超立方体回転群により不変な部分環を生成する
斉次多項式

2013 年 2 月 4 日

早稲田大学基幹理工学研究科
数学応用数理専攻

菅本守

学籍番号　5110A025-1
指導教員名　楫 元

1 序文

正方形を回転させる行列と立方体を回転させる行列を多項式に作用させる問題を考える。行列群により不変な多項式の集まりは多項式環の中で部分環をなす。この部分環を不変式環という。「グレブナ基底と代数多様体入門」 [1] を勉強する中で、正方形の回転群により不変な部分環と立方体の回転群により不変な部分環がそれぞれどのような生成元を持つかということを知った。しかしその本の中では、正方形の回転群に関する生成元と立方体の回転群に関する生成元は別個に求められていて、それらの間の関係性については何も述べられていなかった。

そこでまず私は、正方形や立方体の回転を表す群を拡張し、n 次元超立方体回転群 $A_n^{(2)}$ というものを定義した。*1 そうして次に、不変式環のヒルベルト級数に関するモーリーンの定理 (「Algorithms in Invariant Theory」 [2]) を用いて、$n = 3, 4, 5$ の場合について、n 次元超立方体回転群 $A_n^{(2)}$ により不変な部分環の生成元の次数を計算機を用いて、計算した。さらに、得られた生成元の次数から、n 次元超立方体回転群により不変な部分環の生成元の形およびヒルベルト級数の形を卒業論文において予想した。([5])

本論文では、この予想が正しいことをまず証明する。次に、n 次元超立方体回転群を複素数体上へ２種類の方法を用いて拡張する。それぞれの場合に対して、不変式環の生成元を求め、ヒルベルト級数を与えた。

証明の際に導入した $A_n^{(2)}$ を含む群 $S_n^{(2)}$ は、n 次元超立方体回転群に鏡映を加えた群である。すなわち $A_n^{(2)}$ に含まれる元は行列式が 1 であるが、$S_n^{(2)}$ の元には行列式が 1 または－1が含まれる。*2 したがって $A_n^{(2)} \subset S_n^{(2)}$ である。超立方体回転群を $A_n^{(2)}$ とし、$A_n^{(2)}$ を含む群を $S_n^{(2)}$ としたのは、その二つの群が交代群 A_n と対称群 S_n の関係に対応しているからである。

n 次元超立方体回転群 $A_n^{(2)}$ は、$SO(n)$ の中で考えていた。そこで次に超立方体回転群を拡張し、$SU(n)$ の中で考えた。そして複素数体上に成分をもつ n 次元超立方体回転群の拡張 $A_n^{(4)}$ を考え、$A_n^{(4)}$ により不変な部分環の生成元を求め、それを証明した。その証明の際に $A_n^{(4)}$ を含む群 $S_n^{(4)}$ を考えた。*3 $A_n^{(4)}$ は「An Introduction to Invariants and

---

*1 $A_n^{(2)}$ としたのは、以下の本文から分かるように n 次交代群と対応し、添字の（２）は変数の 2 乗に関する基本対称式と対応するからである。

*2 S_n は、n 次対称群と対応し、添字の（２）は変数の 2 乗に対する対称式と対応する。

*3 $A_n^{(4)}$ および $S_n^{(4)}$ は変数の４乗に関する基本対称式と対応し、前者の元は行列式が１、後者の元は行列式が $1, -1, i, -i$ である。

Moduli」 [3] の 15 ページで扱われている the quaternion group と同じものである。

3 番目に、群 $S_n^{(4)}$ の部分群で $A_n^{(4)}$ とは異なる群 $C_n^{(4)}$ を考えた。そして $C_n^{(4)}$ により不変な部分環の生成元を求め、それを証明した。

