

# unmixedな2部グラフの トーリックイデアルの特徴

修士課程2年 5111A0427 諏訪健太  
指導教員名 楫元

## 目的

グラフ理論の中にあるunmixedという性質を,  
トーリックイデアルという代数的な道具を用いて  
特徴づけられるかどうかを調べた.

現在ではunmixedをトーリックイデアルで特徴  
づけることはされていないように思える.

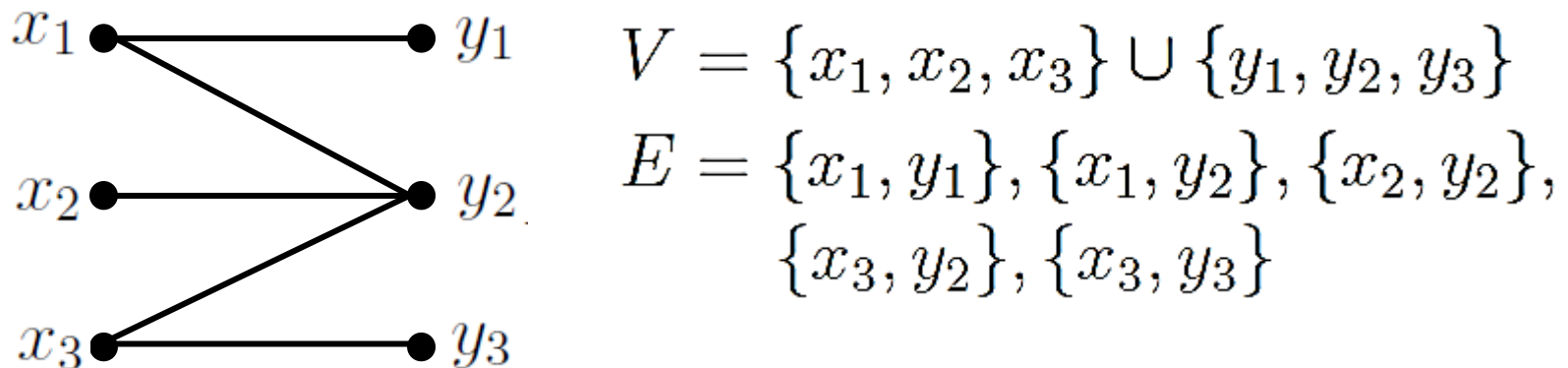
※トーリックイデアルとは,多変数多項式環の  
イデアル

## 予想

unmixedなKoszul性を持つ2部グラフのトーリックイデアルの普遍グレブナー基底の元の次数がすべて2次か3次の2項式

**Definition 1** グラフ  $G = (V, E)$  ,  $V = \{P_1, \dots, P_n\}$   
 $E \subset \{\{P_i, P_j\} | P_i, P_j \in V, i \neq j\}$  が2部グラフとは,  
 $G$  の点集合  $V$  が  $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \phi$  と分割され,  
 $G$  の任意の辺が,  $V_1$  に属する頂点と  $V_2$  に属する頂点を結ぶときにいう.

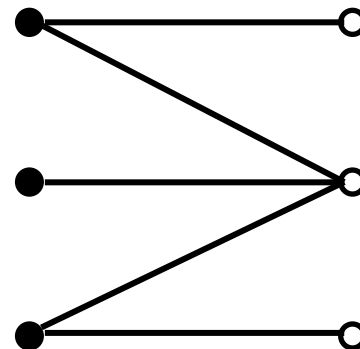
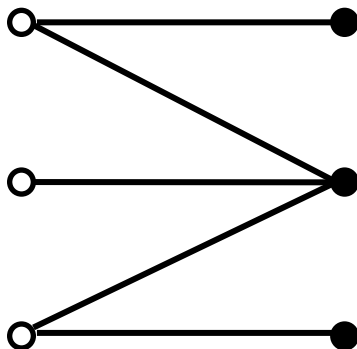
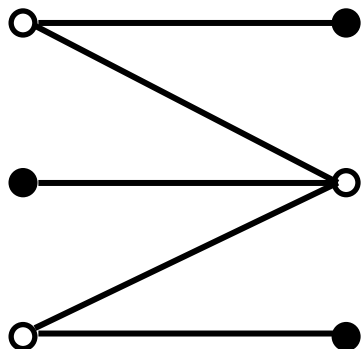
**例** 以下のグラフは2部グラフとなっている



