b_{d-2}$$

のすべての大小関係を決めて, 並べればよい.

こうして得られた  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  が  $a$ -列であることを示す.

$k+1 = b_{d-1}$  とすると

$$l_1^1 = l_2^1 = \dots = l_{c_1}^1 = 1$$

$$l_1^2 = l_2^2 = \dots = l_{c_2}^2 = 2$$

...

$$l_1^{d-2} = l_2^{d-2} = \dots = l_{c_{d-2}}^{d-2} = d-2$$

$$l_1^{d-1} = l_2^{d-1} = \dots = l_{c_{d-1}}^{d-1} = d-1$$

ここで補題 3.7 より  $n=d+k$  よって,  $i \leq d \Rightarrow i \leq n-k$  が成り立つ. したがって,  $1 \leq \forall i \leq k-1, 0 \leq a_i \leq n-k$  が成り立つ.

$k+2 \leq \forall i \leq n-1, a_i = a_{k+1} - (i-k-1)$  はアルゴリズム 4.1.5 で示したときと同様である.

以上よりアルゴリズム 4.2.3 で得られた  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  は a-列となる.

**例 4.2.4**  $\Delta$  を [8] 上の simplicial complex とする.

$$G(I\Delta) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\}$$

$$\cup \{x_2x_3, x_2x_4\}$$

$$\cup \{x_3x_4\}$$

$$\cup \{x_4x_5\}$$

とおくと  $d_1 = 5, d_2 = 4, d_3 = 4, d_4 = 5$  である. 定理 1.2 より  $\Delta$  が stable flag であることがわかる.

定理 4.2.2 の後半を用いて a-列を求める.

$$a_1 = 8 - 5 = 3, a_2 = 8 - 4 = 4, a_3 = 8 - 4 = 4, a_4 = 8 - 5 = 3,$$

$$a_5 = 8 - 5 = 3, a_6 = 8 - 6 = 2, a_7 = 8 - 7 = 1 \text{ となる.}$$

したがって a-列は  $\mathbf{a} = (3, 4, 4, 3, 3, 2, 1)$  となる.

定理 4.1.3 を用いて f-列を求める.

$$f_1 = \sum_{i=1}^7 \binom{a_i}{1}$$

$$= 3 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 1 = 20$$

$$f_2 = \sum_{i=1}^7 \binom{a_i}{2}$$

$$= 3 + 6 + 6 + 3 + 3 + 1 = 22$$

$$f_3 = \sum_{i=1}^7 \binom{a_i}{3}$$

$$= 1 + 4 + 4 + 1 + 1 = 11$$

$$f_4 = \sum_{i=1}^7 \binom{a_i}{4}$$

$$= 1 + 1 = 2$$

よって,  $f(\Delta) = (8, 20, 22, 11, 2)$  となる.

逆に  $f(\Delta) = (8, 20, 22, 11, 2)$  とおく.

アルゴリズム 4.2.3 から a-列を求める.

$m=4$  とおく.

$$a_{b_4} = 4$$

$$c_4 = -1 + f_4 = 1$$

よって  $a_{l_1^4} = a_{l_2^4} = 4$ , ただし,  $l_1^4 < l_2^4 < b_4$

$m \neq 1$  より  $m=3$  とおく.

$$\begin{aligned}
a_{b_3} &= 3, b_4 < b_3 \\
c_3 &= -1 - \binom{4}{3}f_4 + f_3 \\
&= -1 - 4 * 2 + 11 = 2 \\
&\text{よつて } a_{l_1^3} = a_{l_2^3} = 3 \\
m &\neq 1 \text{ より } m=2 \text{ とおく.} \\
a_{b_2} &= 2, b_3 < b_2 \\
c_2 &= -1 + \binom{4}{2}f_4 - \binom{3}{2}f_3 + f_2 \\
&= -1 + 6 * 2 - 3 * 11 + 22 = 0 \\
m &\neq 1 \text{ より } m=1 \text{ とおく.} \\
a_{b_1} &= 1, b_2 < b_1 \\
c_1 &= -1 - \binom{4}{1}f_4 + \binom{3}{1}f_3 - \binom{2}{1}f_2 + f_1 \\
&= -1 - 4 * 2 + 3 * 11 - 2 * 22 + 20 = 0 \\
m &= 1 \text{ よりアルゴリズムは終了する.} \\
&\text{よつてアルゴリズムから得られたのは} \\
l_1^4 &< l_2^4 < b_3 \\
l_1^3 &< l_2^3 < b_3 \\
b_3 &< b_2 < b_1
\end{aligned}$$

という大小関係である.

