超立方体回転群による不変式

菅本守

楫研究室 M2

2013/2/8

n 次元超立方体の定義

n 次元超立方体とは
2 次元の場合 $\rightarrow$ 正方形
3 次元の場合 $\rightarrow$ 立方体

定義 (n 次元超立方体)
$\Gamma_n :=$
$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, \ldots, -1 \leq x_n \leq 1\}$
n 次元超立方体

n 次元超立方体回転群の定義。不変式の定義

定義 (n 次元超立方体回転群)

$A_n^{(2)} := \{A \in SO(n) \mid A(\Gamma_n) = \Gamma_n\} \quad \det A = 1$

n 次元超立方体回転群

命題

$A_n^{(2)} = \{A \in SO(n) \mid$ 各行、各列に 1 または -1 が 1 つだけあり、それ以外は $0\} \quad \det A = 1$

定義 (7 章, § 2, 定義 7「グレブナ基底と代数多様体入門」)

$G \subset GL(n, \mathbb{C})$:部分群

$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^G := \{f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] \mid f(A\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),\ \forall A \in G\}$

コックス, リトル, オシーの教科書で紹介されている結果

命題 (7 章, \$7 例 4，「グレブナ基底と代数多様体入門」)
$A_2^{(2)}$:正方形の回転群

$$A_2^{(2)} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow \mathbb{C}[x,y]^{A_2^{(2)}} = \mathbb{C}[f_1, f_2, f_3]$

ただし $f_1 := x^2 + y^2$

$f_2 := x^2y^2$

$f_3 := xy(x^2 - y^2)$

命題 (7 章, \$4, 演習問題 12, 「グレブナ基底と代数多様体入門」)
$A_3^{(2)}$:立方体の回転群

$\Rightarrow \mathbb{C}[x,y,z]^{A_3^{(2)}} = \mathbb{C}[f_1, f_2, f_3, f_4]$

ただし $f_1 := x^2 + y^2 + z^2$

$f_2 := (x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)$

$f_3 := x^2y^2z^2$

$f_4 := xyz(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(y^2 - z^2)$

今回得られた結果の特別な場合 (3 次元立方体の場合)

$A_3^{(2)}$:立方体の回転群

$\Rightarrow \mathbb{C}[x,y,z]^{A_3^{(2)}} = \mathbb{C}[f_1,f_2,f_3,f_4]$

ただし $f_1 := x^2+y^2+z^2$

$f_2 := x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2$

$f_3 := x^2y^2z^2$

$f_4 := xyz(x^2-y^2)(x^2-z^2)(y^2-z^2)$

$A_2^{(2)}$:正方形の回転群

$\Rightarrow \mathbb{C}[x,y]^{A_3^{(2)}} = \mathbb{C}[f_1,f_2,f_3]$

ただし $f_1 := x^2+y^2$

$f_2 := x^2y^2$

$f_3 := xy(x^2-y^2)$

記号

記号 12
多項式 $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ を基本対称式とし、多項式 $\Delta \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ を差積とする。すなわち

$$
\begin{aligned}
s_1 &:= \sum_i x_i \\
s_2 &:= \sum_{i<j} x_i x_j \\
&\vdots \\
s_n &:= x_1 x_2 \cdots x_n \\
\Delta &:= \prod_{i<j} (x_i - x_j)
\end{aligned}
$$

そして

$$
\begin{aligned}
s_i^{(k)} &:= s_i(x_1^k, \ldots, x_n^k) \\
\Delta^{(k)} &:= \Delta(x_1^k, \ldots, x_n^k)
\end{aligned}
$$

主定理 1

$A_n^{(2)}$ を n 次元超立方体回転群とする。このとき、以下が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(2)}} &= \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}] \oplus \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}] s_1 \Delta^{(2)} \\
&= \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \cdots, s_n^{(2)}, s_1 \Delta^{(2)}]
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
s_1^{(2)} &= \sum_i x_i^2 \\
s_2^{(2)} &= \sum_{i<j} x_i^2 x_j^2 \\
&\vdots \\
s_n^{(2)} &= x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2 \\
s_1 \Delta^{(2)} &= \prod_i x_i \prod_{i<j} (x_i^2 - x_j^2)
\end{aligned}
$$