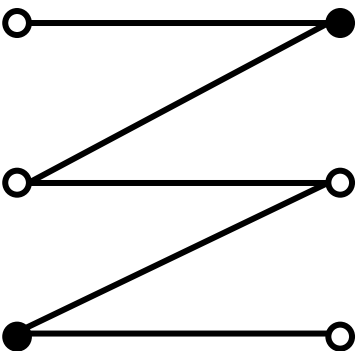
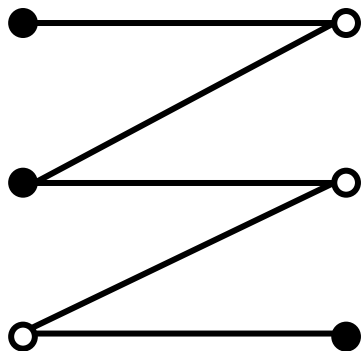
Definition 2 グラフ  $G$  の点被覆とは,  $C \subset V$  であり, すべての  $G$  の辺  $\{P_i, P_j\}$  について,  $P_i \in C$  または  $P_j \in C$  を満たす集合である. また点被覆  $C$  が極小被覆であるとは,  $C$  の部分集合で再び点被覆となるものが存在しないときにいう.

Definition 3 グラフ  $G$  がunmixedであるとは,  $G$  の任意の極小被覆に含まれる点の個数が等しいときにいう.

unmixedな例(白点を点被覆に取る)



unmixedでない例



以下  $G$  をグラフとし, 点集合に  $V = \{P_1, \dots, P_n\}$ , 辺集合に  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ ,  $e_i = \{P_{e_{i_1}}, P_{e_{i_2}}\}$ ,  $(1 \leq e_{i_1}, e_{i_2} \leq n)$  を持つものとする.

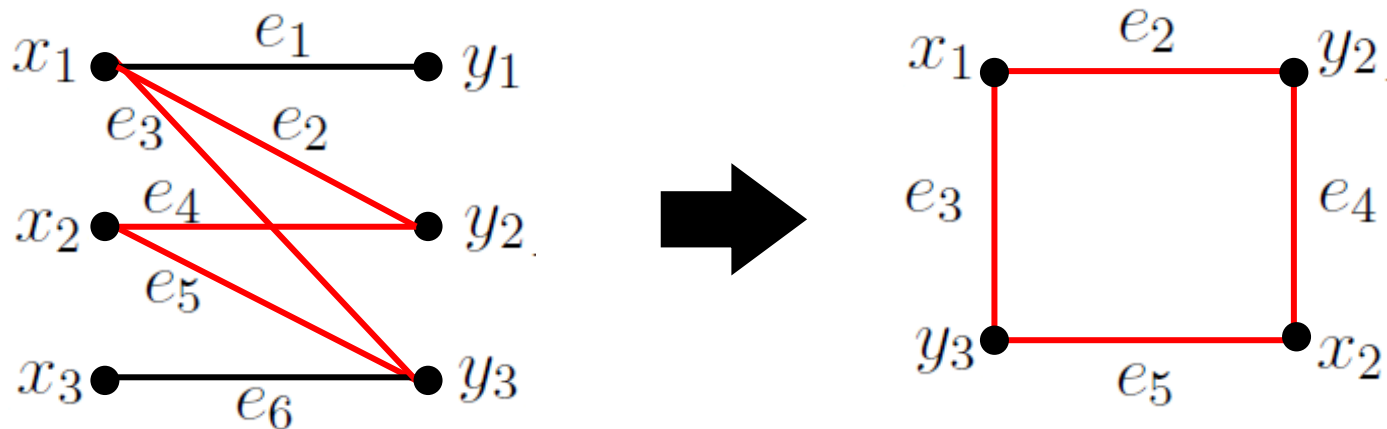
**Definition 4**  $k$  を体とする.  $k[P_1, \dots, P_n], k[e_1, \dots, e_m]$  をそれぞれ  $n$  変数,  $m$  変数多項式環とし, この2つの多項式環の間の準同型写像  $\pi$  を,

$$\begin{aligned}\pi : k[e_1, \dots, e_m] &\longrightarrow k[P_1, \dots, P_n] \\ e_i &\longrightarrow P_{e_{i_1}} \cdot P_{e_{i_2}}\end{aligned}$$

