四次以下の非特異平面曲線の Versal Deformation について

数学応用数理専攻 楫研究室 修士 2 年
根本卓弥 5112A047-2

2015 年 2 月 6 日（金）

代数閉体 k 上のスキーム X_0 の versal deformation について, それが存在するかどうかということ以上に一般的にわかっていることはほとんどない. Schlessinger の criterion によって versal deformation の存在がわかっている場合として,

(1) X_0 is affine with isolated singularities.

(2) X_0 is projective.

の二つがある. (1) のときはたとえば [6] で具体的な versal deformation の計算が行われている. 本論文では, あまり行われていない (2) の場合について, とくに, 非特異な射影スキームの versal deformation を計算することを考えた. その結果, 四次以下の非特異平面曲線については, versal deformation の中でも変数の数が一番少ない miniversal deformation が次の方法で計算できることが分かった. すなわち,

Main theorem

$X_0 = \mathrm{V}(f) \hookrightarrow \mathbb{P}^2_k = \mathrm{Proj}\, k[x_0, x_1, x_2]$ を d 次 $(d \leq 4)$ の非特異平面曲線とする. $x_i f_{x_j}$ $(0 \leq i, j \leq 2)$ の生成する $k[x_0, x_1, x_2]$ のイデアルを J とする. $\mu := \dim_k (k[x_0, x_1, x_2]/J)_{d\text{ 次部分}}$ とおく. $g_1, \ldots, g_\mu$ を d 次斉次多項式で, $k[x_0, x_1, x_2]/J$ への像が $(k[x_0, x_1, x_2]/J)_{d\text{ 次部分}}$ の k 上のベクトル空間としての基底となっているものとする.

X_0 の deformation (V, R) を次で定める.

$$R := k[[t_1, \ldots, t_\mu]]\ ,\ F := f + \sum_{i=1}^{\mu} t_i\, g_i$$
$$V := \mathrm{V}(F) \hookrightarrow \mathbb{P}^2_R\ ,\ V_n := V \times_{\mathrm{Spec} R} \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{m}_A^{n+1})$$

このとき, deformation (V, R) は X_0 の miniversal deformation である.

versal deformation が具体的にわかることによって, X_0 の全ての deformation の具体的な形がわかる.

k を代数閉体, X_0 を k 上のスキーム, A を完備 Noether 局所 k 代数で剰余体が k であるもの, $A_n := A/\mathfrak{m}_A^{n+1}$ とする.

Definition Deformation of a scheme ([7] Definition 6.1)

deformation (X, A) とはスキームの族 $X = \{X_n\}$ と完備 Noether 局所 k 代数で剰余体が k である環 A で, 各 $n \geq 0$ に対し A_n 上 flat and of finite type なスキーム X_n と closed embedding $X_{n-1} \hookrightarrow X_n$ で同型 $X_{n-1} \simeq X_n \times_{\mathrm{Spec} A_n} \mathrm{Spec} A_{n-1}$ を導くものから成る. X は X_0 の A 上の abstract deformation, または deformation であるという.

X, X' がともに A 上の $X_0 = X'_0$ の deformation のとき, $\phi\colon X \simeq X'$ が同型とは, 各 $n \geq 0$ に対し $\phi_n\colon X_n \simeq X'_n$ であって $\phi_n|_{X_{n-1}} = \phi_{n-1}$, さらに $\phi_0\colon X_0 \to X_0$ は恒等写像であるものとする.

$\mathcal{C}$ を局所 Artin 環の圏, $\widehat{\mathcal{C}}$ を完備 Noether 局所 k 代数で剰余体が k であるものの圏, F を $\mathcal{C}$ から (Sets) への

covariant functor とする. $R \in \widehat{\mathcal{C}}$ とするとき, $\varprojlim F(R/\mathfrak{m}^n)$ の元と covariant functor の射 $\mathrm{Hom}_k(R,-) \to F$ の間に一対一の対応がある.

Definition Smooth morphism ([2] p.108 Definition)

$G \to F$ を functor の射とする. 任意の $A \in \mathcal{C}$ に対し, $G(A) \to F(A)$ は全射で, さらに任意の $A, B \in \mathcal{C}$ と全射 $B \to A$ に対し $G(B) \to G(A) \times_{F(A)} F(B)$ が全射であるとき, functor の射 $G \to F$ は smooth であるという.

$A \in \mathcal{C}$ に対し集合 $\mathrm{Def}(X_0)(A)$=$\{$isom. classes of deformations of $X_0/A\}$ を対応させる functor を F とすると, X_0 の $R \in \widehat{\mathcal{C}}$ 上の deformation X は射 $\mathrm{Hom}_k(R,-) \to \mathrm{Def}(X_0)$ を与える. この射が smooth のとき, X を versal deformation という.

とくに, $D := k[t]/t^2$ とするとき, $\mathrm{Hom}_k(R,D) \to \mathrm{Def}(X_0)(D)$ が全単射ならば, X を miniversal deformation という.

一般的な非特異平面四次曲線は 28 本の bitangent を持つことが知られている. 最後に, Fermat quartic のある 1 変数の deformation によって, Fermat quartic の bitangent の数がどのように変化するかを調べた. i_4 を tangent の intersection multiplicity が 4 である inflection point の数, i_3 を tangent の intersection multiplicity が 3 である inflection point の数, l を bitangent の本数とすると, これらの関係は下の表のようになっていることがわかった.

	i_4	i_3	l
$x^4+y^4+z^4$	12	0	16
$x^4+y^4+z^4+tx^2y^2$	4	16	24
$x^4+y^4+z^4+tx^2yz$	0	24	28

参考文献

[1] R. Hartshorne, "Algebraic geometry", Graduate Texts in Mathematics, 52. Springer-Verlag, 1977

[2] R. Hartshorne, "Deformation theory", Graduate Texts in Mathematics, 257. Springer, 2010

[3] N. Namba, "Geometry of algebraic projective curves", Marcel Dekkers INC, New York and Basel, 1984

[4] M. Schlessinger, "Functors of Artin rings", Trans. Amer. Math. Soc. 130, 208–222, 1968

[5] E. Sernesi, "Deformations of algebraic schemes", Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 334, Springer-Verlag, Berlin, 2006

[6] J. Stevens, "Computing versal deformations", Experiment. Math. 4, no. 2, 129–144, 1995

[7] A. Vistoli, "The deformation theory of local complete intersections", arXiv:math.AG/9703008.