

unmixed な 2 部グラフの トリークイデアルの特徴

早稲田大学基幹理工学術院 修士課程 2 年

5111A0427

諏訪健太

指導教員名 楫元

平成 25 年 2 月 4 日

1 Introduction

現在グラフ理論のいろいろな性質は,代数的な道具立てで特徴づけられることが分かっている.その代数的な道具立てとして代表的なものが、トーリックイデアルという多項式環上のイデアルであり、これは与えられたグラフ中の閉路から生成される.グラフから作られたトーリックイデアルの普遍グレブナー基底の元は,グラフ内にあるすべての閉路から作られ,特に2部グラフの場合はサイクルから作られることが分かっている.

今回はこれらのことを用いてトーリックイデアルの生成元の次数に注目し,*unmixed*な2部グラフに共通する性質を考察していく.*unmixed*という性質をトーリックイデアルを用いて特徴づけようという試みは現時点では行われていないように見え、有意義であると考えた.現時点での研究結果としては、さらにグラフに *Koszul* 性というグラフ上の性質を付け加えることにより、

「*unmixed*な *Koszul* 性を持つ2部グラフのトーリックイデアルの生成元は、すべて2次か3次の2項式である」

という予想が立っている.この予想はこの論文に書いてある実験を繰り返すことによって得られたものである.この予想が持つ意味としては,*unmixed*な *Koszul* 性を持つ2部グラフのトーリックイデアルの普遍グレブナー基底は,グラフ内にある長さ4もしくは6のサイクルから作られるということであり,その中にある長さ8以上のサイクルは生成元にはならないということを意味している.

この論文の流れは次のとおりである.まず2章では,グラフ理論の準備をする.ここでは *unmixed* や2部グラフなどの定義を与える.

3章では,グラフから派生する代数的な道具としてトーリックイデアルを導入し,さらにここではトーリックイデアルの普遍グレブナー基底の性質を述べる.

4章では,トーリックイデアルを使って *unmixed* という性質が特徴づけられるかどうかを考察する.

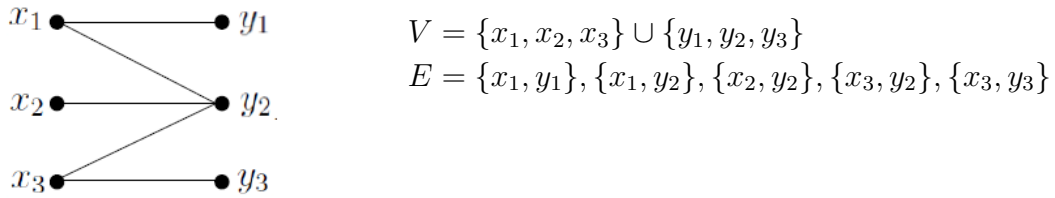
2 グラフの諸定義

この章では, 後章に必要なグラフ理論の諸定義を与える. まずグラフの定義を与えた後, 2 部グラフや *unmixed* の定義を例を用いながら見ていく.

Definition 2.1 グラフ G とは, 集合 $V = \{P_1, \dots, P_n\}$ と $\{\{P_i, P_j\} | P_i, P_j \in V, i \neq j\}$ の部分集合 E の対 $G = (V, E)$ のことであり, V を点集合, E を辺集合という.

Definition 2.2 グラフ G が 2 部グラフであるとは, G の点集合 V が $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \phi$ と分割され, G の任意の辺が, V_1 に属する頂点と, V_2 に属する頂点を結ぶときにいう.

例 2.3 以下のグラフは 2 部グラフとなっている.



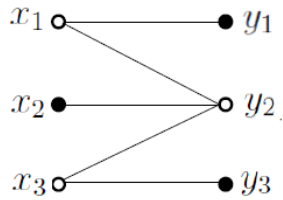
以下ではグラフ内に孤立点 (辺が結ばれていない点) やループ (始点と終点が同じであるような辺) はないグラフのみを扱うことにする.

次に *unmixed* の定義を与える. この定義は, グラフ理論での「点被覆」という概念から派生するものである. 以下, *unmixed* の定義に必要な定義を示しながら話を進めていく.

Definition 2.4 グラフ G の点被覆とは, $C \subset V$ であり, すべての G の辺 $\{P_i, P_j\}$ について, $P_i \in C$ または $P_j \in C$ を満たすもののことである. また点被覆 C が極小被覆であるとは, C の部分集合で再び点被覆となるものが存在しないときにいう.

