四次以下の非特異平面曲線の Versal Deformation について

早稲田大学基幹理工学研究科
数学応用数理専攻

根本卓弥

学籍番号　5112A047-2
指導教員名　楫元

2015 年 1 月 27 日

1 Introduction

代数閉体 k 上のスキーム X_0 の versal deformation について, それが存在するかどうかということ以上に一般的にわかっていることはほとんどない ([4]). Schlessinger の criterion によって versal deformation の存在がわかっている場合として,

(1) X_0 is affine with isolated singularities.

(2) X_0 is projective.

の二つがある. (1) のときはたとえば [6] で具体的な versal deformation の計算が行われている. 本論文では, あまり行われていない (2) の場合について, とくに, 非特異な射影スキームの versal deformation を計算することを考えた. その結果, 四次以下の非特異平面曲線については, versal deformation の中でも変数の数が一番少ない miniversal deformation が次の方法で計算できることが分かった. すなわち,

Main theorem

$X_0 = \mathrm{V}(f) \hookrightarrow \mathbb{P}^2_k = \mathrm{Proj}\, k[x_0, x_1, x_2]$ を d 次 ($d \leq 4$) の非特異平面曲線とする. $x_i f_{x_j}$ ($0 \leq i, j \leq 2$) の生成する $k[x_0, x_1, x_2]$ のイデアルを J とする. $\mu := \dim_k (k[x_0, x_1, x_2]/J)_{d\text{ 次部分}}$ とおく. $g_1, \ldots, g_\mu$ を d 次斉次多項式で, $k[x_0, x_1, x_2]/J$ への像が $(k[x_0, x_1, x_2]/J)_{d\text{ 次部分}}$ の k 上のベクトル空間としての基底となっているものとする.

X_0 の deformation (V, R) を次で定める.

$$R := k[[t_1, \ldots, t_\mu]]\ ,\ F := f + \sum_{i=1}^{\mu} t_i\, g_i$$
$$V := \mathrm{V}(F) \hookrightarrow \mathbb{P}^2_R\ ,\ V_n := V \times_{\mathrm{Spec} R} \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{m}_A^{n+1})$$

このとき, deformation (V, R) は X_0 の miniversal deformation である.

versal deformation が具体的にわかることによって, X_0 の全ての deformation の具体的な形がわかる.

一般的な非特異平面四次曲線は 28 本の bitangent を持つことが知られている. 最後に, Fermat quartic のある 1 変数の deformation によって, Fermat quartic の bitangent の数がどのように変化するかを調べる.

2 Versal deformation

2.1 Deformation

k を代数閉体, X_0 を k 上のスキーム, A を完備 Noether 局所 k 代数で剰余体が k であるもの, $A_n := A/\mathfrak{m}_A^{n+1}$ とする.

Definition Deformation of a scheme ([7] Definition 6.1)

deformation (X, A) とはスキームの族 $X = \{X_n\}$ と完備 Noether 局所 k 代数で剰余体が k である環 A で, 各 $n \geq 0$ に対し A_n 上 flat and of finite type なスキーム X_n と closed embedding $X_{n-1} \hookrightarrow X_n$ で同型 $X_{n-1} \simeq X_n \times_{\mathrm{Spec}A_n} \mathrm{Spec}A_{n-1}$ を導くものから成る. X は X_0 の A 上の abstract deformation, または deformation であるという.

X, X' がともに A 上の $X_0 = X_0'$ の deformation のとき, $\phi\colon X \simeq X'$ が同型とは, 各 $n \geq 0$ に対し $\phi_n\colon X_n \simeq X_n'$ であって $\phi_n|_{X_{n-1}} = \phi_{n-1}$, さらに $\phi_0\colon X_0 \to X_0$ は恒等写像であるものとする.

2.2 Functor of Artin rings

$\mathcal{C}$ を局所 Artin 環の圏, $\widehat{\mathcal{C}}$ を完備 Noether 局所 k 代数で剰余体が k であるものの圏, F を $\mathcal{C}$ から (Sets) への covariant functor とする.

$R \in \widehat{\mathcal{C}}$ とするとき, $\varprojlim F(R/\mathfrak{m}^n)$ の元と covariant functor の射 $\mathrm{Hom}_k(R, -) \to F$ の間に一対一の対応がある.

Definition Smooth morphism ([2] p.108 Definition)

$G \to F$ を functor の射とする. 任意の $A \in \mathcal{C}$ に対し, $G(A) \to F(A)$ は全射で, さらに任意の $A, B \in \mathcal{C}$ と全射 $B \to A$ に対し $G(B) \to G(A) \times_{F(A)} F(B)$ が全射であるとき, functor の射 $G \to F$ は smooth であるという.

$A \in \mathcal{C}$ に対し集合 $\mathrm{Def}(X_0)(A)$=$\{$isom. classes of deformations of $X_0/A\}$ を対応させる functor を F とすると, X_0 の $R \in \widehat{\mathcal{C}}$ 上の deformation X は射 $\mathrm{Hom}_k(R, -) \to \mathrm{Def}(X_0)$ を与える. この射が smooth のとき, X を versal deformation という.

とくに, $D := k[t]/t^2$ とするとき, $\mathrm{Hom}_k(R, D) \to \mathrm{Def}(X_0)(D)$ が全単射ならば, X を miniversal deformation という.

3 Embedded and abstract deformation

$X_0 = \mathrm{V}(f) \hookrightarrow \mathbb{P}^2_k = \operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2]$ を n 次の非特異平面曲線とする. 下の図を可換にする X を X_0 の R 上の embedded deformation という.

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathbb{P}^2_R \\ \uparrow & & \uparrow \\ X_0 & \hookrightarrow & \mathbb{P}^2_k \end{array}$$

X_0 の embedded deformation の同値類の集合から abstract deformation の同値類の集合への写像がある. この写像の全射性について調べる. これは $D = k[t]/t^2$ 上で調べれば十分である.

exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathscr{T}_{X_0} \longrightarrow \mathscr{T}_{\mathbb{P}^2_k}|_{X_0} \longrightarrow \mathscr{N}_{X_0} \longrightarrow 0$$

より, cohomology をとって

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathscr{T}_{X_0}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathscr{T}_{\mathbb{P}^2_k}|_{X_0}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathscr{N}_{X_0}) \\ &\longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathscr{T}_{X_0}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathscr{T}_{\mathbb{P}^2_k}|_{X_0}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathscr{N}_{X_0}) \longrightarrow 0 \quad \text{(exact)} \end{aligned}$$

D 上では embedded deformation の同値類は $\mathrm{H}^0(\mathscr{N}_{X_0})$ の元と, abstract deformation の同値類は $\mathrm{H}^1(\mathscr{T}_{X_0})$ の元と一対一に対応している. そこで, $\mathrm{H}^1(\mathscr{T}_{\mathbb{P}^2_k}|_{X_0}) = \mathrm{H}^0(\Omega_{\mathbb{P}^2_k}(n-3)|_{X_0})^\vee$ について調べる.

exact sequence

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2_k}(n-3)|_{X_0} \longrightarrow \mathscr{O}_{X_0}(n-4)^3 \longrightarrow \mathscr{O}_{X_0}(n-3) \longrightarrow 0$$

より,

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(\Omega_{\mathbb{P}^2_k}(n-3)|_{X_0}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{X_0}(n-4)^3) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{X_0}(n-3)) \longrightarrow \dots$$

$n \leq 3$ のとき, $\mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{X_0}(n-4)^3) = 0$, また $n = 4$ のとき, $\mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{X_0})^3 \to \mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{X_0}(1))$ は単射. よってこれらの場合 $\mathrm{H}^0(\Omega_{\mathbb{P}^2_k}(n-3)|_{X_0}) = 0$. $n \geq 5$ のときは, $\mathrm{H}^0(\Omega_{\mathbb{P}^2_k}(n-3)|_{X_0}) \neq 0$ がわかる.

よって, $n \leq 4$ のとき, $\mathrm{H}^0(\mathscr{N}_{X_0}) \to \mathrm{H}^1(\mathscr{T}_{X_0})$ は全射で, X_0 の deformation は全て embedded であることがわかる.

4 Deformation of local complete intersections

local complete intersection の deformation についての結果を準備する．以下は [7] による．

4.1 Obstruction space

(X, A) を X_0 の Artin 環 A 上の deformation とする．A の small extension とは，Artin 環の全射 $A' \to A$ で kernel $\mathfrak{a}$ が長さ 1 であるものとする．

Definition Abstract lifting ([7] Definition 4.2)

X の A' への abstract lifting とは，A' 上 flat なスキーム X' と，embedding $X \hookrightarrow X'$ で同型 $X \simeq X' \times_{\mathrm{Spec}A'} \mathrm{Spec}A$ を導くものとする．

Proposition 4.1 ([7] Theorem 4.4)

上の deformation (X, A) と small extension $A' \to A$ に対してある元

$$\omega_{\mathrm{abs}}(X) \in \mathfrak{a} \otimes_k \mathrm{Ext}^2_{\mathscr{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0}, \mathscr{O}_{X_0}) \simeq \mathrm{Ext}^2_{\mathscr{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0}, \mathscr{O}_{X_0})$$

が存在して，$\omega_{\mathrm{abs}} = 0 \Leftrightarrow X$ の A' への abstract lifting が存在する．

Definition Obstruction space ([7] Definition 6.5)

X_0 の obstruction space $\mathrm{Obs}\, X_0$ とは全ての deformation (X, A) と全ての small extension $A \to A'$ に対する $\omega_{\mathrm{abs}} \in \mathrm{Ext}^2_{\mathscr{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0}, \mathscr{O}_{X_0})$ が生成する $\mathrm{Ext}^2_{\mathscr{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0}, \mathscr{O}_{X_0})$ の部分空間のこととする．

$$\mathrm{Obs}\, X_0 =< \omega_{\mathrm{abs}} | \text{all } (X, A), \text{all } A' \to A >\subset \mathrm{Ext}^2_{\mathscr{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0}, \mathscr{O}_{X_0})$$

$\mathrm{Obs}\, X_0 = 0$ のとき，X_0 は unobstructed であるという．

4.2 Kodaira-Spencer map

X_0 は k 上の local complete intersection とする．X_0 の Artin 環 A 上の embedded deformation を X'_1, X'_2，対応する $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2_A}$ のイデアル $\mathcal{I}'_1, \mathcal{I}'_2$ とする．X_0 のイデアル $\mathcal{I}_0$ の元 f を，f の二つのイデアルへのリフト f_1, f_2 の差 $f_1 - f_2$ の $\mathfrak{m}_A \otimes_k \mathscr{O}_{X_0}$ への像に写す写

像が定義できる. これを

$$\nu(X_1', X_2') : \mathcal{I} \to \mathfrak{m}_A \otimes_k \mathscr{O}_{X_0}$$

とかく. これは $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2_k}}(\mathcal{I}, \mathfrak{m}_A \otimes_k \mathscr{O}_{X_0}) = \mathfrak{m}_A \otimes_k \mathrm{H}^0(\mathscr{N}_{X_0})$ の元である.

Proposition 4.2 ([7] Proposition 4.11)

X_0 の Artin 環 A 上の abstract deformation X_1', X_2' に対し, well-defined な元

$$e(X_1', X_2') \in \mathfrak{m}_A \otimes_k \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0/k}, \mathscr{O}_{X_0})$$

が存在して次を満たす.

(a) $e(X_1', X_2') = 0 \Leftrightarrow X_1', X_2'$ は同型.

(b) X_1', X_2', X_3' を X_0 の abstract deformation とするとき, $e(X_1', X_2') + e(X_2', X_3') = e(X_1', X_3')$.

(c) X_1', X_2' が embedded のとき, $e(X_1', X_2') = \partial\nu(X_1', X_2')$ ここに

$$\partial : \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2, \mathfrak{m}_A \otimes_k \mathscr{O}_{X_0}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0}, \mathfrak{m}_A \otimes_k \mathscr{O}_{X_0})$$

は exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_0/\mathcal{I}_0^2 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2_k}|_{X_0} \longrightarrow \Omega_{X_0} \longrightarrow 0$$

からくる写像.

次に, A を完備 Noether 局所 k 代数で剰余体が k であるものとし, (X, A) を X_0 の A 上の deformation とする. このとき, X_1 と $X_0 \times_{\mathrm{Spec}k} \mathrm{Spec}A_1$ は X_0 の $A_1 = A/\mathfrak{m}_A^2$ 上の deformation である.

Definition Kodaira-Spencer map ([7] Definition 6.9)

$$\begin{aligned} \mathrm{k}_X = e(X_1, X_0 \times_{\mathrm{Spec}k} \mathrm{Spec}A_1) &\in (\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2) \otimes_k \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0}, \mathscr{O}_{X_0}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}((\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2)^\vee, \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0}, \mathscr{O}_{X_0})) \end{aligned}$$

を X の Kodaira-Spencer class という.

対応する linear map $\mathrm{K}_X : (\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2)^\vee \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0}, \mathscr{O}_{X_0})$ を Kodaira-Spencer map という.

次の命題を使って versal deformation を計算する.