ここから得られる a-列は以下の 6 通りである.

$$\begin{aligned}
(1) \mathbf{a} &= (a_{l_1^4}, a_{l_2^4}, a_{l_1^3}, a_{l_2^3}, a_{b_3}, a_{b_2}, a_{b_1}) \\
&= (4, 4, 3, 3, 3, 2, 1) \\
(2) \mathbf{a} &= (a_{l_1^4}, a_{l_1^3}, a_{l_2^4}, a_{l_2^3}, a_{b_3}, a_{b_2}, a_{b_1}) \\
&= (4, 3, 4, 3, 3, 2, 1) \\
(3) \mathbf{a} &= (a_{l_1^4}, a_{l_1^3}, a_{l_2^3}, a_{l_2^4}, a_{b_3}, a_{b_2}, a_{b_1}) \\
&= (4, 3, 3, 4, 3, 2, 1) \\
(4) \mathbf{a} &= (a_{l_1^3}, a_{l_1^4}, a_{l_2^4}, a_{l_2^3}, a_{b_3}, a_{b_2}, a_{b_1}) \\
&= (3, 4, 4, 3, 3, 2, 1) \\
(5) \mathbf{a} &= (a_{l_1^3}, a_{l_1^4}, a_{l_2^3}, a_{l_2^4}, a_{b_3}, a_{b_2}, a_{b_1}) \\
&= (3, 4, 3, 4, 3, 2, 1) \\
(6) \mathbf{a} &= (a_{l_1^3}, a_{l_2^3}, a_{l_1^4}, a_{l_2^4}, a_{b_3}, a_{b_2}, a_{b_1}) \\
&= (3, 3, 4, 4, 3, 2, 1)
\end{aligned}$$

この a-列から  $G(I_\Delta)$  を求める.

$$\begin{aligned}
(1) \mathbf{a} &= (4, 4, 3, 3, 3, 2, 1) \text{ より } k=4 \\
&\text{よつて, } d_1 = 8 - 4 = 4, d_2 = 8 - 4 = 4, d_3 = 8 - 3 = 5, d_4 = 8 - 3 = 5 \\
&\text{したがつて, } G(I_\Delta) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4\} \\
&\cup \{x_2x_3, x_2x_4\} \\
&\cup \{x_3x_4, x_3x_5\} \\
&\cup \{x_4x_5\} \\
(2) \mathbf{a} &= (4, 3, 4, 3, 3, 2, 1) \text{ より } k=4
\end{aligned}$$

よつて,  $d_1 = 8 - 4 = 4, d_2 = 8 - 3 = 5, d_3 = 8 - 4 = 4, d_4 = 8 - 3 = 5$

したがつて,  $G(I_\Delta) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4\}$

$\cup \{x_2x_3, x_2x_4, x_2x_5\}$

$\cup \{x_3x_4\}$

$\cup \{x_4x_5\}$

(3)  $\mathbf{a} = (4, 3, 3, 4, 3, 2, 1)$  より  $k=3$

よつて,  $d_1 = 8 - 4 = 4, d_2 = 8 - 3 = 5, d_3 = 8 - 3 = 5$

したがつて,  $G(I_\Delta) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4\}$

$\cup \{x_2x_3, x_2x_4, x_2x_5\}$

$\cup \{x_3x_4, x_3x_5\}$

(4)  $\mathbf{a} = (3, 4, 4, 3, 3, 2, 1)$  より  $k=4$

よつて,  $d_1 = 8 - 3 = 5, d_2 = 8 - 4 = 4, d_3 = 8 - 4 = 4, d_4 = 8 - 3 = 5$

したがつて,  $G(I_\Delta) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\}$

$\cup \{x_2x_3, x_2x_4\}$

$\cup \{x_3x_4\}$

$\cup \{x_4x_5\}$

(5)  $\mathbf{a} = (3, 4, 3, 4, 3, 2, 1)$  より  $k=3$

よつて,  $d_1 = 8 - 3 = 5, d_2 = 8 - 4 = 4, d_3 = 8 - 3 = 5$

したがつて,  $G(I_\Delta) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\}$

$\cup \{x_2x_3, x_2x_4\}$

$\cup \{x_3x_4, x_3x_5\}$

(6)  $\mathbf{a} = (3, 3, 4, 4, 3, 2, 1)$  より  $k=3$

よつて,  $d_1 = 8 - 3 = 5, d_2 = 8 - 3 = 5, d_3 = 8 - 4 = 4$

したがつて,  $G(I_\Delta) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\}$

$\cup \{x_2x_3, x_2x_4, x_2x_5\}$

$\cup \{x_3x_4\}$

ここではじめに与えた  $G(I_\Delta)$  は (4) である. また, (6) は strongly stable であり, 残りの  $G(I_\Delta)$  はすべて stable である. したがつて, 例 4.2.4 からわかる通り strongly stable monomial ideal は stable monomial ideal なので複数得られた極小生成元集合のなかに一つだけ strongly stable であるものが含まれることがわかる.  $G(I_\Delta)$  から  $f(\Delta)$  を求めるときには定理 4.2.2 の前半と定理 4.1.3 よりただ一通りに決まる. しかし, アルゴリズム 4.2.3 から  $f(\Delta)$  から  $\mathbf{a}$ -列を求めるとき複数に決まることがわかる. また, 定理 4.2.2 の後半から  $\mathbf{a}$ -列から  $G(I_\Delta)$  を求めるときはただ一通りに決まることがわかる. したがつて  $f(\Delta)$  から  $G(I_\Delta)$  を求めるときはただ一通りに決まらず, 複数求まることがわかる. 以上のことから  $\Delta$  が stable flag complex のとき, 定理 1.3 の類似は成り立たないことがわかる.

