

2015 年 2 月 6 日

四次以下の非特異平面曲線の Versal Deformation について

楫研究室所属 修士 2 年

5112A047-2 根本卓弥

1 Main theorem

代数閉体 k 上のスキーム X_0 の deformation の中でも全ての deformation の情報を含む versal deformation と,
その versal deformation の中でも一番無駄がない miniversal deformation について, それらが存在するかどうかということ以上に一般的にわかっていることはほとんどない.

Schlessinger の criterion によって versal deformation の存在がわかっている例として,

(1) X_0 is affine with isolated singularities.

(2) X_0 is projective.

の二つがある. (1) のときは具体的な計算も行われているが, (2) のときについて具体的な versal deformation の形を求めたものは無かった. 本論文では (2) のとき, とくに非特異な射影スキームの versal deformation を計算することを考えた. その結果, 四次以下の非特異平面曲線については, miniversal deformation が次の方法で計算できることが分かった.

Main theorem

$X_0 = V(f) \hookrightarrow \mathbb{P}_k^2 = \text{Proj } k[x_0, x_1, x_2]$ を d 次 ($d \leq 4$) の非特異平面曲線とする.

$$J := \{x_i f_{x_j}\} \ (0 \leq i, j \leq 2) \subset k[x_0, x_1, x_2]$$

$\mu := \dim_k (k[x_0, x_1, x_2]/J)_d$ とおく. $g_1, \dots, g_\mu$ を d 次斉次多項式で, $k[x_0, x_1, x_2]/J$ への像が $(k[x_0, x_1, x_2]/J)_d$ の k 上のベクトル空間としての基底となっているものとする.

$$R := k[[t_1, \dots, t_\mu]], F := f + \sum_{i=1}^{\mu} t_i g_i$$

$$V := V(F) \hookrightarrow \mathbb{P}_R^2, V_n := V \times_{\text{Spec } R} \text{Spec}(R/\mathfrak{m}_A^{n+1})$$

このとき, (V, R) は X_0 の miniversal deformation である.

Remark

X_0 を $\mathbb{P}_k^n$ の d 次の超曲面とする. $n \geq 3, d \geq 2$ のときは, $(n, d) = (3, 4)$ のときを除き, 定理の方法で miniversal deformation が計算できる. $(n, d) = (3, 4)$ のときは 定理の方法で miniversal deformation の計算はできない.
また $n = 2, d \geq 5$ のときも定理の方法で miniversal deformation の計算はできない.

2 Versal deformation を具体的に 計算することについて

$\mathcal{C}$ を局所 Artin 環の圏, $\hat{\mathcal{C}}$ を完備 Noether 局所 k 代数で剰余体が k であるものの圏とする.

$A \in \mathcal{C}$ に対し集合

$$\mathrm{Def}(X_0)(A) = \{\text{isom. classes of deformations of } X_0/A\}$$

を対応させる functor $\mathcal{C} \rightarrow (\text{Sets})$ を $\mathrm{Def}(X_0)$ とすると, X_0 の $R \in \hat{\mathcal{C}}$ 上の deformation X と functor の射 $\mathrm{Hom}_k(R, -) \rightarrow \mathrm{Def}(X_0)$ は一対一対応.

(X, R) の定める射

$$\mathrm{Hom}_k(R, A) \rightarrow \mathrm{Def}(X_0)(A)$$

$$R \rightarrow A \mapsto X \times_{\mathrm{Spec} R} \mathrm{Spec} A$$

X が versal deformation のとき, この写像は全射.

X が miniversal deformation のとき, この写像は全単射.

したがって miniversal deformation を具体的に計算できると,
すべての deformation の形がわかる.