Proposition 4.3 ([7] Corrolary 7.16)
X_0 は unobstructed とする. このとき, X_0 の deformation (X, A) は miniversal deformation $\Leftrightarrow$ A は formal power series ring で, Kodaira-Spencer map $\mathrm{K}_X : (\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2)^\vee \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0}, \mathscr{O}_{X_0})$ は同型写像.

5 Proof of the theorem

X_0 は 1 次元なので, $\mathrm{Obs}\, X_0 \subset \mathrm{Ext}^2_{\mathscr{O}_{X_0}}(\Omega_{X_0}, \mathscr{O}_{X_0}) = 0$ であって X_0 は unobstructed. したがって Proposition 4.3 より, (V, R) の Kodaira-Spencer map が同型であることを見ればよい. cohomology の完全列は,

$$\mathrm{H}^0(\mathscr{T}_{\mathbb{P}^2_k}|_{X_0}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathscr{N}_{X_0}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathscr{T}_{X_0}) \longrightarrow 0$$

だった. (V, R) の Kodaira-Spencer class

$$\mathrm{k}_V = e(V_1, X_0 \times_{\mathrm{Spec} k} \mathrm{Spec} R_1) \in (\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2) \otimes_k \mathrm{H}^1(\mathscr{T}_{X_0})$$

は Proposition 4.2 (c) より

$$\nu(V_1, X_0 \times_{\mathrm{Spec} k} \mathrm{Spec} R_1) \in (\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2) \otimes_k \mathrm{H}^0(\mathscr{N}_{X_0})$$

の $(\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2) \otimes_k \mathrm{H}^0(\mathscr{N}_{X_0}) \to (\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2) \otimes_k \mathrm{H}^1(\mathscr{T}_{X_0})$ による像である. 今, X_0 は平面曲線なので, $\mathrm{H}^0(\mathscr{N}_{X_0}) = \mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{X_0}(d))$ であって, $\mathrm{H}^0(\mathscr{N}_{X_0})$ の元は f の像で決まる. f の V_1 のイデアルへのリフトとしては F, $X_0 \times_{\mathrm{Spec} k} \mathrm{Spec} R_1$ のイデアルへのリフトとしては f がとれる. よって $\mathrm{k}_V = e(V_1, X_0 \times_{\mathrm{Spec} k} \mathrm{Spec} R_1)$ は

$$F - f = \sum_{i=1}^{\mu} t_i\, g_i \in (\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2) \otimes_k \mathrm{H}^0(\mathscr{N}_{X_0})$$

の $(\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2) \otimes_k \mathrm{H}^1(\mathscr{T}_{X_0})$ への像である. 今, $\mathrm{H}^0(\mathscr{T}_{\mathbb{P}^2_k}|_{X_0}) \to \mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{X_0}(d))$ の像は $x_i f_{x_j}$ $(0 \le i, j \le 2)$ の生成するイデアルなので, g_i のとりかたにより, この元が定める Kodaira-Spencer map は同型写像. よって (V, R) は miniversal deformation である. $\square$

Remark 5.1
上の証明では X_0 のイデアルの生成元が一つ, $\mathrm{H}^0(\mathscr{N}_{X_0}) \to \mathrm{H}^1(\mathscr{T}_{X_0})$ は全射, X_0 は unobstructed であれば良かった. したがってより一般に次が成り立つ.

Generalization of main theorem

$X_0 = \mathrm{V}(f) \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k = \mathrm{Proj}\, k[x_0, \dots, x_n]$ を d 次の非特異超曲面で, $\mathrm{H}^0(\mathscr{N}_{X_0}) \to \mathrm{H}^1(\mathscr{T}_{X_0})$ は全射, さらに X_0 は unobstructed とする. $x_i f_{x_j}$ $(0 \leq i, j \leq n)$ の生成する $k[x_0, \dots, x_n]$ のイデアルを J とする. $\mu := \dim_k (k[x_0, \dots, x_n]/J)_{d\text{ 次部分}}$ とおく. $g_1, \dots, g_\mu$ を d 次斉次多項式で, $k[x_0, \dots, x_n]/J$ への像が $(k[x_0, \dots, x_n]/J)_{d\text{ 次部分}}$ の k 上のベクトル空間としての基底となっているものとする.

X_0 の deformation (V, R) を次で定める.

$$R := k[[t_1, \dots, t_\mu]]\ ,\ F := f + \sum_{i=1}^{\mu} t_i\, g_i$$
$$V := \mathrm{V}(F) \hookrightarrow \mathbb{P}^n_R\ ,\ V_m := V \times_{\mathrm{Spec} R} \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{m}_A^{m+1})\ (m \geq 0)$$

このとき, deformation (V, R) は X_0 の miniversal deformation である.

Remark 5.2

X_0 は $\mathbb{P}^n_k$ の d 次の超曲面とする. $n \geq 3, d \geq 2$ のときは, $(n, d) = (3, 4)$ のときを除いて X_0 は unobstructed で, $\mathrm{H}^0(\mathscr{N}_{X_0}) \to \mathrm{H}^1(\mathscr{T}_{X_0})$ は全射であることがわかっている ([5] Examples 3.2.11.(i)). よってこのときも定理の方法で miniversal deformation が計算できる. $(n, d) = (3, 4)$ のときは $\mathrm{H}^0(\mathscr{N}_{X_0}) \to \mathrm{H}^1(\mathscr{T}_{X_0})$ は全射ではなく, このとき, embedded deformation でない deformation が存在するので, 定理の方法で miniversal deformation の計算はできない.

$n = 2, d \geq 5$ のときも $\mathrm{H}^0(\mathscr{N}_{X_0}) \to \mathrm{H}^1(\mathscr{T}_{X_0})$ は全射ではないので同様に定理の方法で miniversal deformation の計算はできない.

6 Example

6.1 Miniversal deformation of Fermat quartic

X_0 が $f = x^4 + y^4 + z^4$ の定める $\mathrm{V}(f) \hookrightarrow \mathbb{P}^2_k = \mathrm{Proj}\, k[x, y, z]$ のとき, 定理のイデアル J は

$$\begin{aligned} J &= \{x f_x, y f_x, z f_x, x f_y, y f_y, z f_y, x f_z, y f_z, z f_z\} \\ &= \{4x^4, 4x^3 y, 4x^3 z, 4xy^3, 4y^4, 4y^3 z, 4xz^3, 4yz^3, 4yz^3, 4z^4\} \end{aligned}$$

となり, したがって

$$\mathrm{H}^1(\mathscr{T}_{X_0}) \simeq \left(\frac{k[x,y,z]}{(x^4, x^3y, x^3z, xy^3, y^4, y^3z, xz^3, yz^3, z^4)}\right)_{4\text{ 次部分}}$$

である. この k ベクトル空間の基底としては J の生成元に現れない単項式をとればよい. よって,

$$\begin{aligned}
&g_1 = x^2y^2, \quad g_2 = x^2z^2, \quad g_3 = y^2z^2 \\
&g_4 = x^2yz, \quad g_5 = xy^2z, \quad g_6 = xyz^2 \qquad \text{として} \\
&R := k[[t_1, \ldots, t_6]]\ ,\ F := f + \sum_{i=1}^{\mu} t_i\, g_i \\
&V := \mathrm{V}(F) \hookrightarrow \mathbb{P}^2_R\ ,\ V_n := V \times_{\mathrm{Spec}R} \mathrm{Spec}(R/\mathfrak{m}_A^{n+1})
\end{aligned}$$

とおくと (V, R) が X_0 の miniversal deformation である.

6.2 Deformation of Fermat quartic and its 16 bitangents

一般的な非特異平面四次曲線の inflection point の数は 24 個であり, また, 一般的な非特異平面四次曲線は 28 本の bitangent を持つことが知られている ([1] Exercise 2.3).

tangent の intersection multiplicity が 3 である inflection point の数を i_3, bitangent の数を l とすると $l = 16 + \frac{1}{2}i_3$ が成り立つ ([3] Section 1.5 Exercise 3). Fermat quartic の inflection point の数は 12 個である ([3] Section 1.5 Exercise 3). tangent の intersection multiplicity が 4 である inflection point の数を i_4 とすると, inflection point の数については intersection multiplicity を考慮して $2i_4 + i_3 = 24$ が成り立ち, また Fermat quartic の場合, 実際の点の数を数えて $i_4 + i_3 = 12$ も成り立っている. すなわち $i_4 = 12, i_3 = 0$ であって, 上の式で $i_3 = 0$ より Fermat quartic は $l = 16$ 本の bitangent を持っている. 式 $l = 16 + \frac{1}{2}i_3$ の形を見ると, Fermat quartic の bitangent の数は非特異平面四次曲線の持つ bitangent の数としては最小であることがわかる.

よって, Fermat quartic の deformation によって bitangent は 16 本から増加していき, 一般的な曲線が得られたとき 28 本になるということが考えられる. 以下では, Fermat quartic の miniversal deformation で得られる一変数の deformation について, bitangent の増え方を, inflection point の増え方を見ることによって調べる.

(A) $F = x^4 + y^4 + z^4 + tx^2y^2$ **のとき**

$F := x^4 + y^4 + z^4 + tx^2y^2, f := x^4 + y^4 + z^4$ とおく. F の inflection point は Mathematica で計算してみると 20 個あることがわかる (Appendix 9.1). tangent の intersection multiplicity が 4 である inflection point の数を i_4, tangent の intersection multiplicity が 3 である inflection point の数を i_3 とすると, inflection point を intersection multiplicity を考慮して数えて $2i_4 + i_3 = 24$, 実際の inflection point の数を数えて $i_4 + i_3 = 20$ が成り立つので $i_4 = 4, i_3 = 16$ である. このとき bitangent の数 l は $l = 16 + 8 = 24$ 本に増えている.

	i_4	i_3	l
$f = x^4 + y^4 + z^4$	12	0	16
$F = x^4 + y^4 + z^4 + tx^2y^2$	4	16	24

F の 24 の bitangent については, (i) F の bitangent で $t = 0$ のとき f の bitangent になっているもの, そして (ii) F の bitangent で $t = 0$ のとき f の intersection multiplicity が 4 の tangent になっているものに分類できる. inflection point についても (iii) i_4, (iv) i_3 の二種類が考えられる. これらに対応する dual curve の特異点を調べて以下で実際に分類を決定する.

Singular で dual curve の方程式を求めてヤコビアンイデアルの準素分解を取ったのが Appendix 9.2 である. これらの dual curve の特異点は次のように分類できる.

(i) deformation の bitangent で, $t = 0$ のときも Fermat quartic の bitangent になっているものの接点に対応する特異点 (Appendix 9.3)

[2],[3],[6] イデアルからでてくる特異点を計算し, それらのうち一つをとって dual map の逆像が $t = 0$ のとき何点あるか調べたのが Appendix 9.3 である. これをみるとこの点は $t = 0$ のとき dual map の逆像が 2 点あることから f の dual curve の node になっている. したがって $t \neq 0$ のときの F の dual curve の特異点も node である. 他の点も同様で, これは 16 個ある.

(ii) deformation の bitangent で, $t = 0$ のとき Fermat quartic の intersection multiplicity が 4 である tangent になるものの接点に対応する特異点 (Appendix 9.4)

[1],[7] から特異点が 4 点ずつ出てくるが, Appendix の計算によるとこれらの特異点は $t = 0$ のとき [1],[7] とも同じ点で, Fermat quartic の inflection point であり, $t \neq 0$ のときは dual map の逆像が 2 点あることから node になっている. よってこれら 8 個の点が増加した分の bitangent を与えている.

(iii) deformation の inflection point で tangent の intersection multiplicity が 4 の点に

対応する特異点 (Appendix 9.5)

5 番目のイデアルからは 4 点が得られるが, このうち一つの点での tangent を計算すると, F との交点は 1 点であることがわかる (Appendix 9.5). したがってこの点の tangent の intersection multiplicity は 4 である. 他の点も同様.

(iv) deformation の inflection point で tangent の intersection multiplicity が 3 の点に対応する特異点 (Appendix 9.6)

4 番目のイデアルに出てくる 16 個の点が残るこの場合に当たる.

(B) $F = x^4 + y^4 + z^4 + tx^2yz$ **のとき**

$x^4 + y^4 + z^4 + tx^2yz$ の inflection point は Mathematica で計算してみるとすでに 24 個あることがわかる (Appendix 9.7). Singular では dual curve の計算はできなかったが, 24 個の inflection point はすべて tangent の intersection multiplicity が 3 である inflection point で, bitangent の数 l は $l = 16 + 12 = 28$ 本と, 非特異平面四次曲線の持つ bitangent の数としては最大になっていることがわかる.

inflection point と bitangent の数についてまとめると次のようになる.

	i_4	i_3	l
$x^4 + y^4 + z^4$	12	0	16
$x^4 + y^4 + z^4 + tx^2y^2$	4	16	24
$x^4 + y^4 + z^4 + tx^2yz$	0	24	28

7 Acknowledgements

本論文の執筆にあたり, 毎週のセミナーに加えて何度も私の質問に答えて頂いた指導教員の栂元先生に感謝致します. また, 私の訪問を受け入れてくださり, bitangent を調べることについて助言して頂いた東海大学の那須弘和先生にもお礼申し上げます.