この論文の意義は、正方形の回転群と立方体の回転群に関する生成元を統一的に捉えることに成功したことと、さらに超立方体回転群の拡張に関する、より一般的な研究の道を開いたことである。複素数体上へ超立方体回転群を拡張すれば、その不変な部分環の生成元は、m をある自然数としたとき、変数の m 乗に関する基本対称式とその変形（例えばルートをとるなど）および変数の差積に類する多項式（基本対称式とその変形を元の変数で表すときの変数変換のヤコビアン）で生成されることが予想される。「Reflection Groups and Coxeter Groups」[4] の 3.12 Example の中で、変数の 2 乗に関する基本対称式とその変形に対するヤコビアンが計算されている。

本論文では 2 種類の拡張を考えたが、より一般的な拡張を調べることもできると考えられる。さらに超立方体回転群を含むような群の拡大に関する包含関係の列を考えたとき、それぞれの群に対応する不変式環は逆の包含関係を示すことになる。このとき群の拡大と不変式環の縮小との間には非常に興味深い対応関係があることが分かった。しかし、その背後にある構造を知るためには、さらなる研究が必要である。

「An introduction to Invariants and Moduli」の中で、n 次交代群により不変な部分環は基本対称式と差積によって生成されることを知った。本論文に述べられる 3 つの主定理の証明は、この場合と同じようなやり方をすれば、証明できることが分かった。そこで参考のために、n 次交代群に関する定理の証明を付録にのせる。

2 本文

2.1 $SO(n)$ の中の 超立方体回転群

まず、n 次元超立方体回転群の定義を行い、n 次元超立方体回転群の性質を考える。

定義 1(7 章、§ 2、定義 7「グレブナ基底と代数多様体入門」)
部分群 $G \subset GL(\mathbb{C}, n)$ について、$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^G := \{f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] \mid f(A\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \forall A \in G\}$ と書く。

定義 2
n 次元超立方体 Γ_n を次のように定義する。

$\Gamma_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, \ldots, -1 \leq x_n \leq 1\}$

定義 3
原点を中心とした n 次元超立方体の回転全体、すなわち n 次元超立方体回転群 $A_n^{(2)}$ を次のように定義する。
$A_n^{(2)} := \{A \in SO(n) \mid A(\Gamma_n) = \Gamma_n\}$

命題 4
$A_n^{(2)}$ を n 次元超立方体回転群とする。このとき、$A_n^{(2)} = \{A \in SO(n) \mid$ 各行、各列に 1 または -1 が 1 つだけあり、それ以外は $0\}$ が成り立つ。

証明
n 次元超立方体の回転は $\mathbb{R}^n$ の標準的基底 $\{\mathbf{e_1}, \cdots, \mathbf{e_n}\}$ を、$\{\pm\mathbf{e_1}, \cdots, \pm\mathbf{e_n}\}$ のいずれかに移し、さらに $\mathbf{e_1}, \cdots, \mathbf{e_n}$ の相対的位置関係を変えない運動である。$SO(n)$ の元であることから、運動によって $\{\mathbf{e_1}, \cdots, \mathbf{e_n}\}$ の相対的位置関係を変わらない。一方、右辺の集合について考える。集合の作り方から A の行列の成分は 1 つの行、1 つの列に ±1 が 1 つずつあり、それ以外は全て 0 という行列である。$A_n^{(2)}$ の元は標準的基底 $\{\mathbf{e_1}, \cdots, \mathbf{e_n}\}$ を全て $\{\pm\mathbf{e_1}, \cdots, \pm\mathbf{e_n}\}$ のいずれかに移す。よって、$A_n^{(2)}$ の元の成分は、1 つの行、1 つの列に ±1 が 1 つずつあり、それ以外は全て 0 という行列になる。

命題 5
$A_n^{(2)}$ を n 次元超立方体回転群とする。このとき $R_n =< \rho_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n >$ が成り立つ。

ただし $\rho_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}$
i.e. $\rho_{ij}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n)^t := (x_1, \ldots, -x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)^t$

証明
$\supseteq$ は自明である。$\subseteq$ について。$A \in A_n^{(2)}$ とする。まず A の 1 行目を見て、$(1,1)$ 成分に 0 以外の数があれば、そのままにする。$(1,1)$ 成分が 0 ならば、$k > 1$ について $(1,k)$ 成