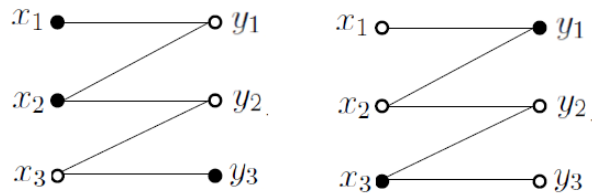
Definition 2.5 グラフ G が *unmixed* であるとは, G の任意の極小被覆に含まれる点の個数が等しいときにいう.

例 2.6 例 2.3 の図 1 で,たとえば x_1, y_2, x_3 を C として選べばこの集合はこのグラフの極小被覆となっている (白い点を点被覆の集合に取っている.)



このグラフは, 実ほどの極小被覆を取っても必ず 3 点のみを含むつまり *unmixed* となっている.

以下のグラフについては, 下図のような 2 つの極小被覆が考えられるが, それぞれの極小被覆の点の数が異なるため, *unmixed* にはならない.



注意 [1] より, *unmixed* な 2 部グラフを列挙することは可能であるということが分かっている. また, *unmixed* な 2 部グラフの点集合 $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 = \{x_1, \dots, x_m\}$, $V_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$ について, V_1, V_2 自身がそれぞれ極小被覆となるため, $m = n$ となる.

3 トーリックイデアル

この章では, グラフから作られるトーリックイデアルの作り方や, その諸定理を述べる. また, トーリックイデアルの特徴を測る代数的な道具として「普遍グレブナー基底」という特殊なイデアルの基底を用いるので, この基本的な事項についても触れておく. 普遍グレブナー基底を採用する理由は *Proposition 3.8* があるためである. なお, この命題はオリジナルではあるが, [2] の定理や系を組み合わせれば簡単にわかる. 以下では, G をグラフとし, 点集合を $V = \{P_1, \dots, P_n\}$, 辺集合を $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, $e_i = \{P_{e_{i1}}, P_{e_{i2}}\}$ ($1 \leq e_{i1}, e_{i2} \leq n$) とする.

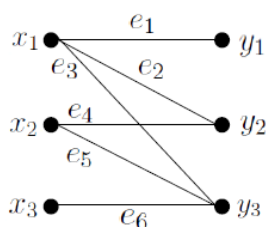
Definition 3.1 k を体とする. $k[P_1, \dots, P_n], k[e_1, \dots, e_m]$ をそれぞれ n 変数, m 変数多項式環とし, この 2 つの多項式環の間の準同型写像 π を,

$$\begin{aligned} \pi : k[e_1, \dots, e_m] &\longrightarrow k[P_1, \dots, P_n] \\ e_i &\longrightarrow P_{e_{i1}} \cdot P_{e_{i2}} \end{aligned}$$

と定義する. この写像 π の核を G のトーリックイデアルと呼び, $\text{Ker} \pi = I_G$ と表す.

ここで, どのような多項式が写像 π の核に入るのかを見るために例を示す.

例 3.2 $G = (V, E)$, $V = \{x_1, x_2, x_3\} \cup \{y_1, y_2, y_3\}$, $E = \{e_1, \dots, e_6\}$ というグラフを見てみよう.



$$\begin{aligned} \pi : k[e_1, \dots, e_6] &\longrightarrow k[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3] \\ \text{において,} \\ \pi(e_2 e_5 - e_4 e_3) &= x_1 y_2 \cdot x_2 y_3 - x_2 y_2 \cdot x_1 y_3 = 0 \\ \text{となり, } e_2 e_5 - e_4 e_3 &\in I_G \text{ となる.} \end{aligned}$$

このように, グラフ内のサイクル (始点と終点と同じであり, 途中通った点を 2 回通らないような路) は, $f = \prod_{k=1}^r e_{2k-1} - \prod_{k=1}^r e_{2k}$ という 2 項式を作ることで $\pi(f) = 0$ ($f \in I_G$) とすることができる.

トーリックイデアルの生成元は特徴的で, 例えば以下のような性質を持つことが分かっている.

Proposition 3.3 トーリックイデアル I_G は, そのグラフ内にある閉路から作られる 2 項式 (ちょうど 2 個の単項式を含むような多項式) 全体から生成される.

証明 [2]4.2.8 命題参照

Definition3.4 トーリックイデアル I_G に属する 2 項式 $f = u - v$ (u, v は単項式) が原始的であるとは, f と異なる 2 項式 $g = u' - v'$ で, $u'|u$ かつ $v'|v$ となるものが存在しないときにいう.