## 5 Balanced flag complex

この章では3章で与えられた strongly stable flag および stable flag の性質と balanced complex の性質を比べる. このことより strongly stable flag および stable flag のグラフ理論的な性質のひとつを求めることができる. はじめに  $k$ -colorable および balanced complex の定義を述べる.

**定義 5.1**  $\Delta$  を  $[n]$  上の simplicial complex とする.

$\Delta$  が  $k$ -colorable であるとはある関数  $\text{col}: [n] \rightarrow [k]$  が存在して  $\text{col}(i) = \text{col}(j)$ ,  $i \neq j \Rightarrow \{i, j\} \notin \Delta$  をみたすことである. また,  $(d-1)$  次元の simplicial complex  $\Delta$  が balanced であるとは,  $\Delta$  が  $d$ -colorable であるときとする.

ここで,  $\Delta$  の次元が  $d-1$  であるとき,  $d \leq k$  が成り立つことがわかる. これは  $d = \max\{|F| \mid F \in \Delta\}$  で  $|F| = d$  となる  $F \in [n]$  を  $F = \{i_1 < i_2 < \dots < i_d\}$  とおくと少なくとも  $d$ -colorable であるからである. まずはじめに, strongly stable flag の facet の集合について示す.

**補題 5.2**  $\Delta$  が strongly stable flag であるとき, facet の集合  $F(\Delta)$  は次のように表すことができる.

$$F(\Delta) = \{F_1, F_2, \dots, F_k, F_{k+1}\}, 1 \leq k \leq n-1$$

ただし,  $1 \leq \forall i \leq k, F_i = \{i, d_i+1, d_i+2, \dots, n\}, F_{k+1} = \{k+1, k+2, \dots, n\}$  である.

**証明**  $\Delta$  は strongly stable flag なので定理 1.1 より

$$G(I_\Delta) = \{x_1x_2, \dots, x_1x_{d_1}\}$$

$$\cup \{x_2x_3, \dots, x_2x_{d_2}\}$$

$$\cup \dots$$

$$\cup \{x_kx_{k+1}, \dots, x_kx_{d_k}\}$$

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k$$

と表すことができる.

また,  $G(I_\Delta) = \{x_F \mid F \in N(\Delta)\}$  より  $N(\Delta)$  は以下のように書ける.

$$N(\Delta) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{1, d_1\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \dots, \{2, d_2\}, \dots, \{k, k+1\}, \{k, k+2\}, \dots, \{k, d_k\}\}$$

ここで  $\Delta$  は flag より  $F \in \binom{[n]}{2} \setminus N(\Delta) \Rightarrow F \in \Delta$  が成り立つ.

$$\text{ここで } \binom{[n]}{2} \setminus N(\Delta) = \{\{1, d_1+1\}, \{1, d_1+2\}, \dots, \{1, n\}\}$$

$$\cup \{\{2, d_2+1\}, \{2, d_2+2\}, \dots, \{2, n\}\}$$

$$\cup \dots$$

$$\cup \{\{k, d_k+1\}, \{k, d_k+2\}, \dots, \{k, n\}\}$$

$$\cup \{\{k+1, k+2\}, \{k+1, k+3\}, \dots, \{k+1, n\}\}$$

$$\cup \{\{k+2, k+3\}, \{k+2, k+4\}, \dots, \{k+2, n\}\}$$

$$\cup \dots$$

$$\cup \{\{n-1, n\}\}$$

と表すことができる.

また, facet は  $\Delta$  の元である face の極大元より  $1 \in F \Rightarrow \{1, d_1 + 1\}, \{1, d_1 + 2\}, \dots, \{1, n\} \in F$  である.

同様にして  $1 \leq \forall l \leq k, l \in F \Rightarrow \{l, d_l + 1\}, \{l, d_l + 2\}, \dots, \{l, n\} \in F$  が成り立つことがわかる.

$F_1 = \{1, d_1 + 1, d_1 + 2, \dots, n\}$  が facet であることを示す.  $\exists G \in \Delta, F_1 \subsetneq G$  とする. このとき  $g \in G \setminus F_1$  が存在する. ここで,  $F_1 = \{1, d_1 + 1, d_1 + 2, \dots, n\}$  より  $g \in \{2, 3, \dots, n\}$  である. しかし,  $\{1, g\} \in \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{1, d_1\}\} \subset N(\Delta)$ . よって,  $G \notin \Delta$  が成り立つ. したがって  $F_1$  は facet である.