分に 0 以外の数があるので、A の第 1 列を -1 倍してから、A の第 1 列と第 k 列を交換する。これは行列で考えれば、A の右から ρ_{1k} を掛けることと同じである。さらに、A の 2 行目を見て、$(2,2)$ 成分 に 0 以外の数があれば、そのままにする。$(2,2)$ 成分に 0 があれば、$l>2$ について、$(2,l)$ 成分 に 0 以外の数があるので、A の 第 2 列を -1 倍してから、A の第 2 列と第 l 列を交換する。これは行列で考えれば、A の右から ρ_{2l} を掛けることと同じである。同様に、A の 3 行目、4 行目と次々に 0 以外の数を A の対角線上に移していく。$detA=1$ かつ $det\rho_{ij}=1$ であるので、以上の作業で、A の 0 以外の数を全て対角線上に移した行列を B とすると $detB=1$ である。B は対角線上に ± 1 が並び、それ以外は全て 0 という行列である。いま、$detB=1$ より、対角線上にある -1 の個数は偶数個である。いま

$$\tau_{ij}=\rho_{ij}\rho_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\tau_{ij}(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)^t := (x_1,\dots,-x_i,\dots,-x_j,\dots,x_n)^t$

とおくと、B の右から $\Pi\tau_{ij}$ を掛ければ、B を単位行列にできる。今、$\rho_{ij}^{-1}\in<\rho_{ij}\mid 1\le i<j\le n>$ である。以上より、A の右から掛けた行列の逆行列をさらにその右から掛ければ、$A\in<\rho_{ij}\mid 1\le i<j\le n>$ を得る。

定義 6

Γ_n を n 次元超立方体とする。このとき $S_n^{(2)} := \{A\in O(n)\mid A(\Gamma_n)=\Gamma_n\}$ とおく。

命題 7

$S_n^{(2)}=\{A\in O(n)\mid$ 各行、各列に 1 または -1 が 1 つだけあり、それ以外は $0\}$ となる。さらに $A_n^{(2)}\subset S_n^{(2)}$

証明

$S_n^{(2)}$ は $\mathbb{R}^n$ の標準的基底 $\{\mathbf{e_1},\cdots,\mathbf{e_n}\}$ を、$\{\pm\mathbf{e_1},\cdots,\pm\mathbf{e_n}\}$ のいずれかに移す。$S_n^{(2)}$ は O_n の部分群であるので、$S_n^{(2)}$ の行列は成分が 1 つの行、1 つの列に ± 1 が 1 つずつあり、それ以外は全て 0 という行列である。

命題 8

$S_n^{(2)} =< \sigma_{ij}\ ,\ \tau_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n >$ が成り立つ。
ただし、

$$\sigma_{ij} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\sigma_{ij}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)^t := (x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)^t$

$$\tau_k := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\tau_k(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)^t := (x_1, \dots, -x_k, \dots, x_n)^t$

証明
$\supseteq$ は $\sigma_{ij}, \tau_k \in S_n^{(2)}$ より成り立つ。$\subseteq$ は、$A \in A_n^{(2)} \subseteq S_n^{(2)}$ ならば既に良い。$A \in S_n^{(2)} \setminus A_n^{(2)}$ のとき、任意の k について $detA\tau_k = 1$ なので、$A\tau_k \in A_n^{(2)} =< \rho_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n >$ より、$A\tau_k = \Pi\rho_{ij}$ と書ける。$\rho_{ij} = \sigma_{ij}\tau_j$ より、$A\tau_k \in< \sigma_{ij}, \tau_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n >$ となり、$A \in< \sigma_{ij}, \tau_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n >$ を得る。

補題 9
$f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(2)}}$ とする。このとき任意の $\sigma, \sigma' \in \{\sigma_{ij},\ \tau_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$ に対して、$\sigma(f) = \sigma'(f)$ が成り立つ。
ただし $\sigma_{ij}, \tau_i \in M(\mathbb{C}, n)$ であり、
$\sigma_{ij}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)^t = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)^t$
$\tau_k(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)^t = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)^t$ を満たす。