次に, 普遍グレブナー基底に関する事項を述べる.

Definition3.5 単項式順序を一つ固定する. イデアル I の有限集合 $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_t\}$ がグレブナー基底であるとは, $\langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle = \langle LT(I) \rangle$ を満たす集合である. ここで, $LT(g_1), \dots, LT(g_t)$ とは, $g_1, \dots, g_t$ の単項式順序に関する先頭項であり $\langle LT(I) \rangle$ とは I に含まれるすべての多項式の単項式順序に関する先頭項たちで生成されるイデアルである.

Definition3.6 イデアル $I \in k[x_1, \dots, x_n]$ の普遍グレブナー基底とは, 任意の単項式順序に関して I のグレブナー基底となる集合のことである.

普遍グレブナー基底については, 以下の命題たちによって存在が保証される.

Proposition3.7 任意のイデアル $I \in k[x_1, \dots, x_n]$ に対して, I の普遍グレブナー基底が存在する.

証明 [3] 系 5.2.9 参照

普遍グレブナー基底の簡単な作り方としては, それぞれの単項式順序に関する被約グレブナー基底の和集合を取ればよい (この集合が有限であることが [3, 定理 5.2.8] で示されるのである.)

この普遍グレブナー基底と, トーリックイデアルの生成元である原始的な 2 項式全体には次のような関係がある.

Proposition3.8 I_G の原始的な 2 項式全体は, G が 2 部グラフのときにはその普遍グレブナー基底と一致する.

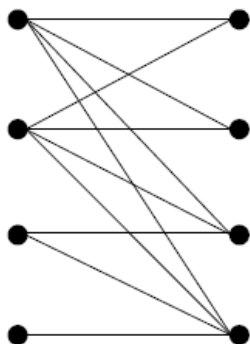
証明 グラフが 2 部グラフであることと, グラフ内に奇サイクルを含まないことは同値条件であるため, I_G の 2 項式は, グラフ内のサイクルに対応する 2 項式となっている. このことを用いて [2] の 7.1.15 の (i), 7.1.12 の (ii) を満たすことになる. よって [2] の 7.1.13 を使うことが出来, 原始的な 2 項式全体と普遍グレブナー基底は一致する.

次章では, 具体的に *unmixed* な 2 部グラフからトーリックイデアルを取りだし, その普遍グレブナー基底を考察していく.

4 unmixed な 2 部グラフのトーリックイデアル

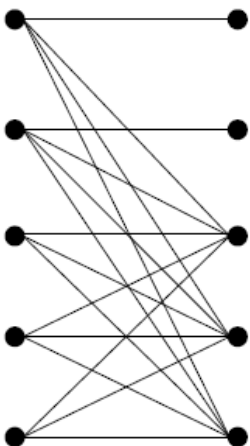
この章では, *unmixed* な 2 部グラフのトーリックイデアルと, そうでない 2 部グラフのトーリックイデアルの普遍グレブナー基底を比べる. *unmixed* な 2 部グラフについては, [2] より「2 部グラフの形」のみを取り出すことは可能である. それらを取り出してみると, それらの形は様々であったが, 大体は, その中にあるサイクルが互いに近しい位置, つまり互いに辺をより多く共有しているように見えた. このことから, サイクルから生成されるトーリックイデアルにも何らかの特徴が現れるのではないかと思い, *unmixed* な 2 部グラフのトーリックイデアルを調べることにした. 以下, 具体的に 2 部グラフの形を示しながら話を進めていく.

例 4.1 4×4 の *unmixed* な 2 部グラフ



このグラフのトーリックイデアルには
2 次の 2 項式が 8 個, 3 次の 2 項式が 4 個存在する.

例 4.2 5×5 の *unmixed* な 2 部グラフ



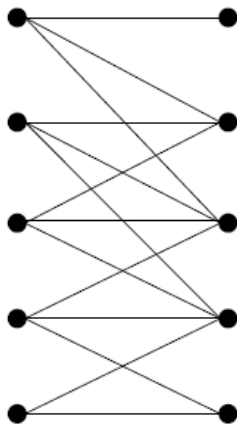
このグラフのトーリックイデアルには
2 次の 2 項式が 30 個,
3 次の 2 項式が 60 個存在する.

このように, 上記 2 つの *unmixed* な 2 部グラフのトーリックイデアルの普遍グレブナー基底は 2 次か 3 次の 2 項式全体の集合となる.