8 References

[1] R. Hartshorne, ”Algebraic geometry”, Graduate Texts in Mathematics, 52. Springer-Verlag, 1977

[2] R. Hartshorne, "Deformation theory", Graduate Texts in Mathematics, 257. Springer, 2010

[3] N. Namba, "Geometry of algebraic projective curves", Marcel Dekkers INC, New York and Basel, 1984

[4] M. Schlessinger, "Functors of Artin rings", Trans. Amer. Math. Soc. 130, 208–222, 1968

[5] E. Sernesi, "Deformations of algebraic schemes", Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 334, Springer-Verlag, Berlin, 2006

[6] J. Stevens, "Computing versal deformations", Experiment. Math. 4, no. 2, 129–144, 1995

[7] A. Vistoli, "The deformation theory of local complete intersections", arXiv:math.AG/9703008.

9 Appendix

9.1 $F = x^4 + y^4 + z^4 + tx^2y^2$ の inflection point

Mathematica で $F = x^4 + y^4 + z^4 + tx^2y^2$ の inflection point を計算する. まずは F のヘッシアンを計算すると,

```
Det[D[x^4 + y^4 + z^4 + t * x^2 * y^2, {{x, y, z}, 2}]]
```

$$12\left(24\,t\,x^4+144\,x^2\,y^2-12\,t^2\,x^2\,y^2+24\,t\,y^4\right)z^2$$

となる. この式ともとの F とを連立すると inflection point が得られる.

```
Reduce[{% == 0, x^4 + y^4 + z^4 + t * x^2 * y^2 == 0}, {x, y, z}]
```

$$\Bigg(\Bigg(y==-\frac{\sqrt{-t\,x^2-\sqrt{-4+t^2}\,x^2}}{\sqrt{2}}\;||\;y==\frac{\sqrt{-t\,x^2-\sqrt{-4+t^2}\,x^2}}{\sqrt{2}}\;||$$

$$y==-\frac{\sqrt{-t\,x^2+\sqrt{-4+t^2}\,x^2}}{\sqrt{2}}\;||\;y==\frac{\sqrt{-t\,x^2+\sqrt{-4+t^2}\,x^2}}{\sqrt{2}}\Bigg)\;\&\&\;z==0\Bigg)\;||$$

$$\left(t==0\;\&\&\;x==0\;\&\&\;\left(z==-(-1)^{1/4}\,y\;||\;z==(-1)^{1/4}\,y\;||\;z==-(-1)^{3/4}\,y\;||\;z==(-1)^{3/4}\,y\right)\right)\;||$$

$$\Bigg(t\neq 0\;\&\&\;\Bigg(y==-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{12\,x^2}{t}+t\,x^2-\frac{\sqrt{144-40\,t^2+t^4}\,x^2}{t}}\;||$$

$$y==\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{12\,x^2}{t}+t\,x^2-\frac{\sqrt{144-40\,t^2+t^4}\,x^2}{t}}\;||$$

$$y==-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{12\,x^2}{t}+t\,x^2+\frac{\sqrt{144-40\,t^2+t^4}\,x^2}{t}}\;||$$

$$y==\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{12\,x^2}{t}+t\,x^2+\frac{\sqrt{144-40\,t^2+t^4}\,x^2}{t}}\Bigg)\;\&\&$$

$\left(z == -\left(-x^4 - t\,x^2\,y^2 - y^4\right)^{1/4} \mid\mid z == -\mathbb{i}\,\left(-x^4 - t\,x^2\,y^2 - y^4\right)^{1/4} \mid\mid\right.$

$\left.\quad z == \mathbb{i}\,\left(-x^4 - t\,x^2\,y^2 - y^4\right)^{1/4} \mid\mid z == \left(-x^4 - t\,x^2\,y^2 - y^4\right)^{1/4}\right)\right) \mid\mid$

$\left(t == 0\ \&\&\ x \neq 0\ \&\&\ y == 0\ \&\&\right.$

$\quad \left(z == -(-x^4)^{1/4} \mid\mid z == -\mathbb{i}\,(-x^4)^{1/4} \mid\mid z == \mathbb{i}\,(-x^4)^{1/4} \mid\mid z == (-x^4)^{1/4}\right)\right)$

よって, $t \neq 0$ のとき $F = x^4 + y^4 + z^4 + tx^2y^2$ は 20 個の inflection point を持っている.

9.2 $F = x^4 + y^4 + z^4 + tx^2y^2$ の dual curve の特異点

$x^4 + y^4 + z^4 + tx^2y^2$ の dual curve を Singular で求める.

> ring R=(0,t),(x,y,z,p,q,r),wp(1,1,1,3,3,3);
> poly F=x4+y4+z4+tx2y2;
> poly f1=diff(F,x)-p;
> poly f2=diff(F,y)-q;
> poly f3=diff(F,z)-r;
> poly f4=px+qy+rz;
> ideal i=f1,f2,f3,f4;
> ideal i1=eliminate(i,x);
> ideal i2=eliminate(i1,y);
> ideal i3=eliminate(i2,z);
> poly d=i3[1];

$f1, \ldots, f4$ から x, y, z を消去した d が F の dual curve を与える方程式である. このヤコビアンイデアルを準素分解すると,

> ideal j=jacob(d);
> LIB"primdec.lib";
// ** loaded /usr/share/Singular/LIB/primdec.lib (14732,2012-03-30)
// ** loaded /usr/share/Singular/LIB/ring.lib (15322,2012-10-12)
// ** loaded /usr/share/Singular/LIB/absfact.lib (14191,2011-05-04)
// ** loaded /usr/share/Singular/LIB/triang.lib (13499,2010-10-15)
// ** loaded /usr/share/Singular/LIB/matrix.lib (13658,2010-11-16)
// ** loaded /usr/share/Singular/LIB/nctools.lib (14246,2011-05-26)
// ** loaded /usr/share/Singular/LIB/inout.lib (13499,2010-10-15)
// ** loaded /usr/share/Singular/LIB/random.lib (14661,2012-03-05)

```
// ** loaded /usr/share/Singular/LIB/poly.lib (14852,2012-04-30)
// ** loaded /usr/share/Singular/LIB/elim.lib (14661,2012-03-05)
// ** loaded /usr/share/Singular/LIB/general.lib (14191,2011-05-04)
> primdecGTZ(j);
[1]:
   [1]:
      _[1]=4*q4+(-t2+4)*r4
      _[2]=p
[2]:
   [1]:
      _[1]=(t+2)*q4+(t-2)*r4
      _[2]=p-q
   [2]:
      _[1]=(t+2)*q4+(t-2)*r4
      _[2]=p-q
[3]:
   [1]:
      _[1]=(t-2)*q4+(t+2)*r4
      _[2]=p2+q2
   [2]:
      _[1]=(t-2)*q4+(t+2)*r4
      _[2]=p2+q2
[4]:
   [1]:
      _[1]=(8503056t8-136048896t6+816293376t4-2176782336t2+2176782336)*q16+(1574
64t10+9447840t8-196515072t6+1350411264t4-3990767616t2+4353564672)*q12r4+(729t12+
192456t10+1574640t8-67371264t6+549234432t4-1813985280t2+2176782336)*q8r8+(864t12
+58752t10-622080t8+1492992t6)*q4r12+(256t12)*r16
      _[2]=(-944784t12+50388480t10-1103507712t8+10642046976t6-50388480000t4+1160
95057920t2-104485552128)*q14+(-17496t14-209952t12+48988800t10-1445589504t8+16182
540288t6-85297618944t4+214775857152t2-208971104256)*q10r4+(-81t16-14904t14+72316
8t12-1233792t10-391412736t8+5916727296t6-35634733056t4+98680799232t2-
104485552128)*q6r8+(256t15-19456t13+405504t11-1327104t9)*p2r12+(-80t16-
```

320t14+259584t12-746 4960t10+52752384t8-107495424t6)*q2r12

_[3]=(314928t8-7558272t6+60466176t4-201553920t2+241864704)*q12+(5832t10+209952t8-9517824t6+94804992t4-362797056t2+483729408)*q8r4+(432t11-34560t9+815616t7-4976640t5+8957952t3)*p2q2r8+(27t12+4320t10-30672t8-2654208t6+36018432t4-161243136t2+241864704)*q4r8+(48t12-1984t10+29952t8-82944t6)*r12

_[4]=(-5832t5+46656t3-93312t)*q10+(81t8-3672t6+63936t4-342144t2+559872)*p2q4r4+(-270t7-216t5+28512t3-93312t)*q6r4+(16t8-192t6)*p2r8+(4t9-400t7+6336t5-20736t3)*q2r8

_[5]=(1458t6-29160t4+163296t2-279936)*p2q6+(-2916t5+23328t3-46656t)*q8+(432t6-1728t4)*p2q2r4+(81t7-3564t5+24624t3-46656t)*q4r4+(16t7)*r8

_[6]=(36t)*p4+(-18t2+216)*p2q2+(36t)*q4+(-t3+36t)*r4

[2]:

_[1]=(2916t4-23328t2+46656)*q8+(27t6+1836t4-19440t2+46656)*q4r4+(16t6)*r8

_[2]=(-108t2+432)*q6+(8t3)*p2r4+(-t4-72t2+432)*q2r4

_[3]=(27t2-108)*p2q2+(2t3)*r4

_[4]=(108t2-432)*p4+(108t2-432)*q4+(t4+72t2-432)*r4

[5]:

[1]:

_[1]=r3

_[2]=p8+(2t)*p6q2+(t2+2)*p4q4+(2t)*p2q6+q8

[2]:

_[1]=r

_[2]=p4+(t)*p2q2+q4

[6]:

[1]:

_[1]=(t+2)*q4+(t-2)*r4

_[2]=p+q

[2]:

_[1]=(t+2)*q4+(t-2)*r4

_[2]=p+q

[7]:

[1]:

_[1]=q

_[2]=4*p4+(-t2+4)*r4

[2]:

_[1]=q

_[2]=4*p4+(-t2+4)*r4

[8]:

[1]:

. . .（中略）

[2]:

_[1]=r

_[2]=q

_[3]=p

射影スキームの特異点を考えるには [1] から [7] までのイデアルにでてくる素イデアルを調べればよい.

9.3 [2],[3],[6]

[2] の計算.

Reduce[{(t+2)*q^4+(t-2)*r^4 == 0, p-q == 0}, {p, q, r}]

$$\left(q == p \,\&\&\, -2+t \neq 0 \,\&\&\, \left(r == -\frac{(-2p^4-p^4t)^{1/4}}{(-2+t)^{1/4}} \,||\, r == -\frac{i\,(-2p^4-p^4t)^{1/4}}{(-2+t)^{1/4}} \,||\, r == \frac{i\,(-2p^4-p^4t)^{1/4}}{(-2+t)^{1/4}} \,||\, r == \frac{(-2p^4-p^4t)^{1/4}}{(-2+t)^{1/4}}\right)\right) \,||\, (t == 2 \,\&\&\, p == 0 \,\&\&\, q == 0)$$

Reduce$\left[\left\{\mathbf{4*x\hat{}3+2*t*x*y\hat{}2 == 1,\ 4*y\hat{}3+2*t*x\hat{}2*y == 1,\ 4*z\hat{}3 == \frac{(-2\ -t)^{1/4}}{(-2+t)^{1/4}},\ x+y+\frac{(-2\ -t)^{1/4}}{(-2+t)^{1/4}}*z == 0}\right\},\ \{\mathbf{x, y, z}\}\right]$

$$\Big(t == 0 \,\&\&\, x == \left(-\frac{1}{2}\right)^{2/3} \,\&\&\, y == \frac{1}{4}\, i \left(-(-1)^{1/6}\, 2^{1/3} + (-1)^{2/3}\, 2^{1/3} \sqrt{3}\right) \,\&\&$$
$$z == -\frac{1}{4}\, i \left((-1)^{1/6}\, 2^{1/3} + (-1)^{2/3}\, 2^{1/3} \sqrt{3}\right)\Big) \,||$$
$$\Big(t == 0 \,\&\&\, x == \left(-\frac{1}{2}\right)^{2/3} \,\&\&\, y == -\frac{1}{4}\, i \left((-1)^{1/6}\, 2^{1/3} + (-1)^{2/3}\, 2^{1/3} \sqrt{3}\right) \,\&\&$$
$$z == \frac{1}{4}\, i \left(-(-1)^{1/6}\, 2^{1/3} + (-1)^{2/3}\, 2^{1/3} \sqrt{3}\right)\Big) \,||$$
$$\Big(t == 0 \,\&\&\, x == \frac{1}{2^{2/3}} \,\&\&\, y == -\frac{1}{4}\, i \left(-i\, 2^{1/3} + 2^{1/3} \sqrt{3}\right) \,\&\&\, z == \frac{1}{4}\, i \left(i\, 2^{1/3} + 2^{1/3} \sqrt{3}\right)\Big) \,||$$
$$\Big(t == 0 \,\&\&\, x == \frac{1}{2^{2/3}} \,\&\&\, y == \frac{1}{4}\, i \left(i\, 2^{1/3} + 2^{1/3} \sqrt{3}\right) \,\&\&\, z == -\frac{1}{4}\, i \left(-i\, 2^{1/3} + 2^{1/3} \sqrt{3}\right)\Big) \,||$$
$$\Big(t == 0 \,\&\&\, x == -\frac{(-1)^{1/3}}{2^{2/3}} \,\&\&\, y == -\frac{1}{4}\, i \left((-1)^{5/6}\, 2^{1/3} - (-2)^{1/3} \sqrt{3}\right) \,\&\&$$
$$z == \frac{1}{4} \left((-2)^{1/3} - i\, (-2)^{1/3} \sqrt{3}\right)\Big) \,||\, \Big(t == 0 \,\&\&\, x == -\frac{(-1)^{1/3}}{2^{2/3}} \,\&\&$$
$$y == -\frac{1}{4}\, i \left((-1)^{5/6}\, 2^{1/3} + (-2)^{1/3} \sqrt{3}\right) \,\&\&\, z == \frac{1}{4} \left((-2)^{1/3} + i\, (-2)^{1/3} \sqrt{3}\right)\Big) \,||$$
$$\Big(t == 6 \,\&\&\, x == -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{1/3} \,\&\&\, y == -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{1/3} \,\&\&\, z == \frac{(-1)^{1/12}}{2^{7/12}}\Big) \,||$$