$F_{k+1} = \{k+1, k+2, \dots, n\}$  が facet であることを示す.  $\exists G \in \Delta, F_{k+1} \subsetneq G$  とする. このとき,  $g \in G \setminus F_{k+1}$  が存在する. ここで,  $F_{k+1} = \{k+1, k+2, \dots, n\}$  より  $g \in \{1, 2, \dots, k\}$  である. また,  $g < d_g$  であり,  $\{g, d_g\} \in N(\Delta)$  が成り立つ. よって  $G \notin \Delta$  が成り立つ. したがって,  $F_{k+1}$  は facet である.

以上より,  $F(\Delta) = \{F_1, F_2, \dots, F_k, F_{k+1}\}$ ,

$1 \leq \forall i \leq k, F_i = \{i, d_i + 1, d_i + 2, \dots, n\}$ ,

$F_{k+1} = \{k+1, k+2, \dots, n\}$  が成り立つ.

補題 5.2 をつかって以下の命題を示す.

**命題 5.3**  $\Delta$  を  $[n]$  上の simplicial complex とする. このとき,  $\Delta$  が strongly stable flag ならば,  $\Delta$  は balanced である.

**証明**  $\dim \Delta = d - 1$  とする. ここで  $d = \max\{|F| \mid F \in \Delta\}$  である.

$\Delta$  が d-colorable であることを示せばよい.

補題 5.2 より facet の集合  $F(\Delta)$  は

$F(\Delta) = \{F_1, F_2, \dots, F_k, F_{k+1}\} (1 \leq \exists k \leq n - 1)$

$1 \leq \forall i \leq k, F_i = \{i, d_i + 1, d_i + 2, \dots, n\}$

$F_{k+1} = \{k+1, k+2, \dots, n\}$

と表すことができる.

$\Delta$  が d-colorable であることは  $F(\Delta)$  の全ての元が d-colorable であればよい. なぜなら,  $\Delta$  のすべての face は facet に含まれるので d-colorable になるからである. 関数  $\text{col}: [n] \rightarrow [k]$  を以下のように定める.

$1 \leq \forall i \leq k+1, \text{col}(i) = 1,$

$k+2 \leq \forall j \leq n, \text{col}(j) = j - k.$

このとき  $F_{k+1} = \{k+1, k+2, \dots, n\}$  は上に定めた  $\text{col}()$  によって d-colorable になる. 同様に  $1 \leq \forall i \leq k, F_i = \{i, d_i + 1, d_i + 2, \dots, n\}$  も d-colorable になる.

$j \notin F_i, i \notin F_j, i \neq j$  より  $\text{col}(i) = \text{col}(j) (i \neq j) \Rightarrow \{i, j\} \not\subset F_i, F_j$  が成り立つ. したがって,  $\Delta$  は d-colorable より  $\Delta$  は balanced complex である.

**例 5.4**  $\Delta$  を [8] 上の simplicial complex とする.

$$\begin{aligned} G(I_\Delta) &= \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\} \\ &\cup \{x_2x_3, x_2x_4\} \\ &\cup \{x_3x_4\} \end{aligned}$$

とおく. これは  $d_1 = 5, d_2 = 4, d_3 = 4$  より  $d_1 \geq d_2 \geq d_3$  となる. したがって, これは  $I_\Delta$  が strongly stable となる  $G(I_\Delta)$  である. よって, 補題 5.2 より  $F(\Delta) = \{\{1, 6, 7, 8\}, \{2, 5, 6, 7, 8\}, \{3, 5, 6, 7, 8\}, \{4, 5, 6, 7, 8\}\}$  である. したがって,  $\dim \Delta = 4, d = 5$

また,  $k=3$  より  $\text{col}(1) = \text{col}(2) = \text{col}(3) = \text{col}(4) = 1, \text{col}(5) = 2, \text{col}(6) = 3, \text{col}(7) = 4, \text{col}(8) = 5$  とおくことができる.

よって,  $\text{col}(\{1, 6, 7, 8\}) = \{1, 3, 4, 5\}, \text{col}(\{2, 5, 6, 7, 8\}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\text{col}(\{3, 5, 6, 7, 8\}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \text{col}(\{4, 5, 6, 7, 8\}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  となる.

また,  $1 \notin F_2, F_3, F_4$  が成り立つ. よって,  $1 \leq \forall i \leq 4, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\} \notin F_i$  が成り立つ.

同様に,  $1 \leq \forall i \leq 4, \{2, 3\}, \{2, 4\} \notin F_i, 1 \leq \forall i \leq 4, \{3, 4\} \notin F_i$  が成り立つ.

以上より,  $\Delta$  は 5-colorable. したがって,  $\Delta$  は balanced complex である.

定理 5.3 よりすべての strongly stable flag complex は balanced complex であることがわかる. 逆に balanced flag complex は strongly stable flag complex であるとは限らないことを以下の例で見る.