証明
$\det\sigma = -1$ なので $\det\sigma\sigma' = 1$ である。R_n の定義より、$\sigma\sigma' \in A_n^{(2)}$。よって $f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(2)}}$ のとき、$\sigma\sigma(f) = f$ かつ $\sigma\sigma'(f) = f$。よって $\sigma(f) = \sigma^{-1}(f)$ であり、

$\sigma(f) = \sigma'^{-1}(f) = \sigma'(f)$ が成り立つ。

補題 10
任意の $\sigma \in \{\sigma_{ij},\ \tau_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$ に対して
$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(2)}} = (\sigma$ で不変な式 $) \oplus (\sigma$ で -1 倍される式 $)$ と表せる

証明
補題 9 より $\sigma, \sigma' \in \{\sigma_{ij},\ \tau_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$ をとると、$f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{R_n}$ に対して $\sigma\sigma'(f) = f$ と $\sigma(f) = \sigma'(f)$ が言える。よって $f = \frac{f+\sigma(f)}{2} + \frac{f-\sigma(f)}{2}$ と分解すると、$\sigma'(\frac{f+\sigma(f)}{2}) = \frac{\sigma'(f)+f}{2} = \frac{f+\sigma(f)}{2}$ と $\sigma'(\frac{f-\sigma(f)}{2}) = \frac{\sigma'(f)-f}{2} = -\frac{f-\sigma(f)}{2}$ が成り立つ。よって補題 10 が示された。

補題 11
$f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ とする。$\sigma \in \{\sigma_{ij},\ \tau_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$ に対して、$\sigma(f) = -f$ ならば、$f = g\prod_i x_i \prod_{i<j}(x_i^2 - x_j^2)$ が成り立つ。ただし $\sigma(g) = g$ である。

証明
まず、f を x_1 で割ると、$f = qx_1 + r(x_2, \ldots x_n)$ を得る。$-f = \tau_1(f) = -\tau_1(q)x_1 + r(x_2, \ldots, x_n)$ より $2f = (q + \tau_1(q))x_1$ となるので、f は x_1 で割り切れる。同様に f は任意の x_i で割り切れる。さらに、f を $(x_1 - x_2)$ で割ると、$f = q(x_1 - x_2) + r(x_2, x_3, \ldots x_n)$ を得る。よって

$$-f = \sigma_{12}(f) = -\sigma_{12}(q)(x_1 - x_2) + r(x_1, x_3, \ldots x_n)$$

である。今 $r(x_2, x_3, \ldots x_n) - r(x_1, x_3, \ldots x_n) = h(x_1, \ldots x_n)(x_1 - x_2)$(ただし、$h(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ である。) より

$$2f = (q + \sigma_{12}(q))(x_1 - x_2) + h(x_1 - x_2) = (q + \sigma_{12}(q) + h)(x_1 - x_2)$$

となり、f は $(x_1 - x_2)$ で割り切れる。同様に f は $\forall i \neq j$ について $(x_i - x_j)$ で割り切れる。以上より $f = q(x_i - x_j)$ である。両辺に τ_j を作用させれば $\tau_j(f) = \tau_j(q)(x_i + x_j)$ を得る。よって f は $\forall i \neq j$ について $(x_i + x_j)$ で割り切れる。以上より

$$f = g\prod_i x_i \prod_{i<j}(x_i^2 - x_j^2)$$

が成り立つ。次に $\sigma(g) = g$ を示す。今

$$\sigma(\prod_i x_i \prod_{i<j}(x_i^2 - x_j^2)) = -\prod_i x_i \prod_{i<j}(x_i^2 - x_j^2))$$