...(以下省略)

$$\mathbf{MatrixRank}\Big[\Big\{\Big\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2/3},$$
$$\frac{1}{4}\, i \left(-(-1)^{1/6}\, 2^{1/3} + (-1)^{2/3}\, 2^{1/3} \sqrt{3}\right),\ -\frac{1}{4}\, i \left((-1)^{1/6}\, 2^{1/3} + (-1)^{2/3}\, 2^{1/3} \sqrt{3}\right)\Big\},$$
$$\Big\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2/3},\ -\frac{1}{4}\, i \left((-1)^{1/6}\, 2^{1/3} + (-1)^{2/3}\, 2^{1/3} \sqrt{3}\right),$$
$$\frac{1}{4}\, i \left(-(-1)^{1/6}\, 2^{1/3} + (-1)^{2/3}\, 2^{1/3} \sqrt{3}\right)\Big\},$$
$$\Big\{\frac{1}{2^{2/3}},\ -\frac{1}{4}\, i \left(-i\, 2^{1/3} + 2^{1/3} \sqrt{3}\right),\ \frac{1}{4}\, i \left(i\, 2^{1/3} + 2^{1/3} \sqrt{3}\right)\Big\},$$
$$\Big\{\frac{1}{2^{2/3}},\ \frac{1}{4}\, i \left(i\, 2^{1/3} + 2^{1/3} \sqrt{3}\right),\ -\frac{1}{4}\, i \left(-i\, 2^{1/3} + 2^{1/3} \sqrt{3}\right)\Big\},$$
$$\Big\{-\frac{(-1)^{1/3}}{2^{2/3}},\ -\frac{1}{4}\, i \left((-1)^{5/6}\, 2^{1/3} - (-2)^{1/3} \sqrt{3}\right),\ \frac{1}{4} \left((-2)^{1/3} - i\, (-2)^{1/3} \sqrt{3}\right)\Big\},$$
$$\Big\{-\frac{(-1)^{1/3}}{2^{2/3}},\ -\frac{1}{4}\, i \left((-1)^{5/6}\, 2^{1/3} + (-2)^{1/3} \sqrt{3}\right),\ \frac{1}{4} \left((-2)^{1/3} + i\, (-2)^{1/3} \sqrt{3}\right)\Big\}\Big\}\Big]$$

2

[3] の計算.

$$\mathbf{Reduce[\{(t-2)*q^{\wedge}4+(t+2)*r^{\wedge}4==0,\ p^{\wedge}2+q^{\wedge}2==0\},\ \{p,\ q,\ r\}]}$$

$$(t==-2\ \&\&\ p==0\ \&\&\ q==0)\ ||$$
$$\left((q==-i\,p\ ||\ q==i\,p)\ \&\&\ 2+t\neq 0\ \&\&\ \left(r==-\frac{(2\,p^4-p^4\,t)^{1/4}}{(2+t)^{1/4}}\ ||\ r==-\frac{i\,(2\,p^4-p^4\,t)^{1/4}}{(2+t)^{1/4}}\ ||\right.\right.$$
$$\left.\left.r==\frac{i\,(2\,p^4-p^4\,t)^{1/4}}{(2+t)^{1/4}}\ ||\ r==\frac{(2\,p^4-p^4\,t)^{1/4}}{(2+t)^{1/4}}\right)\right)$$

$$\mathbf{Reduce\left[\left\{4*x^{\wedge}3+2*t*x*y^{\wedge}2==1,\ 4*y^{\wedge}3+2*t*x^{\wedge}2*y==i,\right.\right.}$$
$$\mathbf{\left.\left.4*z^{\wedge}3==\frac{(2\ -t)^{1/4}}{(2+t)^{1/4}},\ x+i*y+\frac{(2\ -t)^{1/4}}{(2+t)^{1/4}}*z==0\right\},\ \{x,\ y,\ z\}\right]}$$

$$\left(t==-6\ \&\&\ x==-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{1/3}\ \&\&\ y==\frac{(-1)^{5/6}}{2\times 2^{1/3}}\ \&\&\ z==\left(-\frac{1}{2}\right)^{7/12}\right)\ ||$$
$$\left(t==-6\ \&\&\ x==\frac{1}{2\times 2^{1/3}}\ \&\&\ y==-\frac{i}{2\times 2^{1/3}}\ \&\&\ z==-\frac{(-1)^{1/4}}{2^{7/12}}\right)\ ||$$
$$\left(t==-6\ \&\&\ x==\frac{(-1)^{2/3}}{2\times 2^{1/3}}\ \&\&\ y==\frac{(-1)^{1/6}}{2\times 2^{1/3}}\ \&\&\ z==-\frac{(-1)^{11/12}}{2^{7/12}}\right)\ ||$$
$$\left(t==0\ \&\&\ x==\left(-\frac{1}{2}\right)^{2/3}\ \&\&\ y==\frac{1}{4}\left(-(-1)^{1/6}\,2^{1/3}-(-1)^{2/3}\,2^{1/3}\sqrt{3}\right)\ \&\&\right.$$
$$\left.z==\frac{1}{4}\,i\left(-(-1)^{1/6}\,2^{1/3}+(-1)^{2/3}\,2^{1/3}\sqrt{3}\right)\right)\ ||\ \left(t==0\ \&\&\ x==\left(-\frac{1}{2}\right)^{2/3}\ \&\&\right.$$
$$\left.y==\frac{1}{4}\left(-(-1)^{1/6}\,2^{1/3}+(-1)^{2/3}\,2^{1/3}\sqrt{3}\right)\ \&\&\ z==-\frac{1}{4}\,i\left((-1)^{1/6}\,2^{1/3}+(-1)^{2/3}\,2^{1/3}\sqrt{3}\right)\right)\ ||$$
$$\left(t==0\ \&\&\ x==\frac{1}{2^{2/3}}\ \&\&\ y==\frac{1}{4}\left(i\,2^{1/3}-2^{1/3}\sqrt{3}\right)\ \&\&\ z==\frac{1}{4}\,i\left(i\,2^{1/3}+2^{1/3}\sqrt{3}\right)\right)\ ||$$
$$\left(t==0\ \&\&\ x==\frac{1}{2^{2/3}}\ \&\&\ y==\frac{1}{4}\left(i\,2^{1/3}+2^{1/3}\sqrt{3}\right)\ \&\&\ z==-\frac{1}{4}\,i\left(-i\,2^{1/3}+2^{1/3}\sqrt{3}\right)\right)\ ||$$
$$\left(t==0\ \&\&\ x==-\frac{(-1)^{1/3}}{2^{2/3}}\ \&\&\ y==\frac{1}{4}\left(-(-1)^{5/6}\,2^{1/3}-(-2)^{1/3}\sqrt{3}\right)\ \&\&\right.$$
$$\left.z==\frac{1}{4}\left((-2)^{1/3}+i\,(-2)^{1/3}\sqrt{3}\right)\right)\ ||\ \left(t==0\ \&\&\ x==-\frac{(-1)^{1/3}}{2^{2/3}}\ \&\&\right.$$
$$\left.y==\frac{1}{4}\left(-(-1)^{5/6}\,2^{1/3}+(-2)^{1/3}\sqrt{3}\right)\ \&\&\ z==\frac{1}{4}\left((-2)^{1/3}-i\,(-2)^{1/3}\sqrt{3}\right)\right)\ ||$$

$$\left((-2+t)\,(2+t)\,(6+t)\neq 0\ \&\&\ t\neq 0\ \&\&\ x == \frac{1}{2}\left(\frac{-8+2\,t+t^2-t\sqrt{-12+4\,t+t^2}}{-4+t^2}\right)^{1/3}\ \&\&\right.$$

$$y == \frac{1}{8}\,\mathrm{i}\left(2+t+\sqrt{-12+4\,t+t^2}\right)\left(\frac{-8+2\,t+t^2-t\sqrt{-12+4\,t+t^2}}{-4+t^2}\right)^{1/3}\ \&\&$$

$$z == -\frac{1}{8\,(-2+t)}\,(2-t)^{3/4}\,(2+t)^{1/4}$$

$$\left(-2\left(\frac{-8+2\,t+t^2-t\sqrt{-12+4\,t+t^2}}{-4+t^2}\right)^{1/3}+t\left(\frac{-8+2\,t+t^2-t\sqrt{-12+4\,t+t^2}}{-4+t^2}\right)^{1/3}+\right.$$

$$\left.\left.\sqrt{-12+4\,t+t^2}\left(\frac{-8+2\,t+t^2-t\sqrt{-12+4\,t+t^2}}{-4+t^2}\right)^{1/3}\right)\right)\ ||$$

. . . (以下省略)

MatrixRank[

$$\left\{\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2/3},\ \frac{1}{4}\left(-(-1)^{1/6}\,2^{1/3}-(-1)^{2/3}\,2^{1/3}\sqrt{3}\right),\ \frac{1}{4}\,\mathrm{i}\left(-(-1)^{1/6}\,2^{1/3}+(-1)^{2/3}\,2^{1/3}\sqrt{3}\right)\right\},\right.$$

$$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2/3},\ \frac{1}{4}\left(-(-1)^{1/6}\,2^{1/3}+(-1)^{2/3}\,2^{1/3}\sqrt{3}\right),\ -\frac{1}{4}\,\mathrm{i}\left((-1)^{1/6}\,2^{1/3}+(-1)^{2/3}\,2^{1/3}\sqrt{3}\right)\right\},$$

$$\left\{\frac{1}{2^{2/3}},\ \frac{1}{4}\left(\mathrm{i}\,2^{1/3}-2^{1/3}\sqrt{3}\right),\ \frac{1}{4}\,\mathrm{i}\left(\mathrm{i}\,2^{1/3}+2^{1/3}\sqrt{3}\right)\right\},$$

$$\left\{\frac{1}{2^{2/3}},\ \frac{1}{4}\left(\mathrm{i}\,2^{1/3}+2^{1/3}\sqrt{3}\right),\ -\frac{1}{4}\,\mathrm{i}\left(-\mathrm{i}\,2^{1/3}+2^{1/3}\sqrt{3}\right)\right\},$$

$$\left\{-\frac{(-1)^{1/3}}{2^{2/3}},\ \frac{1}{4}\left(-(-1)^{5/6}\,2^{1/3}-(-2)^{1/3}\sqrt{3}\right),\ \frac{1}{4}\left((-2)^{1/3}+\mathrm{i}\,(-2)^{1/3}\sqrt{3}\right)\right\},$$

$$\left.\left\{-\frac{(-1)^{1/3}}{2^{2/3}},\ \frac{1}{4}\left(-(-1)^{5/6}\,2^{1/3}+(-2)^{1/3}\sqrt{3}\right),\ \frac{1}{4}\left((-2)^{1/3}-\mathrm{i}\,(-2)^{1/3}\sqrt{3}\right)\right\}\right\}\Big]$$

2

[6] の計算.