と定義する. この写像の核を  $G$  のトーリックイデアルと呼び  $\text{Ker} \pi = I_G$  と表す.

# 例

$$G = (V, E), V = \{x_1, x_2, x_3\} \cup \{y_1, y_2, y_3\}, E = \{e_1, \dots, e_6\}$$



$$\pi(e_2e_5 - e_4e_3) = x_1y_2 \cdot x_2y_3 - x_2y_2 \cdot x_1y_3 = 0$$

グラフ内のサイクルは  $f = \prod_{k=1}^r e_{2k-1} - \prod_{k=1}^r e_{2k}$  という2項式を作ると  $\pi(f) = 0 (f \in I_G)$  とすることができる.

**Proposition 5** トーリックイデアルは2項式からなる生成系を持つイデアルである.特に2部グラフから作られるトーリックイデアルは,そのグラフ内にあるサイクルから作られる2項式全体から生成される.

証明 [2]4.2.8より ■

**Definition 6** トーリックイデアルに属する2項式  $f = u - v$  ( $u, v$  は単項式)が原始的であるとは,  $f$  と異なる2項式  $g = u' - v'$  で,  $u' | u$  かつ  $v' | v$  となるものが存在しないときにいう.

例 2部グラフでは,原始的な2項式はサイクルから作られる2項式である.

**Definition 7** イデアル  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  の普遍グレブナー基底とは, 任意の単項式順序に関して  $I$  のグレブナー基底となる集合のことである.

**Proposition 8** 任意のイデアル  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  に対して,  $I$  の普遍グレブナー基底が存在する.

証明 [3]系5.2.9より ■

**Proposition 9**  $I_G$  の原始的な2項式全体は,  $G$  が2部グラフのときにはその普遍グレブナー基底と一致する.

**証明** グラフが2部グラフであることと, グラフ内に奇サイクルを含まないことが同値条件であることと先ほどの例を使い, あとは[2]の複数の定理の同値条件をたどればよい.

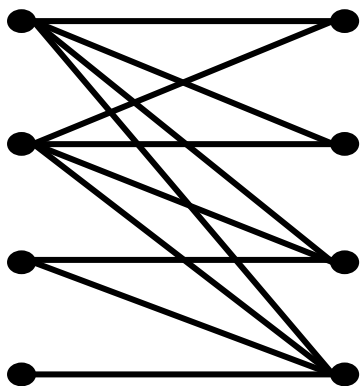
## unmixedな2部グラフのトーリックイデアル

ここからは実際にunmixedな2部グラフのトーリックイデアルを考察する.

[2]によってunmixedな2部グラフ自体を取り出すことは可能。これによりトーリックイデアルを取り出せる.

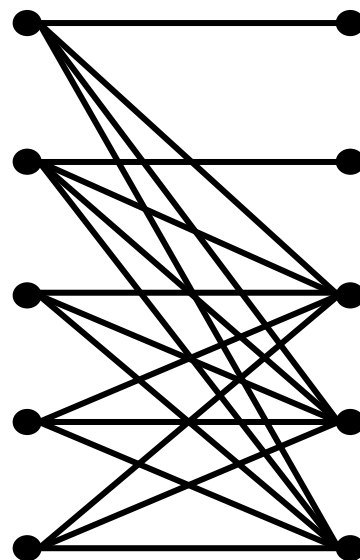
普遍グレブナー基底をいくつか求めていくと,大体のグラフは2次か3次の2項式からなっていた.