命題

$S_n^{(2)} := \{A \in O(n) \mid A(\Gamma_n) = \Gamma_n\}$　$\det A = \pm 1$ とおく。

Γ_n:n 次元超立方体

このとき、以下が成り立つ。

$A_n^{(2)} \subset S_n^{(2)}$

$S_n^{(2)} =$

$\{A \in O(n) \mid$ 各行、各列に 1 または -1 が 1 つだけあり、それ以外は 0$\}$　$\det A = \pm 1$

$S_n^{(2)} = < \sigma_{ij}\ ,\ \tau_k \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n >$

ただし、

$$\sigma_{ij} \text{ は互換、} \tau_k := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

証明の方針

Step1
$S_n^{(2)} = < \sigma_{ij}, \tau_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n > (A_n^{(2)} \subset S_n^{(2)})$ と書けることを示す。

Step2
任意の $\sigma \in \{\sigma_{ij},\ \tau_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$ に対して
$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(2)}} = (\sigma$ で不変な式 $) \oplus (\sigma$ で -1 倍される式 $)$ と表せる

Step3
σ で不変な式は $s_1^{(2)}, \ldots, s_n^{(2)}$ で生成されることを示す。

Step4
σ で-1 倍される式は $s_n\Delta^{(2)} = \prod_i x_i \prod_{i<j}(x_i^2 - x_j^2)$ で割り切れることを示す。

主定理 1

$A_n^{(2)}$ を n 次元超立方体回転群とする。このとき、以下が成り立つ。

$$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(2)}} = \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}] \oplus \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}] s_1 \Delta^{(2)}$$
$$= \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \cdots, s_n^{(2)}, s_1 \Delta^{(2)}]$$

ただし

$$s_1^{(2)} = \sum_i x_i^2$$
$$s_2^{(2)} = \sum_{i<j} x_i^2 x_j^2$$
$$\vdots$$
$$s_n^{(2)} = x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2$$
$$s_1 \Delta^{(2)} = \prod_i x_i \prod_{i<j} (x_i^2 - x_j^2)$$

$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{A_n^{(2)}}$ の構造

$A_n^{(2)} = \{A \in SO(n) \mid \det A = 1$ 各行、各列に 1 または -1 が 1 つだけあり、それ以外は $0\}$

$S_n^{(2)} = \{A \in O(n) \mid \det A = \pm 1$ 各行、各列に 1 または -1 が 1 つだけあり、それ以外は $0\}$

$A_n^{(2)} \subset S_n^{(2)}$

$$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{S_n^{(2)}} = \mathbb{C}[s_1^{(2)},\dots s_n^{(2)}]$$

$(s_1\Delta^{(2)})^2 \in \mathbb{C}[s_1^{(2)},\dots s_n^{(2)}]$ である。

$$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{A_n^{(2)}} = \mathbb{C}[s_1^{(2)},\dots s_n^{(2)}] \oplus \mathbb{C}[s_1^{(2)},\dots s_n^{(2)}]s_1\Delta^{(2)}$$

$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{A_n^{(2)}}$ は $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{S_n^{(2)}}$ の 2 次の整拡大。

主定理 2($SU(n)$ の超立方体回転群)

$A_n^{(4)} := \{A \in SU(n) \mid$ 各行、各列に $1, -1, i, or -i$ が１つだけあり、それ以外は０$\}$。このとき、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(4)}} &= \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_{n-1}^{(4)}, s_n^{(2)}, s_1\Delta^{(4)}] \\
&= \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}] \oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}]s_n^{(2)} \\
&\oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}]s_1\Delta^{(4)} \oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}]s_n^{(2)}s_1\Delta^{(4)} \\
s_1^{(4)} &= \sum_i x_i^4 \\
&\vdots \\
s_{n-1}^{(4)} &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}} x_{i_1}^4 x_{i_2}^4 \cdots x_{i_{n-1}}^4 \\
s_n^{(2)} &= \prod_i x_i^2 \\
s_1\Delta^{(4)} &= \prod_i x_i \prod_{i<j}(x_i^4 - x_j^4)
\end{aligned}$$