**例 5.5**  $\Delta$  を [5] 上の simplicial complex とする.

$$\begin{aligned} G(I_\Delta) &= \{x_1x_3, x_1x_4\} \\ &\cup \{x_2x_3, x_2x_4\} \end{aligned}$$

とおく. この  $\Delta$  の facet の集合は  $F(\Delta) = \{\{1, 2, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$  である. よって  $d = \max\{|F| \mid F \in \Delta\} = 3$

$\text{col}(1) = \text{col}(3) = 1, \text{col}(2) = \text{col}(4) = 2, \text{col}(5) = 3$  とおくと  $\Delta$  は 3-colorable. したがって,  $\dim \Delta = 2$  より  $\Delta$  は balanced である.

また,  $\Delta$  は flag であるが,  $x_1x_2 \notin G(I_\Delta)$  なので補題 3.1 より strongly stable flag ではない.

次に stable flag complex について示す. stable flag complex も補題 5.2, 定理 5.3 と類似の命題が成り立つ.

**補題 5.6**  $\Delta$  が stable flag であるとき, facet の集合  $F(\Delta)$  は次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} F(\Delta) &= \{F_1, F_2, \dots, F_k\} (1 \leq k \leq n-1), \\ 1 \leq \forall i \leq k, F_i &= \{i, d_i + 1, d_i + 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

**証明** 定理 1.2 より  $\Delta$  が stable flag であるとき

$$\begin{aligned}
G(I_\Delta) &= \{x_1x_2, \dots, x_1x_{d_1}\} \\
&\cup \{x_2x_3, \dots, x_2x_{d_2}\} \\
&\cup \dots \\
&\cup \{x_kx_{k+1}, \dots, x_kx_{d_k}\} \\
1 &\leq \forall i \leq k-1, k \leq d_i \leq n \\
&\text{である. ここで } \Delta \text{ は flag より } F \in \binom{[n]}{2} \setminus N(\Delta) \Rightarrow F \in \Delta \text{ が成り立つ.} \\
&\text{したがって, } \binom{[n]}{2} \setminus N(\Delta) = \{\{1, d_1+1\}, \{1, d_1+2\}, \dots, \{1, n\}\} \\
&\cup \{\{2, d_2+1\}, \{2, d_2+2\}, \dots, \{2, n\}\} \\
&\cup \dots \\
&\cup \{\{k, d_k+1\}, \{k, d_k+2\}, \dots, \{k, n\}\} \\
&\cup \{\{k+1, k+2\}, \{k+1, k+3\}, \dots, \{k+1, n\}\} \\
&\cup \{\{k+2, k+3\}, \{k+2, k+4\}, \dots, \{k+2, n\}\} \\
&\cup \dots \\
&\cup \{\{n-1, n\}\} \\
&\text{であることがわかる.}
\end{aligned}$$

facet は  $\Delta$  の face の極大元より  $1 \in F \Rightarrow \{\{1, d_1+1\}, \{1, d_1+2\}, \dots, \{1, n\}\} \subset F$  である. したがって,  $\{1, d_1+1, d_1+2, \dots, n\} \subset F$  が成り立つ. 同様にして  $1 \leq \forall i \leq k, i \in F \Rightarrow \{i, d_i+1, d_i+2, \dots, n\} \subset F$  である.

ここで,  $1 \leq \forall i \leq k, F_i = \{i, d_i+1, d_i+2, \dots, n\}$  が facet であることを示す.  $\exists G \in \Delta, F_1 \subsetneq G$  とする. このとき  $g \in G \setminus F_1$  が存在する. ここで,  $F_1 = \{1, d_1+1, d_1+2, \dots, n\}$  より  $g \in \{1, 2, 3, \dots, d_1\} \setminus \{1\}$ . しかし,  $\{1, g\} \in \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{1, d_1\}\} \subset N(\Delta)$ . よって,  $G \notin \Delta$  である. したがって  $F_1$  は facet である.

以上より, stable flag complex の facet の集合は

$$\begin{aligned}
F(\Delta) &= \{F_1, F_2, \dots, F_k\} (1 \leq \exists k \leq n-1), \\
1 &\leq \forall i \leq k, F_i = \{i, d_i+1, d_i+2, \dots, n\} \text{ となる.}
\end{aligned}$$

補題 5.6 を使って以下の命題を示す.

**定理 5.7**  $\Delta$  を  $[n]$  上の simplicial complex とする. このとき,  $\Delta$  が stable flag complex ならば,  $\Delta$  は balanced complex である.

**証明**  $\dim \Delta = d-1$  とする.

このとき,  $\Delta$  が  $d$ -colorable であることを示せばよい.