が成り立つ。よって

$$\sigma(f) = -\sigma(g)\prod_i x_i \prod_{i<j}(x_i^2 - x_j^2)$$

$$f = \sigma(g)\prod_i x_i \prod_{i<j}(x_i^2 - x_j^2)$$

を得るので、$\sigma(g) = g$ が成り立つ。

記号 12
多項式 $s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ を基本対称式とし、多項式 $\Delta \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ を差積とする。すなわち

$$\begin{aligned}
s_1 &:= \sum_i x_i \\
s_2 &:= \sum_{i<j} x_i x_j \\
&\vdots \\
s_r &:= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} \\
&\vdots \\
s_n &:= x_1 x_2 \cdots x_n \\
\Delta &:= \prod_{i<j}(x_i - x_j)
\end{aligned}$$

そして

$$s_i^{(k)} := s_i(x_1^k, \ldots, x_n^k)$$

$$\Delta^{(k)} := \Delta(x_1^k, \ldots, x_n^k)$$

とおく。

補題 13

$S_n^{(2)} = \{A \in O(n) \mid$ 各行、各列に 1 または -1 が 1 つだけあり、それ以外は $0\} =<$ $\sigma_{ij}, \tau_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n >$ とする。このとき

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots x_n]^{S_n^{(2)}} = \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}]$$

が成り立つ。

注意

$$\text{具体的には}\quad \begin{aligned} s_1^{(2)} &= \sum_i x_i^2 \\ s_2^{(2)} &= \sum_{i<j} x_i^2 x_j^2 \\ &\vdots \\ s_r^{(2)} &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \cdots x_{i_r}^2 \\ &\vdots \\ s_n^{(2)} &= x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2 \quad \text{である。} \end{aligned}$$

補題 13 の証明
$\subseteq$ $s_1^{(2)}, \ldots, s_n^{(2)} \in \mathbb{C}[x_1, \ldots x_n]^{S_n(2)}$ より成り立つ。
$\supseteq$ $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{G_n}$ とする。f は τ_k について不変であるので、f は $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$ に関する多項式である。さらに f は σ_{ij} について不変である。よって f は $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ に関する対称式である。以上より、f は $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ に関する基本対称式の多項式で書ける。よって $\mathbb{C}[x_1, \ldots x_n]^{S_n^{(2)}} = \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}]$ が言える。

以上の準備を行った上で、主定理の証明を行う。

主定理 14
$A_n^{(2)}$ を n 次元立方体回転群とする。このとき、

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(2)}} &= \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}] \oplus \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}] s_n \Delta^{(2)} \\ &= \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \cdots, s_n^{(2)}, s_n \Delta^{(2)}] \end{aligned}$$

が成り立つ。

注意

$$
\begin{aligned}
\text{具体的には}\quad s_1^{(2)} &= \sum_i x_i^2 \\
s_2^{(2)} &= \sum_{i<j} x_i^2 x_j^2 \\
&\vdots \\
s_r^{(2)} &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \cdots x_{i_r}^2 \\
&\vdots \\
s_n^{(2)} &= x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2 \\
s_n\Delta^{(2)} &= \prod_i x_i \prod_{i<j}(x_i^2 - x_j^2) \quad \text{である。}
\end{aligned}
$$

主定理 14 の証明

$\supseteq$ は $s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, \ldots, s_n^{(2)}, s_n\Delta^{(2)} \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(2)}}$ より成り立つ。$\subseteq$ について、補題 10 より、任意の $\sigma \in \{\sigma_{ij},\ \tau_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$ に対して $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(2)}} =$ (σ で不変な式) $\oplus$ (σ で -1 倍される式) と表せる。補題 13 より σ で不変な式は $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ に関する基本対称式の多項式で書ける。さらに補題 11 より、
$\sigma(f) = -f$ ならば $f = g\prod_i x_i \prod_{i<j}(x_i^2 - x_j^2)$ が成り立つ。ただし $\sigma(g) = g$ である。よって g は補題 13 より、$x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ に関する基本対称式の多項式で書ける。以上より、主定理は示された。