Reduce[{(t + 2) * q^4 + (t - 2) * r^4 == 0, p + q == 0}, {p, q, r}]

$$\left(q == -p\ \&\&\ -2+t\neq 0\ \&\&\ \left(r == -\frac{(-2\,p^4-p^4\,t)^{1/4}}{(-2+t)^{1/4}}\ ||\ r == -\frac{\mathrm{i}\,(-2\,p^4-p^4\,t)^{1/4}}{(-2+t)^{1/4}}\ ||\right.\right.$$

$$\left.\left.r == \frac{\mathrm{i}\,(-2\,p^4-p^4\,t)^{1/4}}{(-2+t)^{1/4}}\ ||\ r == \frac{(-2\,p^4-p^4\,t)^{1/4}}{(-2+t)^{1/4}}\right)\right)\ ||\ (t == 2\ \&\&\ p == 0\ \&\&\ q == 0)$$

$\texttt{Reduce}\left[\left\{4*x\char`^3+2*t*x*y\char`^2==1,\ 4*y\char`^3+2*t*x\char`^2*y==-1,\ 4*z\char`^3==\frac{(-2-t)^{1/4}}{(-2+t)^{1/4}},\ x-y+\frac{(-2-t)^{1/4}}{(-2+t)^{1/4}}*z==0\right\},\ \{x,y,z\}\right]$

$$\left(t==0\ \&\&\ x==\left(-\frac{1}{2}\right)^{2/3}\ \&\&\ y==\frac{1}{4}\left((-1)^{2/3}2^{1/3}-(-1)^{1/6}2^{1/3}\sqrt{3}\right)\ \&\&\ z==\frac{1}{4}\left(-(-1)^{2/3}2^{1/3}-(-1)^{1/6}2^{1/3}\sqrt{3}\right)\right)\ ||$$

$$\left(t==0\ \&\&\ x==\left(-\frac{1}{2}\right)^{2/3}\ \&\&\ y==\frac{1}{4}\left((-1)^{2/3}2^{1/3}+(-1)^{1/6}2^{1/3}\sqrt{3}\right)\ \&\&\ z==\frac{1}{4}\left(-(-1)^{2/3}2^{1/3}+(-1)^{1/6}2^{1/3}\sqrt{3}\right)\right)\ ||$$

$$\left(t==0\ \&\&\ x==\frac{1}{2^{2/3}}\ \&\&\ y==\frac{1}{4}\left(2^{1/3}-i\,2^{1/3}\sqrt{3}\right)\ \&\&\ z==-\frac{1}{4}i\left(-i\,2^{1/3}+2^{1/3}\sqrt{3}\right)\right)\ ||$$

$$\left(t==0\ \&\&\ x==\frac{1}{2^{2/3}}\ \&\&\ y==\frac{1}{4}\left(2^{1/3}+i\,2^{1/3}\sqrt{3}\right)\ \&\&\ z==\frac{1}{4}i\left(i\,2^{1/3}+2^{1/3}\sqrt{3}\right)\right)\ ||$$

$$\left(t==0\ \&\&\ x==-\frac{(-1)^{1/3}}{2^{2/3}}\ \&\&\ y==\frac{1}{4}\left(-(-2)^{1/3}-(-1)^{5/6}2^{1/3}\sqrt{3}\right)\ \&\&\ z==\frac{1}{4}\left((-2)^{1/3}-(-1)^{5/6}2^{1/3}\sqrt{3}\right)\right)\ ||$$

$$\left(t==0\ \&\&\ x==-\frac{(-1)^{1/3}}{2^{2/3}}\ \&\&\ y==\frac{1}{4}\left(-(-2)^{1/3}+(-1)^{5/6}2^{1/3}\sqrt{3}\right)\ \&\&\ z==\frac{1}{4}\left((-2)^{1/3}+(-1)^{5/6}2^{1/3}\sqrt{3}\right)\right)\ ||$$

$$\left(t==6\ \&\&\ x==-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{1/3}\ \&\&\ y==\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{1/3}\ \&\&\ z==\frac{(-1)^{1/12}}{2^{7/12}}\right)\ ||$$

...(以下省略)

$$\texttt{MatrixRank}\Big[\Big\{\Big\{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{2/3},\ \tfrac{1}{4}\left((-1)^{2/3}2^{1/3}-(-1)^{1/6}2^{1/3}\sqrt{3}\right),\ \tfrac{1}{4}\left(-(-1)^{2/3}2^{1/3}-(-1)^{1/6}2^{1/3}\sqrt{3}\right)\Big\},$$
$$\Big\{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{2/3},\ \tfrac{1}{4}\left((-1)^{2/3}2^{1/3}+(-1)^{1/6}2^{1/3}\sqrt{3}\right),\ \tfrac{1}{4}\left(-(-1)^{2/3}2^{1/3}+(-1)^{1/6}2^{1/3}\sqrt{3}\right)\Big\},$$
$$\Big\{\tfrac{1}{2^{2/3}},\ \tfrac{1}{4}\left(2^{1/3}-i\,2^{1/3}\sqrt{3}\right),\ -\tfrac{1}{4}i\left(-i\,2^{1/3}+2^{1/3}\sqrt{3}\right)\Big\},$$
$$\Big\{\tfrac{1}{2^{2/3}},\ \tfrac{1}{4}\left(2^{1/3}+i\,2^{1/3}\sqrt{3}\right),\ \tfrac{1}{4}i\left(i\,2^{1/3}+2^{1/3}\sqrt{3}\right)\Big\},$$
$$\Big\{-\tfrac{(-1)^{1/3}}{2^{2/3}},\ \tfrac{1}{4}\left(-(-2)^{1/3}-(-1)^{5/6}2^{1/3}\sqrt{3}\right),\ \tfrac{1}{4}\left((-2)^{1/3}-(-1)^{5/6}2^{1/3}\sqrt{3}\right)\Big\},$$
$$\Big\{-\tfrac{(-1)^{1/3}}{2^{2/3}},\ \tfrac{1}{4}\left(-(-2)^{1/3}+(-1)^{5/6}2^{1/3}\sqrt{3}\right),\ \tfrac{1}{4}\left((-2)^{1/3}+(-1)^{5/6}2^{1/3}\sqrt{3}\right)\Big\}\Big\}\Big]$$

2

9.4 [1],[7]

[1] の計算.

```
Reduce[{4 * q^4 + (-t^2 + 4) * r^4 == 0, p == 0}, {p, q, r}]
```

$$(t == -2 \,\&\&\, p == 0 \,\&\&\, q == 0) \,||\, (t == 2 \,\&\&\, p == 0 \,\&\&\, q == 0) \,||$$
$$\left(-4+t^2 \neq 0 \,\&\&\, p == 0 \,\&\&\, r == -\frac{\sqrt{2}\, q}{\left(-4+t^2\right)^{1/4}}\right) \,||\, \left(-4+t^2 \neq 0 \,\&\&\, p == 0 \,\&\&\, r == -\frac{i\sqrt{2}\, q}{\left(-4+t^2\right)^{1/4}}\right) \,||$$
$$\left(-4+t^2 \neq 0 \,\&\&\, p == 0 \,\&\&\, r == \frac{i\sqrt{2}\, q}{\left(-4+t^2\right)^{1/4}}\right) \,||\, \left(-4+t^2 \neq 0 \,\&\&\, p == 0 \,\&\&\, r == \frac{\sqrt{2}\, q}{\left(-4+t^2\right)^{1/4}}\right)$$

$$\mathbf{Reduce}\left[\left\{4 * x\hat{}3 + 2 * t * x * y\hat{}2 == 0,\ 4 * y\hat{}3 + 2 * t * x\hat{}2 * y == 1,\ 4 * z\hat{}3 == \frac{\sqrt{2}}{\left(-4+t^2\right)^{1/4}},\ y + \frac{\sqrt{2}}{\left(-4+t^2\right)^{1/4}} * z == 0\right\},\ \{x, y, z\}\right]$$

$$\left(t == 0 \,\&\&\, x == 0 \,\&\&\, y == \left(-\frac{1}{2}\right)^{2/3} \,\&\&\, z == -\frac{(-1)^{11/12}}{2^{2/3}}\right) \,||$$
$$\left(t == 0 \,\&\&\, x == 0 \,\&\&\, y == \frac{1}{2^{2/3}} \,\&\&\, z == -\frac{(-1)^{1/4}}{2^{2/3}}\right) \,||$$
$$\left(t == 0 \,\&\&\, x == 0 \,\&\&\, y == -\frac{(-1)^{1/3}}{2^{2/3}} \,\&\&\, z == \frac{(-1)^{7/12}}{2^{2/3}}\right) \,||$$
$$\Bigg(-4+t^2 \neq 0 \,\&\&\, t \neq 0 \,\&\&\, x == -\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{1/6}} \,\&\&$$
$$y == \frac{4-t^2}{\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}} \,\&\&\, z == \frac{\left(-4+t^2\right)^{5/4}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}}\Bigg) \,||\, \Bigg(-4+t^2 \neq 0 \,\&\&\, t \neq 0 \,\&\&$$
$$x == \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{1/6}} \,\&\&\, y == \frac{4-t^2}{\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}} \,\&\&\, z == \frac{\left(-4+t^2\right)^{5/4}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}}\Bigg) \,||$$

$$\left(-4+t^2\neq 0\,\&\&\,t\neq 0\,\&\&\,x==-\frac{(-1)^{1/3}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{1/6}}\,\&\&\right.$$

$$\left.y==\frac{(-1)^{1/3}\left(-4+t^2\right)}{\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}}\,\&\&\,z==-\frac{(-1)^{1/3}\left(-4+t^2\right)^{5/4}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}}\right)\,||$$

$$\left(-4+t^2\neq 0\,\&\&\,t\neq 0\,\&\&\,x==\frac{(-1)^{1/3}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{1/6}}\,\&\&\,y==\frac{(-1)^{1/3}\left(-4+t^2\right)}{\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}}\,\&\&\right.$$

$$\left.z==-\frac{(-1)^{1/3}\left(-4+t^2\right)^{5/4}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}}\right)\,||\,\left(-4+t^2\neq 0\,\&\&\,t\neq 0\,\&\&\,x==-\frac{(-1)^{2/3}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{1/6}}\,\&\&\right.$$

$$\left.y==-\frac{(-1)^{2/3}\left(-4+t^2\right)}{\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}}\,\&\&\,z==\frac{(-1)^{2/3}\left(-4+t^2\right)^{5/4}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}}\right)\,||$$

$$\left(-4+t^2\neq 0\,\&\&\,t\neq 0\,\&\&\,x==\frac{(-1)^{2/3}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{1/6}}\,\&\&\right.$$

$$\left.y==-\frac{(-1)^{2/3}\left(-4+t^2\right)}{\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}}\,\&\&\,z==\frac{(-1)^{2/3}\left(-4+t^2\right)^{5/4}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}}\right)$$

$$\mathbf{MatrixRank}\left[\left\{\left\{0,\left(-\frac{1}{2}\right)^{2/3},-\frac{(-1)^{11/12}}{2^{2/3}}\right\},\left\{0,\frac{1}{2^{2/3}},-\frac{(-1)^{1/4}}{2^{2/3}}\right\},\left\{0,-\frac{(-1)^{1/3}}{2^{2/3}},\frac{(-1)^{7/12}}{2^{2/3}}\right\}\right\}\right]$$

1

$$\mathbf{MatrixRank}\left[\left\{\left\{-\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{1/6}},\frac{4-t^2}{\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}},\frac{\left(-4+t^2\right)^{5/4}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}}\right\},\right.\right.$$

$$\left\{\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{1/6}},\frac{4-t^2}{\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}},\frac{\left(-4+t^2\right)^{5/4}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}}\right\},$$

$$\left\{-\frac{(-1)^{1/3}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{1/6}},\frac{(-1)^{1/3}\left(-4+t^2\right)}{\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}},-\frac{(-1)^{1/3}\left(-4+t^2\right)^{5/4}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}}\right\},$$

$$\left\{\frac{(-1)^{1/3}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{1/6}},\frac{(-1)^{1/3}\left(-4+t^2\right)}{\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}},-\frac{(-1)^{1/3}\left(-4+t^2\right)^{5/4}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}}\right\},$$

$$\left\{-\frac{(-1)^{2/3}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{1/6}},\ -\frac{(-1)^{2/3}\left(-4+t^2\right)}{\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}},\ \frac{(-1)^{2/3}\left(-4+t^2\right)^{5/4}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}}\right\},$$

$$\left\{\frac{(-1)^{2/3}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{1/6}},\ -\frac{(-1)^{2/3}\left(-4+t^2\right)}{\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}},\ \frac{(-1)^{2/3}\left(-4+t^2\right)^{5/4}}{\sqrt{2}\left(-\left(-4+t^2\right)^2\right)^{2/3}}\right\}\}\}]$$

2

[7] の計算.