3 Miniversal deformation of Fermat quartic

X_0 が $f = x^4 + y^4 + z^4$ の定める

$V(f) \hookrightarrow \mathbb{P}_k^2 = \text{Proj } k[x, y, z]$ のとき, 定理のイデアル J は

$$\begin{aligned} J &= \{xf_x, yf_x, zf_x, xf_y, yf_y, zf_y, xf_z, yf_z, zf_z\} \\ &= \{4x^4, 4x^3y, 4x^3z, 4xy^3, 4y^4, 4y^3z, 4xz^3, 4yz^3, 4yz^3, 4z^4\} \end{aligned}$$

となり, したがって

$$H^1(\mathcal{T}_{X_0}) \simeq \left(\frac{k[x, y, z]}{(x^4, x^3y, x^3z, xy^3, y^4, y^3z, xz^3, yz^3, z^4)} \right)_4$$

である. この k ベクトル空間の基底としては J の生成元に現れ

ない単項式をとればよい. よって,

$$\begin{aligned} g_1 &= x^2 y^2, & g_2 &= x^2 z^2, & g_3 &= y^2 z^2 \\ g_4 &= x^2 y z, & g_5 &= x y^2 z, & g_6 &= x y z^2 \end{aligned} \quad \text{として}$$

$$R := k[[t_1, \dots, t_6]] \quad , \quad F := f + \sum_{i=1}^{\mu} t_i g_i$$

$$V := V(F) \hookrightarrow \mathbb{P}_R^2 \quad , \quad V_n := V \times_{\mathrm{Spec} R} \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{m}_A^{n+1})$$

とおくと Main theorem より, (V, R) が X_0 の miniversal deformation である.

f が複雑な場合も, J のグレブナー基底を計算して, その先頭項に含まれない多項式と同値類をとればよい.

4 Deformation of Fermat quartic and its 16 bitangents

一般的な非特異平面四次曲線の inflection point の数は 24 個であり, また, 一般的な非特異平面四次曲線は 28 本の bitangent を持つことが知られている.

i_3 : tangent が 3 回交わる inflection point の数
 l : bitangent の数

$$l = 16 + \frac{1}{2}i_3$$

が成り立つ (N. Namba, "Geometry of algebraic projective curves").

Fermat quartic の inflection point の数は 12 個で, その点での tangent の intersection multiplicity は 4 である.

i_4 : tangent が 4 回交わる inflection point の数

i_3 : tangent が 3 回交わる inflection point の数

l : bitangent の数

	i_4	i_3	l
$f = x^4 + y^4 + z^4$	12	0	16

Fermat quartic の bitangent の数は非特異平面四次曲線の中で最少. よって, Fermat quartic の deformation によって bitangent は 16 本から増加していき, 一般的な曲線が得られたとき 28 本になるということが考えられる.

(A) $F = x^4 + y^4 + z^4 + tx^2y^2$ のとき
 F の inflection point は Mathematica で計算してみると 20 個あることがわかる.

$$2i_4 + i_3 = 24, i_4 + i_3 = 20$$

が成り立つので $i_4 = 4, i_3 = 16$ である. このとき bitangent の数 l は $l = 16 + 8 = 24$ 本に増えている.

	i_4	i_3	l
$x^4 + y^4 + z^4$	12	0	16
$x^4 + y^4 + z^4 + tx^2y^2$	4	16	24

(B) $F = x^4 + y^4 + z^4 + tx^2yz$ のとき
 $x^4 + y^4 + z^4 + tx^2yz$ の inflection point は Mathematica で
計算してみると 24 個あることがわかる.

$$2i_4 + i_3 = 24, i_4 + i_3 = 24$$

より $i_4 = 0, i_3 = 24$ であり, bitangent の数 l は
 $l = 16 + 12 = 28$ 本.

inflection point と bitangent の数についてまとめると次のようになる.

	i_4	i_3	l
$x^4 + y^4 + z^4$	12	0	16
$x^4 + y^4 + z^4 + tx^2y^2$	4	16	24
$x^4 + y^4 + z^4 + tx^2yz$	0	24	28