補題 5.6 より  $\Delta$  の facet の集合は

$$F(\Delta) = \{F_1, F_2, \dots, F_k\} (1 \leq \exists k \leq n-1)$$

と表すことができる. ただし,  $1 \leq \forall i \leq k, F_i = \{i, d_i+1, d_i+2, \dots, n\}$  である.

$$1 \leq \forall i \leq k-1, k \leq d_i \leq n \text{ より } |F_i| = n - d_i + 1 \text{ が成り立つ.}$$

$|F_i|$  が最も大きくなる index を  $j$  とおく. このとき,  $1 \leq \forall i \leq k, |F_i| \leq |F_j|$  が成り立ち,  $d = \max\{|F| | F \in \Delta\} = |F_j| = n - d_j + 1$  となる.

ここで関数  $\text{col}: [n] \rightarrow [d]$  を以下のように定める.

$$1 \leq \forall i \leq k+1, \text{col}(i) = 1, \\ k+2 \leq \forall j \leq n, \text{col}(j) = j - k.$$

上で定めた  $\text{col}()$  により  $1 \leq \forall i \leq k, F_i = \{id_i + 1, d_i + 2, \dots, n\}$  は  $d$ -colorable となる.

$j \notin F_i, i \notin F_j, i \neq j$  より  $\text{col}(i) = \text{col}(j) (i \neq j) \Rightarrow \{i, j\} \not\subset F_i, F_j$  である.

よって,  $\{i, j\} \not\subset F_i \cap F_j$  が成り立つ. したがって,  $\Delta$  は  $d$ -colorable より  $\Delta$  は balanced complex である.

strongly stable flag complex は stable flag complex より定理 5.3 は定理 5.7 の系であることがわかる. また, 上の例 5.5 からわかるとおり, balanced flag complex は必ずしも stable flag complex であるとは限らない.

## 6 Graded Betti numbers

この章では strongly stable flag complex と stable flag complex に対する Stanley-Reisner ideal の Graded Betti number を比較したとき成り立つ定理を示す. はじめに Graded Betti number の定義を述べる.

**定義 6.1** ([1] Proposition A.2.2)  $S$  上の有限生成加群  $M$  に対して minimal free resolution を定める.

$$\mathbf{F}: \cdots \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

ここで  $\forall i, F_i = \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{ij}}$  である. このとき,  $\beta_{i,i+j} = \dim_K \text{Tor}_i(K, M)_j, \forall i, j$  を  $M$  の Graede Betti number と呼ぶ.

monomial ideal  $I$  が stable monomial ideal であるとき, その Graded Betti number は組合せ論的に求めることができる. この式を Eliahou-Kervaire の公式と呼ぶ. 式の導出は [6] を参照.

**定理 6.2** ([1] Corollary 7.2.3(a))  $I$  を stable monomial ideal とする. このとき,  $I$  の Graede Betti number は以下の式で求められる.

$$\beta_{i,i+j}(I) = \sum_{u \in G(I)_j} \binom{m(u)-1}{i}$$

また, この公式の類似を squarefree monomial ideal のときにも使うことができることが [7][8] で示されている.

**定理 6.3** ([1] Corollary 7.4.2(a))  $I$  を stable squarefree monomial ideal とする. このとき,  $I$  の Graede Betti number は以下の式で求められる.

$$\beta_{i,i+j}(I) = \sum_{u \in G(I)_j} \binom{m(u)-j}{i}$$

Stanley-Reisner ideal  $I_\Delta$  は squarefree monomial ideal なので, その Graded Betti number を求めるときは定理 6.3 の式を使う.  $f$ -列が等しい simplicial complex  $\Delta$  が stable flag であるときと strongly stable flag であるときの Graded Betti number を比較すると以下が成り立つ.

**定理 6.4**  $[n]$  上の strongly stable flag complex  $\Delta$  と stable flag complex  $\Delta'$  が  $f(\Delta) = f(\Delta')$  をみたすならば以下の等式が成り立つ.

$$\beta_{i,i+j}(I_\Delta) = \beta_{i,i+j}(I_{\Delta'}), \forall i, j$$

**証明**  $\Delta$  が strongly stable flag complex ならば  $G(I_\Delta)$  は定理 1.1 より

$$G(I_\Delta) = \{x_1x_2, \dots, x_1x_{d_1}\}$$

$$\cup \{x_2x_3, \dots, x_2x_{d_2}\}$$

$$\cup \dots$$

$$\cup \{x_kx_{k+1}, \dots, x_kx_{d_k}\}$$

$$(d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k)$$

と表すことができる. よって,  $j \neq 2$  のとき  $G(I_\Delta)$  には  $\deg(u) \neq 2$  となる  $u \in G(I_\Delta)$  が存在しないので  $\beta_{i,i+j} = 0$  が成り立つ.