Reduce[{4 * p^4 + (-t^2 + 4) * r^4 == 0, q == 0}, {p, q, r}]

(t == -2 && p == 0 && q == 0) || (t == 2 && p == 0 && q == 0) ||

$$\left(-4+t^2\neq 0\ \&\&\ q==0\ \&\&\ r==-\frac{\sqrt{2}\,p}{\left(-4+t^2\right)^{1/4}}\right)\ ||\ \left(-4+t^2\neq 0\ \&\&\ q==0\ \&\&\ r==-\frac{i\sqrt{2}\,p}{\left(-4+t^2\right)^{1/4}}\right)\ ||$$

$$\left(-4+t^2\neq 0\ \&\&\ q==0\ \&\&\ r==\frac{i\sqrt{2}\,p}{\left(-4+t^2\right)^{1/4}}\right)\ ||\ \left(-4+t^2\neq 0\ \&\&\ q==0\ \&\&\ r==\frac{\sqrt{2}\,p}{\left(-4+t^2\right)^{1/4}}\right)$$

Reduce$\left[\left\{4*x^{\wedge}3+2*t*x*y^{\wedge}2==1,\ 4*y^{\wedge}3+2*t*x^{\wedge}2*y==0,\ 4*z^{\wedge}3==\frac{\sqrt{2}}{\left(-4+t^2\right)^{1/4}},\ x+\frac{\sqrt{2}}{\left(-4+t^2\right)^{1/4}}*z==0\right\},\ \{x,y,z\}\right]$

$$\left(t==0\ \&\&\ x==\left(-\frac{1}{2}\right)^{2/3}\ \&\&\ y==0\ \&\&\ z==-\frac{(-1)^{11/12}}{2^{2/3}}\right)\ ||$$

$$\left(t==0\ \&\&\ x==\frac{1}{2^{2/3}}\ \&\&\ y==0\ \&\&\ z==-\frac{(-1)^{1/4}}{2^{2/3}}\right)\ ||$$

$$\left(t==0\ \&\&\ x==-\frac{(-1)^{1/3}}{2^{2/3}}\ \&\&\ y==0\ \&\&\ z==\frac{(-1)^{7/12}}{2^{2/3}}\right)\ ||$$

$$\left(-4+t^2\neq 0\ \&\&\ x==\frac{1}{\left(4-t^2\right)^{1/3}}\ \&\&\ y==-\frac{i\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}}\ \&\&\ z==-\frac{\left(-4+t^2\right)^{1/4}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}}\right)\ ||$$

$$\left(-4+t^2\neq 0\ \&\&\ x==\frac{1}{\left(4-t^2\right)^{1/3}}\ \&\&\ y==\frac{i\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}}\ \&\&\ z==-\frac{\left(-4+t^2\right)^{1/4}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}}\right)\ ||$$

$$\left(-4+t^2\neq 0\;\&\&\;x==-\frac{(-1)^{1/3}}{\left(4-t^2\right)^{1/3}}\;\&\&\;y==-\frac{(-1)^{5/6}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}}\;\&\&\;z==\frac{(-1)^{1/3}\left(-4+t^2\right)^{1/4}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}}\right)\;||$$

$$\left(-4+t^2\neq 0\;\&\&\;x==-\frac{(-1)^{1/3}}{\left(4-t^2\right)^{1/3}}\;\&\&\;y==\frac{(-1)^{5/6}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}}\;\&\&\;z==\frac{(-1)^{1/3}\left(-4+t^2\right)^{1/4}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}}\right)\;||$$

$$\left(-4+t^2\neq 0\;\&\&\;x==\frac{(-1)^{2/3}}{\left(4-t^2\right)^{1/3}}\;\&\&\;y==-\frac{(-1)^{1/6}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}}\;\&\&\;z==-\frac{(-1)^{2/3}\left(-4+t^2\right)^{1/4}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}}\right)\;||$$

$$\left(-4+t^2\neq 0\;\&\&\;x==\frac{(-1)^{2/3}}{\left(4-t^2\right)^{1/3}}\;\&\&\;y==\frac{(-1)^{1/6}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}}\;\&\&\;z==-\frac{(-1)^{2/3}\left(-4+t^2\right)^{1/4}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}}\right)$$

$$\mathbf{MatrixRank}\Big[\Big\{\Big\{\frac{1}{\left(4-t^2\right)^{1/3}},-\frac{i\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}},-\frac{\left(-4+t^2\right)^{1/4}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}}\Big\},$$

$$\Big\{\frac{1}{\left(4-t^2\right)^{1/3}},\frac{i\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}},-\frac{\left(-4+t^2\right)^{1/4}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}}\Big\},$$

$$\Big\{-\frac{(-1)^{1/3}}{\left(4-t^2\right)^{1/3}},-\frac{(-1)^{5/6}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}},\frac{(-1)^{1/3}\left(-4+t^2\right)^{1/4}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}}\Big\},$$

$$\Big\{-\frac{(-1)^{1/3}}{\left(4-t^2\right)^{1/3}},\frac{(-1)^{5/6}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}},\frac{(-1)^{1/3}\left(-4+t^2\right)^{1/4}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}}\Big\},$$

$$\Big\{\frac{(-1)^{2/3}}{\left(4-t^2\right)^{1/3}},-\frac{(-1)^{1/6}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}},-\frac{(-1)^{2/3}\left(-4+t^2\right)^{1/4}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}}\Big\},$$

$$\Big\{\frac{(-1)^{2/3}}{\left(4-t^2\right)^{1/3}},\frac{(-1)^{1/6}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}},-\frac{(-1)^{2/3}\left(-4+t^2\right)^{1/4}}{\sqrt{2}\left(4-t^2\right)^{1/3}}\Big\}\Big\}\Big]$$

2

9.5 [5]

[5] の計算.

```
Reduce[{r == 0, p^4 + (t) * p^2 * q^2 + q^4 == 0}, {p, q, r}]
```

$$\left(q == -\frac{\sqrt{-p^2\,t - p^2\,\sqrt{-4+t^2}}}{\sqrt{2}}\ \&\&\ r == 0\right)\ ||\ \left(q == \frac{\sqrt{-p^2\,t - p^2\,\sqrt{-4+t^2}}}{\sqrt{2}}\ \&\&\ r == 0\right)\ ||$$

$$\left(q == -\frac{\sqrt{-p^2\,t + p^2\,\sqrt{-4+t^2}}}{\sqrt{2}}\ \&\&\ r == 0\right)\ ||\ \left(q == \frac{\sqrt{-p^2\,t + p^2\,\sqrt{-4+t^2}}}{\sqrt{2}}\ \&\&\ r == 0\right)$$

$$\mathbf{Reduce}\left[\left\{\mathbf{4*x^{\wedge}3+2*t*x*y^{\wedge}2 == 1,\ 4*y^{\wedge}3+2*t*x^{\wedge}2*y == -\frac{\sqrt{-t-\sqrt{-4+t^2}}}{\sqrt{2}},\ 4*z^{\wedge}3 == 0,\ x-\frac{\sqrt{-t-\sqrt{-4+t^2}}}{\sqrt{2}}\,y == 0}\right\},\ \{\mathbf{x, y, z}\}\right]$$

$$\left(-4+t^2 \neq 0\ \&\&\ x == \frac{\left(-4+t^2+t\,\sqrt{-4+t^2}\right)^{1/3}}{2^{2/3}\,\left(-4+t^2\right)^{1/3}}\ \&\&\ y == \left(\sqrt{-t-\sqrt{-4+t^2}}\ \left(-t+\sqrt{-4+t^2}\right)\ \left(-4+t^2+t\,\sqrt{-4+t^2}\right)^{1/3}\right)\Big/\left(4\times 2^{1/6}\,\left(-4+t^2\right)^{1/3}\right)\ \&\&\ z == 0\right)\ ||$$

$$\left(-4+t^2 \neq 0\ \&\&\ x == -\frac{(-1)^{1/3}\,\left(-4+t^2+t\,\sqrt{-4+t^2}\right)^{1/3}}{2^{2/3}\,\left(-4+t^2\right)^{1/3}}\ \&\&\ y == -\left(\left((-1)^{1/3}\,\sqrt{-t-\sqrt{-4+t^2}}\ \left(-t+\sqrt{-4+t^2}\right)\ \left(-4+t^2+t\,\sqrt{-4+t^2}\right)^{1/3}\right)\Big/\left(4\times 2^{1/6}\,\left(-4+t^2\right)^{1/3}\right)\right)\ \&\&\ z == 0\right)\ ||$$

$$\left(-4+t^2\neq 0\ \&\&\ x == \frac{(-1)^{2/3}\left(-4+t^2+t\sqrt{-4+t^2}\right)^{1/3}}{2^{2/3}\left(-4+t^2\right)^{1/3}}\ \&\&\right.$$

$$y == \left((-1)^{2/3}\sqrt{-t-\sqrt{-4+t^2}}\left(-t+\sqrt{-4+t^2}\right)\left(-4+t^2+t\sqrt{-4+t^2}\right)^{1/3}\right)\Big/$$

$$\left.\left(4\times 2^{1/6}\left(-4+t^2\right)^{1/3}\right)\ \&\&\ z == 0\right)$$

Reduce $\Big[\Big\{\mathbf{x\text{^}4 + y\text{^}4 + z\text{^}4 + t * x\text{^}2 * y\text{^}2 == 0,}$

$$\mathbf{\frac{\left(-4+t^2+t\sqrt{-4+t^2}\right)^{1/3}}{2^{2/3}\left(-4+t^2\right)^{1/3}} * x + \left(\left(\sqrt{-t-\sqrt{-4+t^2}}\left(-t+\sqrt{-4+t^2}\right)\right.\right.}$$

$$\mathbf{\left.\left.\left(-4+t^2+t\sqrt{-4+t^2}\right)^{1/3}\right)\Big/\left(4\times 2^{1/6}\left(-4+t^2\right)^{1/3}\right)\right) * y == 0\Big\},\ \{x,\ y,\ z\}\Big]}$$

$$\left(-4+t^2\right)^{1/6}\neq 0\ \&\&\ y == -\frac{\sqrt{-t-\sqrt{-4+t^2}}\ x}{\sqrt{2}}\ \&\&\ z == 0$$

9.6 [4]

[4] の計算.

```
Reduce[{(2916 t^4 - 23 328 t^2 + 46 656) * q^8 +
     (27 t^6 + 1836 t^4 - 19 440 t^2 + 46 656) * q^4 * r^4 + (16 t^6) * r^8 == 0,
   (-108 t^2 + 432) * q^6 + (8 t^3) * p^2 * r^4 + (-t^4 - 72 t^2 + 432) * q^2 * r^4 == 0,
   (27 t^2 - 108) * p^2 * q^2 + (2 t^3) * r^4 == 0,
   (108 t^2 - 432) * p^4 + (108 t^2 - 432) * q^4 + (t^4 + 72 t^2 - 432) * r^4 == 0}, {p,
   q, r}]
```

$$((t == -2 \,||\, t == 2) \,\&\&\, r == 0) \,||$$

$$\left(t == 0 \,\&\&\, p == 0 \,\&\&\, \left(r == -(-1)^{1/4}\, q \,||\, r == -(-1)^{3/4}\, q \,||\, r == (-1)^{3/4}\, q \,||\, r == (-1)^{1/4}\, q\right)\right) \,||$$

$$\left(t\left(-4+t^2\right) \neq 0 \,\&\&\, \left(q == -\frac{1}{4}\sqrt{\left(-\frac{432\,p^2}{t^3}+\frac{72\,p^2}{t}+p^2\,t-\frac{p^2\left(-36+t^2\right)^{3/2}\sqrt{-4+t^2}}{t^3}\right)} \,||\right.\right.$$

$$q == \frac{1}{4}\sqrt{\left(-\frac{432\,p^2}{t^3}+\frac{72\,p^2}{t}+p^2\,t-\frac{p^2\left(-36+t^2\right)^{3/2}\sqrt{-4+t^2}}{t^3}\right)} \,||$$

$$q == -\frac{1}{4}\sqrt{\left(-\frac{432\,p^2}{t^3}+\frac{72\,p^2}{t}+p^2\,t+\frac{p^2\left(-36+t^2\right)^{3/2}\sqrt{-4+t^2}}{t^3}\right)} \,||$$

$$\left.q == \frac{1}{4}\sqrt{\left(-\frac{432\,p^2}{t^3}+\frac{72\,p^2}{t}+p^2\,t+\frac{p^2\left(-36+t^2\right)^{3/2}\sqrt{-4+t^2}}{t^3}\right)}\right) \,\&\&$$

$$\left(r == -\frac{1}{2\sqrt{2}\;3^{1/4}}\left(-4+t^2\right)^{1/4}\left(48\,p^4+48\,q^4-78\,p^2\,q^2\,t+8\,p^4\,t^2+8\,q^4\,t^2-p^2\,q^2\,t^3\right)^{1/4} \,||\right.$$

$$r == -\frac{1}{2\sqrt{2}\;3^{1/4}}\,i\left(-4+t^2\right)^{1/4}\left(48\,p^4+48\,q^4-78\,p^2\,q^2\,t+8\,p^4\,t^2+8\,q^4\,t^2-p^2\,q^2\,t^3\right)^{1/4} \,||$$

$$r == \frac{1}{2\sqrt{2}\;3^{1/4}}\,i\left(-4+t^2\right)^{1/4}\left(48\,p^4+48\,q^4-78\,p^2\,q^2\,t+8\,p^4\,t^2+8\,q^4\,t^2-p^2\,q^2\,t^3\right)^{1/4} \,||$$

$$\left.\left. r == \frac{1}{2\sqrt{2}\;3^{1/4}}\left(-4+t^2\right)^{1/4}\left(48\,p^4+48\,q^4-78\,p^2\,q^2\,t+8\,p^4\,t^2+8\,q^4\,t^2-p^2\,q^2\,t^3\right)^{1/4}\right)\right) \,||$$

$$\left(t == 0 \,\&\&\, -4\,p \neq 0 \,\&\&\, q == 0 \,\&\&\, \left(r == -(-1)^{1/4}\left(p^4\right)^{1/4} \,||\, r == -(-1)^{3/4}\left(p^4\right)^{1/4} \,||\right.\right.$$

$$\left.\left. r == (-1)^{3/4}\left(p^4\right)^{1/4} \,||\, r == (-1)^{1/4}\left(p^4\right)^{1/4}\right)\right)$$

