超立方体回転群による不変式

椙研究室 M2　菅本守

２０１３年2月8日（金）

定義 (n 次元超立方体)

$\Gamma_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, \ldots, -1 \leq x_n \leq 1\}$

定義 (n 次元超立方体回転群)

$A_n^{(2)} := \{A \in SO(n) \mid A(\Gamma_n) = \Gamma_n\}$

$= \{A \in SO(n) \mid$ 各行、各列に 1 または -1 が 1 つだけあり、それ以外は $0\}$

記号

多項式 $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ を基本対称式とし、多項式 $\Delta \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ を差積とする。そして　$s_i^{(k)} := s_i(x_1^k, \ldots, x_n^k)$, $\Delta^{(k)} := \Delta(x_1^k, \ldots, x_n^k)$ とおく。

主定理 1

$A_n^{(2)}$ を n 次元立方体回転群とする。このとき、

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(2)}} &= \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}] \oplus \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}] s_n \Delta^{(2)} \\ &= \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \cdots, s_n^{(2)}, s_n \Delta^{(2)}]\end{aligned}$$

が成り立つ。($s_n \Delta^{(2)} = \prod_i x_i \prod_{i<j}(x_i^2 - x_j^2)$)

主定理 2

$A_n^{(4)} := \{A \in SU(n) \mid$ 各行、各列に $1, -1, i, or -i$ が 1 つだけあり、それ以外は 0 $\}$。このとき、

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(4)}} &= \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \ldots s_{n-1}^{(4)}, s_n^{(2)}] \oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \ldots s_{n-1}^{(4)}, s_n^{(2)}] s_n \Delta^{(4)} \\ &= \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_{n-1}^{(4)}, s_n^{(2)}, s_n \Delta^{(4)}] \\ i.e. &= \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}] \oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}] s_n^{(2)} \\ &\oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}] s_n \Delta^{(4)} \oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}] s_n^{(2)} s_n \Delta^{(4)}\end{aligned}$$

が成り立つ。($s_n \Delta^{(4)} = \prod_i x_i \prod_{i<j}(x_i^4 - x_j^4)$)

主定理 3

$C_n^{(4)} :=< \nu_{ij}, \nu_{ij}^t \mid 1 \leq i < j \leq n >$。

i.e. $\nu_{ij}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n)^t := (x_1, \ldots, ix_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)^t$ 　このとき

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{C_n^{(4)}} &= \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}] \oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}] s_n^{(2)} \Delta^{(4)} \\ &= \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}, s_n^{(2)} \Delta^{(4)}] \end{aligned}$$

が成り立つ。$(s_n^{(2)} \Delta^{(4)} = \prod_i x_i^2 \prod_{i<j}(x_i^4 - x_j^4))$

$$\begin{array}{lll}
S_n^{(2)} \longleftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}] & \\
\cup & \cap & \text{2 次の整拡大} \\
A_n^{(2)} \longleftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \cdots, s_n^{(2)}, s_1 \Delta^{(2)}] & \\
\cup & \cap & \\
\{e\} \longleftrightarrow & \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
S_n^{(4)} \longleftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \ldots s_n^{(4)}] & \\
\cup & \cap & \text{2 次の整拡大} \\
B_n^{(4)} \longleftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \ldots s_{n-1}^{(4)}, s_n^{(2)}] & \\
\cup & \cap & \text{2 次の整拡大} \\
A_n^{(4)} \longleftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \ldots s_{n-1}^{(4)}, s_n^{(2)}, s_1 \Delta^{(4)}] & \\
\cup & \cap & \\
\{e\} \longleftrightarrow & \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
S_n^{(4)} \longleftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \ldots s_n^{(4)}] & \\
\cup & \cap & \text{2 次の整拡大} \\
C_n^{(4)} \longleftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \ldots s_n^{(4)}, s_1^{(2)} \Delta^{(4)}] & \\
\cup & \cap & \\
\{e\} \longleftrightarrow & \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] &
\end{array}$$

参考文献

D. コックス, J. リトル, D. オシー「グレブナ基底と代数多様体入門 」シュプリンガー・ジャパン　1991

B.Sturmfels, *Algorithms in Invariant Theory*, Text and Monographs in Symbolic Computation. Springer-Verlag, New York-Vienna, 1993

S.Mukai, *An Introduction to invariants and Moduli*, Cambridge University Press, 2003

J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, 1990

菅本守「超立方体回転群により不変な部分環を生成する斉次多項式について」卒業論文 2010