$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(4)}}$ の構造

$A_n^{(4)} := \{A \in SU(n) \mid \det A = 1$ 各行、各列に $1, -1, i, or -i$ が 1 つだけあり、それ以外は 0 $\}$

$B_n^{(4)} := \{A \in U(n) \mid \det A = \pm 1$ 各行、各列に $1, -1, i, or -i$ が 1 つだけあり、それ以外は 0 $\}$

$S_n^{(4)} := \{A \in U(n) \mid \det A = \pm 1 or \pm i$ 各行、各列に $1, -1, i, or -i$ が 1 つだけあり、それ以外は 0 $\}$

$A_n^{(4)} \subset B_n^{(4)} \subset S_n^{(4)}$

$$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{S_n^{(4)}} = \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \ldots s_n^{(4)}]$$

$$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{B_n^{(4)}} = \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \ldots s_n^{(4)}] \oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \ldots s_n^{(4)}] s_n^{(2)}$$

$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(4)}} =$
$\mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}] \oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}] s_n^{(2)}$
$\oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}] s_1 \Delta^{(4)} \oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}] s_n^{(2)} s_1 \Delta^{(4)}$

証明 ($A_n^{(2)}$ について)

命題

$A_n^{(2)}$:n 次元超立方体回転群

$\Rightarrow A_n^{(2)} =< \rho_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n >$

$$
\text{ただし } \rho_{ij} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}
$$

$$\rho_{ij}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)^t = (x_1, \dots, -x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)^t$$

$S_n^{(4)} := \{A \in U(n) \mid$ 各行、各列に $1, -1, i, or - i$ が 1 つだけあり、それ以外は 0 $\}$

定義

$C_n^{(4)} :=< \nu_{kl}, \nu_{kl}^t \mid 1 \leq k < l \leq n > \subset S_n^{(4)}$

ただし、

$$\nu_{kl} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & i & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\nu_{kl}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_l, \dots, x_n)^t := (x_1, \dots, ix_l, \dots, x_k, \dots, x_n)^t$

主定理3($S_n^{(4)}$ の別の部分群 $C_n^{(4)}$ による不変式)

$C_n^{(4)} =< \nu_{kl}, \nu_{kl}^t \mid 1 \leq k < l \leq n >$ とする。このとき、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{C_n^{(4)}} &= \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \dots s_n^{(4)}] \oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \dots s_n^{(4)}] s_1^{(2)} \Delta^{(4)} \\ &= \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}, s_1^{(2)} \Delta^{(4)}]\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} s_1^{(4)} &:= \sum_i x_i^4 \\ s_2^{(4)} &:= \sum_{i<j} x_i^4 x_j^4 \\ &\vdots \\ s_n^{(4)} &:= x_1^4 x_2^4 \cdots x_n^4 \\ s_1^{(2)} \Delta^{(4)} &:= \prod_i x_i^2 \prod_{i<j} (x_i^4 - x_j^4) \end{aligned}$$