9.7 $F = x^4 + y^4 + z^4 + tx^2yz$ の inflection point

```
Det[D[x^4 + y^4 + z^4 + t * x^2 * y * z, {{x, y, z}, 2}]]
```

$$-12\,t^2\,x^6-48\,t^2\,x^2\,y^4+6\,t^3\,x^4\,y\,z+1728\,x^2\,y^2\,z^2+288\,t\,y^3\,z^3-48\,t^2\,x^2\,z^4$$

```
Reduce[{% == 0, x^4 + y^4 + z^4 + t * x^2 * y * z == 0}, {x, y, z}]
```

（前略）

$$\Big(t \neq 0 \;\&\&\; \Big(y == -\text{Root}\Big[16\, t^8\, x^{24} + \left(73\,728\, t^4\, x^{20} - 3072\, t^8\, x^{20} + 27\, t^{12}\, x^{20}\right) \#1 + \left(84\,934\,656\, x^{16} - 2\,088\,960\, t^4\, x^{16} + 7680\, t^8\, x^{16} + 81\, t^{12}\, x^{16}\right) \#1^2 + \left(169\,869\,312\, x^{12} - 5\,832\,704\, t^4\, x^{12} + 47\,104\, t^8\, x^{12}\right) \#1^3 + \left(84\,934\,656\, x^8 - 2\,162\,688\, t^4\, x^8 + 16\,896\, t^8\, x^8\right) \#1^4 - 196\,608\, t^4\, x^4\, \#1^5 + 65\,536\, t^4\, \#1^6 \;\&,\, 1\Big]^{1/4} \;||$$

$$y == -\mathrm{i}\, \text{Root}\Big[16\, t^8\, x^{24} + \left(73\,728\, t^4\, x^{20} - 3072\, t^8\, x^{20} + 27\, t^{12}\, x^{20}\right) \#1 + \left(84\,934\,656\, x^{16} - 2\,088\,960\, t^4\, x^{16} + 7680\, t^8\, x^{16} + 81\, t^{12}\, x^{16}\right) \#1^2 + \left(169\,869\,312\, x^{12} - 5\,832\,704\, t^4\, x^{12} + 47\,104\, t^8\, x^{12}\right) \#1^3 + \left(84\,934\,656\, x^8 - 2\,162\,688\, t^4\, x^8 + 16\,896\, t^8\, x^8\right) \#1^4 - 196\,608\, t^4\, x^4\, \#1^5 + 65\,536\, t^4\, \#1^6 \;\&,\, 1\Big]^{1/4} \;||$$

$$y == \mathrm{i}\, \text{Root}\Big[16\, t^8\, x^{24} + \left(73\,728\, t^4\, x^{20} - 3072\, t^8\, x^{20} + 27\, t^{12}\, x^{20}\right) \#1 + \left(84\,934\,656\, x^{16} - 2\,088\,960\, t^4\, x^{16} + 7680\, t^8\, x^{16} + 81\, t^{12}\, x^{16}\right) \#1^2 + \left(169\,869\,312\, x^{12} - 5\,832\,704\, t^4\, x^{12} + 47\,104\, t^8\, x^{12}\right) \#1^3 + \left(84\,934\,656\, x^8 - 2\,162\,688\, t^4\, x^8 + 16\,896\, t^8\, x^8\right) \#1^4 - 196\,608\, t^4\, x^4\, \#1^5 + 65\,536\, t^4\, \#1^6 \;\&,\, 1\Big]^{1/4} \;||$$

$$y == \text{Root}\Big[16\, t^8\, x^{24} + \left(73\,728\, t^4\, x^{20} - 3072\, t^8\, x^{20} + 27\, t^{12}\, x^{20}\right) \#1 + \left(84\,934\,656\, x^{16} - 2\,088\,960\, t^4\, x^{16} + 7680\, t^8\, x^{16} + 81\, t^{12}\, x^{16}\right) \#1^2 + \left(169\,869\,312\, x^{12} - 5\,832\,704\, t^4\, x^{12} + 47\,104\, t^8\, x^{12}\right) \#1^3 + \left(84\,934\,656\, x^8 - 2\,162\,688\, t^4\, x^8 + 16\,896\, t^8\, x^8\right) \#1^4 - 196\,608\, t^4\, x^4\, \#1^5 + 65\,536\, t^4\, \#1^6 \;\&,\, 1\Big]^{1/4} \;||$$

$$y == -\text{Root}\Big[16\, t^8\, x^{24} + \left(73\,728\, t^4\, x^{20} - 3072\, t^8\, x^{20} + 27\, t^{12}\, x^{20}\right) \#1 + \left(84\,934\,656\, x^{16} - 2\,088\,960\, t^4\, x^{16} + 7680\, t^8\, x^{16} + 81\, t^{12}\, x^{16}\right) \#1^2 + \left(169\,869\,312\, x^{12} - 5\,832\,704\, t^4\, x^{12} + 47\,104\, t^8\, x^{12}\right) \#1^3 + \left(84\,934\,656\, x^8 - 2\,162\,688\, t^4\, x^8 + 16\,896\, t^8\, x^8\right) \#1^4 - 196\,608\, t^4\, x^4\, \#1^5 + 65\,536\, t^4\, \#1^6 \;\&,\, 2\Big]^{1/4} \;||$$

$$y == -\mathrm{i}\, \text{Root}\Big[16\, t^8\, x^{24} + \left(73\,728\, t^4\, x^{20} - 3072\, t^8\, x^{20} + 27\, t^{12}\, x^{20}\right) \#1 + \left(84\,934\,656\, x^{16} - 2\,088\,960\, t^4\, x^{16} + 7680\, t^8\, x^{16} + 81\, t^{12}\, x^{16}\right) \#1^2 + \left(169\,869\,312\, x^{12} - 5\,832\,704\, t^4\, x^{12} + 47\,104\, t^8\, x^{12}\right) \#1^3 + \left(84\,934\,656\, x^8 - 2\,162\,688\, t^4\, x^8 + 16\,896\, t^8\, x^8\right) \#1^4 - 196\,608\, t^4\, x^4\, \#1^5 + 65\,536\, t^4\, \#1^6 \;\&,\, 2\Big]^{1/4} \;||$$

$$y == \mathrm{i}\, \text{Root}\Big[16\, t^8\, x^{24} + \left(73\,728\, t^4\, x^{20} - 3072\, t^8\, x^{20} + 27\, t^{12}\, x^{20}\right) \#1 + \left(84\,934\,656\, x^{16} - 2\,088\,960\, t^4\, x^{16} + 7680\, t^8\, x^{16} + 81\, t^{12}\, x^{16}\right) \#1^2 + \left(169\,869\,312\, x^{12} - 5\,832\,704\, t^4\, x^{12} + 47\,104\, t^8\, x^{12}\right) \#1^3 + \left(84\,934\,656\, x^8 - 2\,162\,688\, t^4\, x^8 + 16\,896\, t^8\, x^8\right) \#1^4 - 196\,608\, t^4\, x^4\, \#1^5 + 65\,536\, t^4\, \#1^6 \;\&,\, 2\Big]^{1/4} \;||$$

$$y == \text{Root}\Big[16\, t^8\, x^{24} + \left(73\,728\, t^4\, x^{20} - 3072\, t^8\, x^{20} + 27\, t^{12}\, x^{20}\right) \#1 + \left(84\,934\,656\, x^{16} - 2\,088\,960\, t^4\, x^{16} + 7680\, t^8\, x^{16} + 81\, t^{12}\, x^{16}\right) \#1^2 + \left(169\,869\,312\, x^{12} - 5\,832\,704\, t^4\, x^{12} + 47\,104\, t^8\, x^{12}\right) \#1^3 + \left(84\,934\,656\, x^8 - 2\,162\,688\, t^4\, x^8 + 16\,896\, t^8\, x^8\right) \#1^4 - 196\,608\, t^4\, x^4\, \#1^5 + 65\,536\, t^4\, \#1^6 \;\&,\, 2\Big]^{1/4} \;||$$