## 例 unmixedな2部グラフ

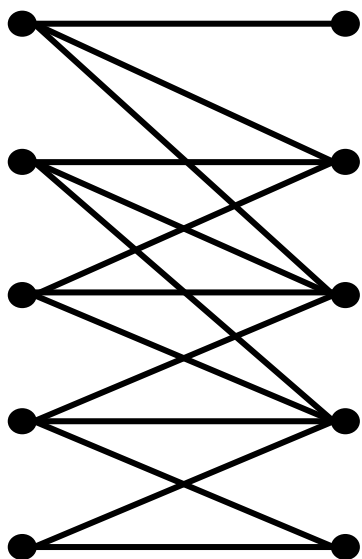


このグラフの普遍グレブナー基底は  
2次の2項式が8個, 3次の2項式が  
4個存在する.

このグラフの普遍グレブナー基底は  
2次の2項式が30 個, 3次の2項式  
が60個存在する.



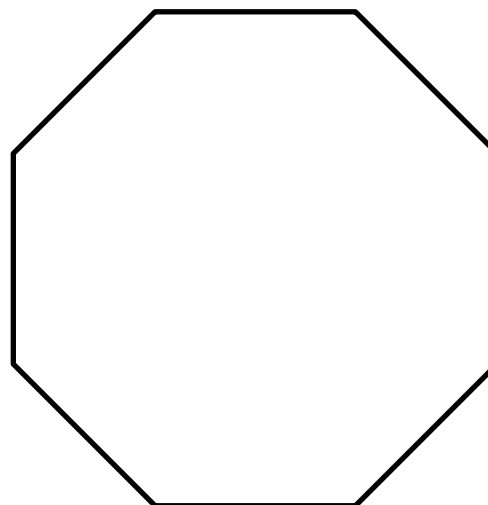
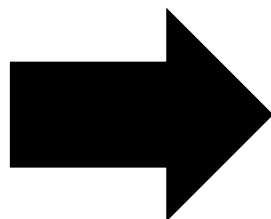
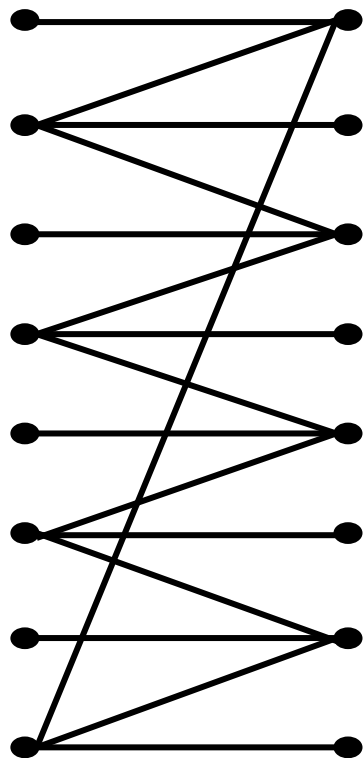
## 例 unmixedでない2部グラフ



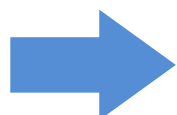
このグラフの普遍グレブナー基底は  
2次の2項式が8個, 3次の2項式が  
8個, 4次の2項式が4個存在する.

➡ しかし, unmixedでない場合でも, 普遍グレブナー基底は2次か3次の2項式全体の集合となる.

また,unmixedであってても例えば以下のような場合は,  
普遍グレブナー基底に4次の2項式を持つグラフが  
存在する.



グラフ中のサイクルを書き  
直すと正8角形となる



この例については,Koszul性という性質を付  
け加えることによって反例から外せる.

**Definition 10**  $G$  が Koszul 性を持つとは,  $I_G$  がある単項式順序に関して次数2の2項式からなるグレブナー基底を持つときにいう.

**Proposition 11** 2部グラフ  $G$  が Koszul 性を持つことと,  $G$  に含まれる長さが6以上のサイクルには弦が存在することは同値である.

証明 [2]8.2.1より ■

Koszul性を仮定すると現段階ではunmixedなトーリックイデアルの普遍グレブナー基底は2次か3次の2項式しか現れないが,理論的な証明はわからない.