一方, stable flag complex  $\Delta'$  の  $G(I_{\Delta'})$  は定理 1.2 より

$$G(I_{\Delta'}) = \{x_1x_2, \dots, x_1x_{d'_1}\}$$

$$\cup \{x_2x_3, \dots, x_2x_{d'_2}\}$$

$$\cup \dots$$

$$\cup \{x_kx_{k+1}, \dots, x_kx_{d'_k}\},$$

$$1 \leq \forall i \leq k-1, k \leq d'_i \leq n$$

である. よって, strongly stable flag と同様に  $i \neq 2 \Rightarrow \beta_{i,i+j}(I_{\Delta'}) = 0$  が成り立つ. したがって,  $\forall i, j (i \neq 2), \beta_{i,i+j}(I_\Delta) = \beta_{i,i+j}(I_{\Delta'})$  が成り立つ.

以上より  $j=2$  の場合を考える.

$j=2$  のとき, Graded Betti number は以下のように表すことができる.

$$\beta_{i,i+2}(I_\Delta) = \sum_{u \in G(I_\Delta)_2} \binom{m(u)-2}{i}$$

$$\beta_{i,i+2}(I_{\Delta'}) = \sum_{u' \in G(I_{\Delta'})_2} \binom{m(u')-2}{i}$$

$$\text{ここで } m(u) = 2, 3, \dots, d_1, 3, 4, \dots, d_2, \dots, d_k,$$

$$m(u') = 2, 3, \dots, d'_1, 3, 4, \dots, d'_2, \dots, d'_k \text{ である.}$$

$$\text{ただし, } d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k,$$

$$1 \leq \forall i \leq k-1, k \leq d'_i \leq n-1 \text{ である.}$$

$$\beta_{i,i+2}(I_\Delta) = \beta_{i,i+2}(I_{\Delta'}) \text{ となるには}$$

$\forall c, |\{u \in G(I_\Delta) \mid m(u) = c\}| = |\{u' \in G(I_{\Delta'}) \mid m(u') = c\}|$  が成り立てばよい.

ここで 4 章で論じたことを使う. アルゴリズム 4.2.3 において

$$l_1^1 < l_2^1 < \dots < l_{c_1}^1 < b_{d-1}$$

$$l_1^2 < l_2^2 < \dots < l_{c_2}^2 < b_{d-1}$$

...

$$l_1^{d-2} < l_2^{d-2} < \dots < l_{c_{d-2}}^{d-2} < b_{d-1}$$

$$l_1^{d-1} < l_2^{d-1} < \dots < l_{c_{d-1}}^{d-1} < b_{d-1}$$

のすべての大小関係を決めることで a-列  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  を得ることができる. このとき  $G(I_\Delta)$  が strongly stable になるのは定理 4.1.3 より

$$l_1^1 < l_2^1 < \dots < l_{c_1}^1 <$$

$$l_1^2 < l_2^2 < \dots < l_{c_2}^2 <$$

...

$$l_1^{d-2} < l_2^{d-2} < \dots < l_{c_{d-2}}^{d-2} <$$

$$l_1^{d-1} < l_2^{d-1} < \dots < l_{c_{d-1}}^{d-1} < b_{d-2}$$

が成り立つときのみである. それ以外の並べ方では  $G(I_\Delta)$  はすべて stable になる. つまり, 定理 4.1.4 より等しい  $f(\Delta)$  から得られる a-列の各要素は順番が異なるだけで要素の個数は等しいことがわかる. よって,  $\forall c, |\{u \in G(I_\Delta) \mid m(u) = c\}| = |\{u' \in G(I_{\Delta'}) \mid m(u') = c\}|$  が成り立つ. したがって,  $\forall i, j, \beta_{i,i+j}(I_\Delta) = \beta_{i,i+j}(I_{\Delta'})$  が成り立つ.

**例 6.5**  $\Delta, \Delta'$  を [8] 上の simplicial complex とする.

$$G(I_\Delta) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\}$$

$$\cup \{x_2x_3, x_2x_4\}$$

$$\cup \{x_3x_4\}$$

$$\cup \{x_4x_5\}$$

は定理 1.1 より  $\Delta$  が stable flag complex となる  $G(I_\Delta)$  であることがわかる.

$$\text{また, } G(I_{\Delta'}) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\}$$

$$\cup \{x_2x_3, x_2x_4, x_2x_5\}$$

$$\cup \{x_3x_4\}$$

は定理 1.2 より  $\Delta'$  が strongly stable complex となる  $G(I_{\Delta'})$  であることがわかる. ここで  $f(\Delta) = f(\Delta') = (8, 20, 22, 11, 2)$  である.

定理 6.3 より  $\beta_{i,i+j}(I) = \sum_{u \in G(I)_j} \binom{m(u)-j}{i}$  を用いて  $I_\Delta$  と  $I_{\Delta'}$  の Graded Betti number を求める.

$G(I_\Delta) = G(I_\Delta)_2, G(I_{\Delta'}) = G(I_{\Delta'})$  より  $j \neq 2, \beta_{i,i+j}(I_\Delta) = G(I_{\Delta'}) = 0$  が成り立つ. また,  $G(I_\Delta)$  において  $d_1 = 5, d_2 = 4, d_3 = 4, d_4 = 5, G(I_{\Delta'})$  において  $d'_1 = 5, d'_2 = 5, d'_3 = 4$  である.