それでは, *unmixed* でない場合はどうであろうか. 実は, *unmixed* でない 2 部グラフ

については普遍グレブナー基底の次数が2か3で抑えられるものとそうでないものが存在する.まずは, *unmixed* でなく, 普遍グレブナー基底の次数が4以上のものになってしまう例を示す.

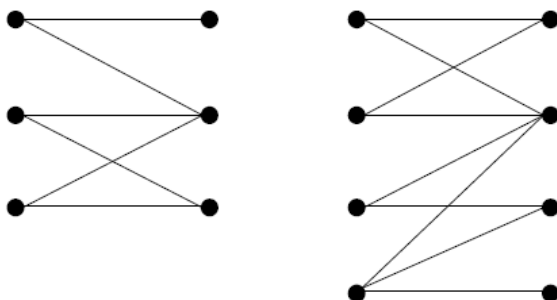
例 4.3 5×5 の *unmixed* でない2部グラフ



このグラフのトーリックイデアルには
2次の2項式が8個, 3次の2項式が8個,
4次の2項式が4個存在する.

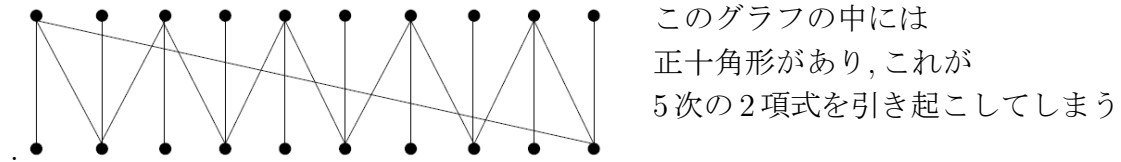
この段階だけを見ると, 普遍グレブナー基底の次数でうまく特徴づけられているように見えるが, *unmixed* でない場合でも, 以下のようなときは普遍グレブナー基底は2次か3次の2項式全体の集合となる.これらの例はこの作業を始めてからまもなく見つかっていて, この段階でトーリックイデアルの普遍グレブナー基底の次数だけでは *unmixed* であるかないかの「判定」をすることが出来ないということが分かる.

- 長さ4もしくは6のサイクルを1つだけ含む (下図左)
- 2つ以上のサイクルを含むがそれらが互いに辺を共有しない (下図右)



これらの例から, *unmixed* であるかないかをトーリックイデアルの普遍グレブナー基底の次数だけで判断するのは難しいようである.さらに, 2部グラフの点を増やしてこの作業をすると, *unmixed* であっても普遍グレブナー基底に5次の2項式を持つ2部グラフが出てきた.(以下の図例 4.4 参照)

例 4.4 *unmixed* であるが, 次数が 5 次の 2 項式が生成元として出てきてしまう例



しかし, この例についてはグラフに「*Koszul* 性」という性質を付け加えると, 以下の命題により反例から外すことが出来る.

Definition 4.5 グラフ G が *Koszul* 性を持つとは, I_G がある単項式順序に関して次数 2 の 2 項式からなるグレブナー基底を持つときにいう.

この定義は 2 部グラフであれば, 以下の条件と同値になる.

Proposition 4.6 2 部グラフ G が *Koszul* 性を持つことと, G に含まれる長さが 6 以上のサイクルには弦が存在することは同値である.

証明 [2] 定理 8.2.1 参照

例 4.4 については, サイクルに弦が存在しないので *Koszul* 性を持たない. そのためグラフの条件に *unmixed* だけでなく *Koszul* 性という条件も付け加えれば, 反例からはずすことは可能である.

このように, *unmixed* であって 4 次以上の 2 項式が出てきてしまう例は, 上記の例での正 n 角形の形しか現れなかったため, *Koszul* 性を仮定するだけですべて簡単に反例から外すことが出来た. これらのことを踏まえれば, 現段階では *unmixed* な *Koszul* 性を持つ 2 部グラフのトーリックイデアルの普遍グレブナー基底は, 2 次か 3 次の 2 項式しか現れないという予想を立てた.

参考文献

- [1] J.Herzog, T.Hibi, H.Ohshugi. *Unmixed Bipartite Graphs And Subrattices of the Boolean Lattices*, Journal of Algebraic Combinatorics 30(2009) p415~420.
- [2] 日比孝之, 「グレブナー基底」, 朝倉出版 (2003) .

[3] JST CREST 日比チーム, 「グレブナー道場」, 共立出版 (2010) .