$$
\begin{aligned}
y = -\mathrm{Root}\Big[&16\,t^8\,x^{24} + \left(73\,728\,t^4\,x^{20} - 3072\,t^8\,x^{20} + 27\,t^{12}\,x^{20}\right)\#1 + \\
&\left(84\,934\,656\,x^{16} - 2\,088\,960\,t^4\,x^{16} + 7680\,t^8\,x^{16} + 81\,t^{12}\,x^{16}\right)\#1^2 + \\
&\left(169\,869\,312\,x^{12} - 5\,832\,704\,t^4\,x^{12} + 47\,104\,t^8\,x^{12}\right)\#1^3 + \\
&\left(84\,934\,656\,x^8 - 2\,162\,688\,t^4\,x^8 + 16\,896\,t^8\,x^8\right)\#1^4 - \\
&196\,608\,t^4\,x^4\,\#1^5 + 65\,536\,t^4\,\#1^6\,\&,\,3\Big]^{1/4}\ \|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y = -i\,\mathrm{Root}\Big[&16\,t^8\,x^{24} + \left(73\,728\,t^4\,x^{20} - 3072\,t^8\,x^{20} + 27\,t^{12}\,x^{20}\right)\#1 + \\
&\left(84\,934\,656\,x^{16} - 2\,088\,960\,t^4\,x^{16} + 7680\,t^8\,x^{16} + 81\,t^{12}\,x^{16}\right)\#1^2 + \\
&\left(169\,869\,312\,x^{12} - 5\,832\,704\,t^4\,x^{12} + 47\,104\,t^8\,x^{12}\right)\#1^3 + \\
&\left(84\,934\,656\,x^8 - 2\,162\,688\,t^4\,x^8 + 16\,896\,t^8\,x^8\right)\#1^4 - \\
&196\,608\,t^4\,x^4\,\#1^5 + 65\,536\,t^4\,\#1^6\,\&,\,3\Big]^{1/4}\ \|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y = i\,\mathrm{Root}\Big[&16\,t^8\,x^{24} + \left(73\,728\,t^4\,x^{20} - 3072\,t^8\,x^{20} + 27\,t^{12}\,x^{20}\right)\#1 + \\
&\left(84\,934\,656\,x^{16} - 2\,088\,960\,t^4\,x^{16} + 7680\,t^8\,x^{16} + 81\,t^{12}\,x^{16}\right)\#1^2 + \\
&\left(169\,869\,312\,x^{12} - 5\,832\,704\,t^4\,x^{12} + 47\,104\,t^8\,x^{12}\right)\#1^3 + \\
&\left(84\,934\,656\,x^8 - 2\,162\,688\,t^4\,x^8 + 16\,896\,t^8\,x^8\right)\#1^4 - \\
&196\,608\,t^4\,x^4\,\#1^5 + 65\,536\,t^4\,\#1^6\,\&,\,3\Big]^{1/4}\ \|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y = \mathrm{Root}\Big[&16\,t^8\,x^{24} + \left(73\,728\,t^4\,x^{20} - 3072\,t^8\,x^{20} + 27\,t^{12}\,x^{20}\right)\#1 + \\
&\left(84\,934\,656\,x^{16} - 2\,088\,960\,t^4\,x^{16} + 7680\,t^8\,x^{16} + 81\,t^{12}\,x^{16}\right)\#1^2 + \\
&\left(169\,869\,312\,x^{12} - 5\,832\,704\,t^4\,x^{12} + 47\,104\,t^8\,x^{12}\right)\#1^3 + \\
&\left(84\,934\,656\,x^8 - 2\,162\,688\,t^4\,x^8 + 16\,896\,t^8\,x^8\right)\#1^4 - \\
&196\,608\,t^4\,x^4\,\#1^5 + 65\,536\,t^4\,\#1^6\,\&,\,3\Big]^{1/4}\ \|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y = -\mathrm{Root}\Big[&16\,t^8\,x^{24} + \left(73\,728\,t^4\,x^{20} - 3072\,t^8\,x^{20} + 27\,t^{12}\,x^{20}\right)\#1 + \\
&\left(84\,934\,656\,x^{16} - 2\,088\,960\,t^4\,x^{16} + 7680\,t^8\,x^{16} + 81\,t^{12}\,x^{16}\right)\#1^2 + \\
&\left(169\,869\,312\,x^{12} - 5\,832\,704\,t^4\,x^{12} + 47\,104\,t^8\,x^{12}\right)\#1^3 + \\
&\left(84\,934\,656\,x^8 - 2\,162\,688\,t^4\,x^8 + 16\,896\,t^8\,x^8\right)\#1^4 - \\
&196\,608\,t^4\,x^4\,\#1^5 + 65\,536\,t^4\,\#1^6\,\&,\,4\Big]^{1/4}\ \|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y = -i\,\mathrm{Root}\Big[&16\,t^8\,x^{24} + \left(73\,728\,t^4\,x^{20} - 3072\,t^8\,x^{20} + 27\,t^{12}\,x^{20}\right)\#1 + \\
&\left(84\,934\,656\,x^{16} - 2\,088\,960\,t^4\,x^{16} + 7680\,t^8\,x^{16} + 81\,t^{12}\,x^{16}\right)\#1^2 + \\
&\left(169\,869\,312\,x^{12} - 5\,832\,704\,t^4\,x^{12} + 47\,104\,t^8\,x^{12}\right)\#1^3 + \\
&\left(84\,934\,656\,x^8 - 2\,162\,688\,t^4\,x^8 + 16\,896\,t^8\,x^8\right)\#1^4 - \\
&196\,608\,t^4\,x^4\,\#1^5 + 65\,536\,t^4\,\#1^6\,\&,\,4\Big]^{1/4}\ \|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y = i\,\mathrm{Root}\Big[&16\,t^8\,x^{24} + \left(73\,728\,t^4\,x^{20} - 3072\,t^8\,x^{20} + 27\,t^{12}\,x^{20}\right)\#1 + \\
&\left(84\,934\,656\,x^{16} - 2\,088\,960\,t^4\,x^{16} + 7680\,t^8\,x^{16} + 81\,t^{12}\,x^{16}\right)\#1^2 + \\
&\left(169\,869\,312\,x^{12} - 5\,832\,704\,t^4\,x^{12} + 47\,104\,t^8\,x^{12}\right)\#1^3 + \\
&\left(84\,934\,656\,x^8 - 2\,162\,688\,t^4\,x^8 + 16\,896\,t^8\,x^8\right)\#1^4 - \\
&196\,608\,t^4\,x^4\,\#1^5 + 65\,536\,t^4\,\#1^6\,\&,\,4\Big]^{1/4}\ \|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y = \mathrm{Root}\Big[&16\,t^8\,x^{24} + \left(73\,728\,t^4\,x^{20} - 3072\,t^8\,x^{20} + 27\,t^{12}\,x^{20}\right)\#1 + \\
&\left(84\,934\,656\,x^{16} - 2\,088\,960\,t^4\,x^{16} + 7680\,t^8\,x^{16} + 81\,t^{12}\,x^{16}\right)\#1^2 + \\
&\left(169\,869\,312\,x^{12} - 5\,832\,704\,t^4\,x^{12} + 47\,104\,t^8\,x^{12}\right)\#1^3 + \\
&\left(84\,934\,656\,x^8 - 2\,162\,688\,t^4\,x^8 + 16\,896\,t^8\,x^8\right)\#1^4 - \\
&196\,608\,t^4\,x^4\,\#1^5 + 65\,536\,t^4\,\#1^6\,\&,\,4\Big]^{1/4}\ \|
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}y == -\mathrm{Root}\Big[&16\,t^8\,x^{24} + \left(73\,728\,t^4\,x^{20} - 3072\,t^8\,x^{20} + 27\,t^{12}\,x^{20}\right)\,\#1 +\\ &\left(84\,934\,656\,x^{16} - 2\,088\,960\,t^4\,x^{16} + 7680\,t^8\,x^{16} + 81\,t^{12}\,x^{16}\right)\,\#1^2 +\\ &\left(169\,869\,312\,x^{12} - 5\,832\,704\,t^4\,x^{12} + 47\,104\,t^8\,x^{12}\right)\,\#1^3 +\\ &\left(84\,934\,656\,x^8 - 2\,162\,688\,t^4\,x^8 + 16\,896\,t^8\,x^8\right)\,\#1^4 -\\ &196\,608\,t^4\,x^4\,\#1^5 + 65\,536\,t^4\,\#1^6\,\&,\,5\Big]^{1/4}\ ||\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y == -\mathrm{i}\,\mathrm{Root}\Big[&16\,t^8\,x^{24} + \left(73\,728\,t^4\,x^{20} - 3072\,t^8\,x^{20} + 27\,t^{12}\,x^{20}\right)\,\#1 +\\ &\left(84\,934\,656\,x^{16} - 2\,088\,960\,t^4\,x^{16} + 7680\,t^8\,x^{16} + 81\,t^{12}\,x^{16}\right)\,\#1^2 +\\ &\left(169\,869\,312\,x^{12} - 5\,832\,704\,t^4\,x^{12} + 47\,104\,t^8\,x^{12}\right)\,\#1^3 +\\ &\left(84\,934\,656\,x^8 - 2\,162\,688\,t^4\,x^8 + 16\,896\,t^8\,x^8\right)\,\#1^4 -\\ &196\,608\,t^4\,x^4\,\#1^5 + 65\,536\,t^4\,\#1^6\,\&,\,5\Big]^{1/4}\ ||\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y == \mathrm{i}\,\mathrm{Root}\Big[&16\,t^8\,x^{24} + \left(73\,728\,t^4\,x^{20} - 3072\,t^8\,x^{20} + 27\,t^{12}\,x^{20}\right)\,\#1 +\\ &\left(84\,934\,656\,x^{16} - 2\,088\,960\,t^4\,x^{16} + 7680\,t^8\,x^{16} + 81\,t^{12}\,x^{16}\right)\,\#1^2 +\\ &\left(169\,869\,312\,x^{12} - 5\,832\,704\,t^4\,x^{12} + 47\,104\,t^8\,x^{12}\right)\,\#1^3 +\\ &\left(84\,934\,656\,x^8 - 2\,162\,688\,t^4\,x^8 + 16\,896\,t^8\,x^8\right)\,\#1^4 -\\ &196\,608\,t^4\,x^4\,\#1^5 + 65\,536\,t^4\,\#1^6\,\&,\,5\Big]^{1/4}\ ||\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y == \mathrm{Root}\Big[&16\,t^8\,x^{24} + \left(73\,728\,t^4\,x^{20} - 3072\,t^8\,x^{20} + 27\,t^{12}\,x^{20}\right)\,\#1 +\\ &\left(84\,934\,656\,x^{16} - 2\,088\,960\,t^4\,x^{16} + 7680\,t^8\,x^{16} + 81\,t^{12}\,x^{16}\right)\,\#1^2 +\\ &\left(169\,869\,312\,x^{12} - 5\,832\,704\,t^4\,x^{12} + 47\,104\,t^8\,x^{12}\right)\,\#1^3 +\\ &\left(84\,934\,656\,x^8 - 2\,162\,688\,t^4\,x^8 + 16\,896\,t^8\,x^8\right)\,\#1^4 -\\ &196\,608\,t^4\,x^4\,\#1^5 + 65\,536\,t^4\,\#1^6\,\&,\,5\Big]^{1/4}\ ||\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y == -\mathrm{Root}\Big[&16\,t^8\,x^{24} + \left(73\,728\,t^4\,x^{20} - 3072\,t^8\,x^{20} + 27\,t^{12}\,x^{20}\right)\,\#1 +\\ &\left(84\,934\,656\,x^{16} - 2\,088\,960\,t^4\,x^{16} + 7680\,t^8\,x^{16} + 81\,t^{12}\,x^{16}\right)\,\#1^2 +\\ &\left(169\,869\,312\,x^{12} - 5\,832\,704\,t^4\,x^{12} + 47\,104\,t^8\,x^{12}\right)\,\#1^3 +\\ &\left(84\,934\,656\,x^8 - 2\,162\,688\,t^4\,x^8 + 16\,896\,t^8\,x^8\right)\,\#1^4 -\\ &196\,608\,t^4\,x^4\,\#1^5 + 65\,536\,t^4\,\#1^6\,\&,\,6\Big]^{1/4}\ ||\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y == -\mathrm{i}\,\mathrm{Root}\Big[&16\,t^8\,x^{24} + \left(73\,728\,t^4\,x^{20} - 3072\,t^8\,x^{20} + 27\,t^{12}\,x^{20}\right)\,\#1 +\\ &\left(84\,934\,656\,x^{16} - 2\,088\,960\,t^4\,x^{16} + 7680\,t^8\,x^{16} + 81\,t^{12}\,x^{16}\right)\,\#1^2 +\\ &\left(169\,869\,312\,x^{12} - 5\,832\,704\,t^4\,x^{12} + 47\,104\,t^8\,x^{12}\right)\,\#1^3 +\\ &\left(84\,934\,656\,x^8 - 2\,162\,688\,t^4\,x^8 + 16\,896\,t^8\,x^8\right)\,\#1^4 -\\ &196\,608\,t^4\,x^4\,\#1^5 + 65\,536\,t^4\,\#1^6\,\&,\,6\Big]^{1/4}\ ||\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y == \mathrm{i}\,\mathrm{Root}\Big[&16\,t^8\,x^{24} + \left(73\,728\,t^4\,x^{20} - 3072\,t^8\,x^{20} + 27\,t^{12}\,x^{20}\right)\,\#1 +\\ &\left(84\,934\,656\,x^{16} - 2\,088\,960\,t^4\,x^{16} + 7680\,t^8\,x^{16} + 81\,t^{12}\,x^{16}\right)\,\#1^2 +\\ &\left(169\,869\,312\,x^{12} - 5\,832\,704\,t^4\,x^{12} + 47\,104\,t^8\,x^{12}\right)\,\#1^3 +\\ &\left(84\,934\,656\,x^8 - 2\,162\,688\,t^4\,x^8 + 16\,896\,t^8\,x^8\right)\,\#1^4 -\\ &196\,608\,t^4\,x^4\,\#1^5 + 65\,536\,t^4\,\#1^6\,\&,\,6\Big]^{1/4}\ ||\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y == \mathrm{Root}\Big[&16\,t^8\,x^{24} + \left(73\,728\,t^4\,x^{20} - 3072\,t^8\,x^{20} + 27\,t^{12}\,x^{20}\right)\,\#1 +\\ &\left(84\,934\,656\,x^{16} - 2\,088\,960\,t^4\,x^{16} + 7680\,t^8\,x^{16} + 81\,t^{12}\,x^{16}\right)\,\#1^2 +\\ &\left(169\,869\,312\,x^{12} - 5\,832\,704\,t^4\,x^{12} + 47\,104\,t^8\,x^{12}\right)\,\#1^3 +\\ &\left(84\,934\,656\,x^8 - 2\,162\,688\,t^4\,x^8 + 16\,896\,t^8\,x^8\right)\,\#1^4 -\\ &196\,608\,t^4\,x^4\,\#1^5 + 65\,536\,t^4\,\#1^6\,\&,\,6\Big]^{1/4}\Big)\ \&\&\end{aligned}$$

```
(3 913 788 948 480 - 91 955 920 896 t^4 + 363 331 584 t^8 + 5 464 064 t^12 - 72 128 t^16 + 243 t^20) x ≠
    0 &&
   z == (y^3 (129 850 124 217 090 048 t^4 x^20 - 13 056 399 932 129 280 t^8 x^20 + 353 208 580 964 352
          t^12 x^20 - 3 234 594 816 000 t^16 x^20 - 6 581 420 032 t^20 x^20 + 340 361 216 t^24 x^20 -
         2 569 536 t^28 x^20 + 6561 t^32 x^20 + 299 174 686 196 175 470 592 x^16 y^4 -
         14 716 347 411 270 205 440 t^4 x^16 y^4 + 240 312 903 498 989 568 t^8 x^16 y^4 -
         759 144 596 373 504 t^12 x^16 y^4 - 20 089 046 827 008 t^16 x^16 y^4 +
         234 182 017 024 t^20 x^16 y^4 - 683 612 160 t^24 x^16 y^4 - 3 602 880 t^28 x^16 y^4 +
         19 683 t^32 x^16 y^4 + 598 349 372 392 350 941 184 x^12 y^8 -
         34 871 972 248 078 516 224 t^4 x^12 y^8 + 714 334 322 106 040 320 t^8 x^12 y^8 -
         5 150 894 148 550 656 t^12 x^12 y^8 - 22 439 257 964 544 t^16 x^12 y^8 +
         653 106 741 248 t^20 x^12 y^8 - 4 605 347 840 t^24 x^12 y^8 + 11 446 272 t^28 x^12 y^8 +
         299 174 686 196 175 470 592 x^8 y^12 - 14 716 347 411 270 205 440 t^4 x^8 y^12 +
         269 118 390 159 802 368 t^8 x^8 y^12 - 1 753 957 269 504 000 t^12 x^8 y^12 -
         9 925 770 084 352 t^16 x^8 y^12 + 243 593 117 696 t^20 x^8 y^12 -
         1 666 351 104 t^24 x^8 y^12 + 4 105 728 t^28 x^8 y^12 - 692 533 995 824 480 256 t^4 x^4 y^16 +
         16 331 458 524 217 344 t^8 x^4 y^16 - 65 693 672 275 968 t^12 x^4 y^16 -
         883 655 966 720 t^16 x^4 y^16 + 13 245 087 744 t^20 x^4 y^16 - 47 775 744 t^24 x^4 y^16 +
         230 844 665 274 826 752 t^4 y^20 - 5 477 217 173 766 144 t^8 y^20 + 22 033 182 228 480
          t^12 y^20 + 298 097 573 888 t^16 y^20 - 4 424 990 720 t^20 y^20 + 15 925 248 t^24 y^20)) /
     (24 (3 913 788 948 480 t^9 x^22 - 91 955 920 896 t^13 x^22 + 363 331 584 t^17 x^22 +
         5 464 064 t^21 x^22 - 72 128 t^25 x^22 + 243 t^29 x^22))) ||
```

...（以下省略）