超立方体回転群と不変式環の対応

$$
\begin{array}{ccc}
S_n^{(2)} & \longleftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}] \\
\cup & & \cap \\
A_n^{(2)} & \longleftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \cdots, s_n^{(2)}, s_1\Delta^{(2)}] \\
\cup & & \cap \\
\{e\} & \longleftrightarrow & \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
S_n^{(4)} & \leftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \ldots s_n^{(4)}] \\
\cup & & \cap \\
B_n^{(4)} & \leftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(4)} \ldots, s_{n-1}^{(4)}, s_n^{(2)}] \\
\cup & & \cap \\
A_n^{(4)} & \leftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(4)} \ldots, s_{n-1}^{(4)}, s_n^{(2)} s_1\Delta^{(4)}] \\
\cup & & \cap \\
\{e\} & \longleftrightarrow & \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
S_n^{(4)} & \leftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \ldots s_n^{(4)}] \\
\cup & & \cap \\
C_n^{(4)} & \leftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(4)} \ldots, s_n^{(4)}, s_1^{(2)}\Delta^{(4)}] \\
\cup & & \cap \\
\{e\} & \longleftrightarrow & \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]
\end{array}
$$

定義

$E_n^{(4)} := < \nu_{kl} \mid 1 \leq k < l \leq n > \subset C_n^{(4)} \subset S_n^{(4)}$

ただし

$$\nu_{kl} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & i & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\nu_{kl}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_l, \dots, x_n)^t := (x_1, \dots, ix_l, \dots, x_k, \dots, x_n)^t$

$E_n^{(4)}$ に関する予想

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{E_2^{(4)}} &= \mathbb{C}[s_1^{(4)},\ldots,s_n^{(4)}] \\ &\oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)},\ldots,s_n^{(4)}]s_n \prod_{k<l}(x_k^2 - ix_l^2) \\ &\oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)},\ldots,s_n^{(4)}]s_n^{(2)} \prod_{k<l}(x_k^4 - x_l^4) \\ &\oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)},\ldots,s_n^{(4)}]s_n^{(3)} \prod_{k<l}(x_k^2 + ix_l^2)\end{aligned}$$

複素数体上に拡張した超立方体回転群の関係図

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & S_n^{(4)} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 & B_n^{(4)} & & C_n^{(4)} & \\
\swarrow & & \searrow \quad \swarrow & & \searrow \\
A_n^{(4)} & & D_n^{(4)} & & E_n^{(4)}
\end{array}
$$

交代群で不変な部分環(既に知られている)

A_n:n 次交代群(偶数個の互換の積で生成される群)

$$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n} = \mathbb{C}[s_1, \cdots, s_n, \Delta]$$

ただし

$$s_1 = \sum_i x_i$$
$$s_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$$
$$\vdots$$
$$s_n = x_1 x_2 \cdots x_n$$
$$\Delta = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n} = \{$ 対称式 $\} \oplus \{$ 交代式 $\}$

予想を立てるために使った Molien の定理

定義 (Hilbert 級数「Algorithms in Invariant Theory」)
G:有限群

$$\Phi(\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G, z) := \sum_{d=0}^{\infty} dim\mathbb{C}[\mathbf{x}]_d^G z^d$$

定理 (Molien の定理「Algorithms in Invariant Theory」)
G:有限行列群、E:単位行列

$$\Phi(\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G, z) = \frac{1}{|G|}\sum_{A\in G}\frac{1}{det(E - zA)}$$

定理 (Lemma 2.2.3 「Algorithms in Invariant Theory」)
$f_1, f_2, \ldots, f_s$:代数的独立
$f_1, f_2, \ldots, f_s$ の次数がそれぞれ $d_1, d_2, \ldots, d_s$

$$\Phi(\mathbb{C}[f_1, f_2, \ldots, f_s], z) = \frac{1}{(1 - z^{d_1})(1 - z^{d_2})\cdots(1 - z^{d_s})}$$

Mathematicaで計算した結果

$|G_2| = 4$

$$\Phi(\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{G_2}, z) = \frac{1+z^4}{(1-z^2)(1-z^4)}$$

$|G_3| = 24$

$$\Phi(\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{G_3}, z) = \frac{1+z^9}{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)}$$

$|G_4| = 192$

$$\Phi(\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{G_4}, z) = \frac{1+z^{16}}{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)(1-z^8)}$$

$|G_5| = 1920$

$$\Phi(\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{G_5}, z) = \frac{1+z^{25}}{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)(1-z^8)(1-z^{10})}$$