よって,  $\beta_{i,i+2}(I_\Delta) = \sum \binom{m(u)-2}{i}$  より

$$\beta_{i,i+2}(I_\Delta) = \binom{1}{i} + \binom{2}{i} + \binom{3}{i} + \binom{1}{i}$$

$$+ \binom{2}{i} + \binom{2}{i} + \binom{3}{i}$$

$$b_{i,i+2}(I_{\Delta'}) = \binom{1}{i} + \binom{2}{i} + \binom{3}{i} + \binom{2}{i}$$

$$+ \binom{2}{i} + \binom{3}{i} + \binom{2}{i}$$

したがって,  $\forall i, \beta_{i,i+2}(I_\Delta) = b_{i,i+2}(I_{\Delta'})$  が成り立つ.

$f(\Delta) = (8, 20, 22, 11, 2)$  となる stable flag complex  $\Delta$  の  $G(I_\Delta)$  と  $\mathbf{a}$  は 4 章の議論により以下の 6 通りになる.

$$\begin{aligned}
(1) \mathbf{a} &= (3,3,4,4,3,2,1) \\
G(I_\Delta) &= \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\} \\
&\cup \{x_2x_3, x_2x_4, x_2x_5\} \\
&\cup \{x_3x_4\} \\
(2) \mathbf{a} &= (3,4,3,4,3,2,1) \\
G(I_\Delta) &= \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\} \\
&\cup \{x_2x_3, x_2x_4\} \\
&\cup \{x_3x_4, x_3x_5\} \\
(3) \mathbf{a} &= (4,3,3,4,3,2,1) \\
G(I_\Delta) &= \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4\} \\
&\cup \{x_2x_3, x_2x_4, x_2x_5\} \\
&\cup \{x_3x_4, x_3x_5\} \\
(4) \mathbf{a} &= (3,4,4,3,3,2,1) \\
G(I_\Delta) &= \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\} \\
&\cup \{x_2x_3, x_2x_4\} \\
&\cup \{x_3x_4\} \\
&\cup \{x_4x_5\} \\
(5) \mathbf{a} &= (4,3,4,3,3,2,1) \\
G(I_\Delta) &= \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4\} \\
&\cup \{x_2x_3, x_2x_4, x_2x_5\} \\
&\cup \{x_3x_4\} \\
&\cup \{x_4x_5\} \\
(6) \mathbf{a} &= (4,4,3,3,3,2,1) \\
G(I_\Delta) &= \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4\} \\
&\cup \{x_2x_3, x_2x_4\} \\
&\cup \{x_3x_4, x_3x_5\} \\
&\cup \{x_4x_5\}
\end{aligned}$$

このうち、(1)のみ  $\Delta$  が strongly stable flag complex になり、(2),(3),(4),(5),(6) は stable flag complex になることがわかる。

これらの Graded Betti number を計算すると以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\beta_{i,i+2}(I_\Delta) &= \binom{1}{i} + \binom{1}{i} + \binom{2}{i} \\
&+ \binom{2}{i} + \binom{2}{i} + \binom{3}{i} + \binom{3}{i}
\end{aligned}$$

したがって、 $I_\Delta$  のすべての Graded Betti number は一致する。

## 参考文献

- [1] J.Herzog, T.Hibi, *Monomial Ideals*. Springer-verlag London,2011
- [2] R.stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra, Second Edition*. Birkhäuser,1995

- [3] A. Frohmader, *Face Vectors Of Flag Complexes*. Israel Journal Of Mathematics 164 pp153-164, 2008
- [4] A. Constantinescu, M. Varbaro, *On the  $h$ -vectors of Cohen-Macaulay Flag Complexes*. arXiv:1004.0170v2, 2011
- [5] J. Herzog, *Generic initial ideals and Graded Betti numbers*. In: T. Hibi, (ed) Computational commutative algebra and combinatorics. Adv. Studies in Pure Math., **33**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2002
- [6] S. Eliahou, M. Kervaire, *Minimal Resolutions of Some Monomial Ideals*. J. Algebra, **129**, 1-25, 1990
- [7] A. Aramova, J. Herzog, T. Hibi, *Squarefree lexsegment ideals*. Math. Z., **228**, 353-378, 1998
- [8] A. Aramova, J. Herzog, T. Hibi, *Shifting operations and graded Betti numbers*. J. Algebraic Combin., **12**(3), 207-222, 2000
- [9] R. Stanley, *Algebraic Combinatorics*. Springer-verlog New York, 2013
- [10] T. Hibi, *Algebraic Combinatorics on Convex Polytope*. Carlsaw Publications, Glebe, N.S.W., Australia, 1992
- [11] 日比孝之, 可換代数と組合せ論, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995