いま、$(s_n\Delta^{(2)})^2 = (\prod_i x_i \prod_{i<j}(x_i^2 - x_j^2))^2 \in \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}]$ なので、$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(2)}}$ は $\mathbb{C}[x_1, \ldots x_n]^{S_n^{(2)}}$ の 2 次の整拡大になっている。

$$
\begin{array}{lll}
S_n^{(2)} \longleftrightarrow \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}] & & \\
\cup \qquad\qquad\quad \cap & & \text{2 次の整拡大} \\
A_n^{(2)} \longleftrightarrow \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \cdots, s_n^{(2)}, s_1\Delta^{(2)}] & & \\
\cup \qquad\qquad\quad \cap & & \\
\{e\} \longleftrightarrow \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] & &
\end{array}
$$

次に $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{A_n^{(2)}}$ のヒルベルト級数を求める。

定義 15(Hilbert 級数 「Algorithms in Invariant Theory」)
G を有限群とする。

$$\Phi(\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G, z) := \sum_{d=0}^{\infty} dim\mathbb{C}[\mathbf{x}]_d^G z^d$$

ただし
$\mathbb{C}[\mathbf{x}]_d^G := \{f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]^G \mid f$ の次数は $d\}$
$dim\mathbb{C}[\mathbf{x}]_d^G$ は $\mathbb{C}[\mathbf{x}]_d^G$ を $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間として見たときの次元である。

定理 16(Molien の定理「Algorithms in Invariant Theory」)
G を有限行列群とし、E を単位行列とする。このとき

$$\Phi(\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G, z) = \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} \frac{1}{det(E - zA)}$$

が成り立つ。

定理 17(Lemma 2.2.3 「Algorithms in Invariant Theory」)
多項式 $f_1, f_2, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ が代数的独立で、$f_1, f_2, \ldots, f_s$ の次数がそれぞれ $d_1, d_2, \ldots, d_s$ であるとき、

$$\Phi(\mathbb{C}[f_1, f_2, \ldots, f_s], z) = \frac{1}{(1 - z^{d_1})(1 - z^{d_2})\cdots(1 - z^{d_s})}$$

が成り立つ。

定理 18

$$\Phi(\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{S_n^{(2)}}, z) = \frac{1}{(1 - z^2)(1 - z^4)\cdots(1 - z^{2n})}$$

$$\Phi(\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{A_n^{(2)}}, z) = \frac{1 + z^{n^2}}{(1 - z^2)(1 - z^4)\cdots(1 - z^{2n})}$$

証明
補題 13 より $\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{S_n^{(2)}} = \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}]$ である。$s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}$ の次数はそれぞれ $2, 4, \ldots, 2n$ である。よって定理 17 より

$$\Phi(\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{S_n^{(2)}}, z) = \Phi(\mathbb{C}[s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}], z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^4)\cdots(1-z^{2n})}$$

さらに主定理 14 より

$$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(2)}} = \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}] \oplus \mathbb{C}[s_1^{(2)}, \ldots s_n^{(2)}] s_n \Delta^{(2)}$$

が言える。$s_n \Delta^{(2)}$ の次数は n^2 である。よって

$$\Phi(\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{A_n^{(2)}}, z) = \frac{1 + z^{n^2}}{(1-z^2)(1-z^4)\cdots(1-z^{2n})}$$

が言える。

2.2 $SU(n)$ の超立方体回転群

以上によって、超立方体回転群により不変な部分環を生成する斉次多項式を求めることができた。超立方体回転群 $A_n^{(2)}$ と $S_n^{(2)}$ を比較すると、$A_n^{(2)}$ の元は行列式が 1 であるのに対して、$S_n^{(2)}$ の元は行列式が ± 1 である。この関係は交代群 A_n と対称群 S_n の間にもある。交代群 A_n の元は行列式が 1 であり、対称群 S_n の元は行列式が ± 1 である。さらに、この関係は $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n}$ と $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(2)}}$ が両方とも二つの直和に分解されることに関係している。では、超立方体回転群であり、行列式が 1 の元の集合と行列式が $\pm 1, \pm i$ の元の集合を考えた場合はどうなるのか。実は、この場合は 4 つの直和に分かれる。

定義 19
$A_n^{(4)} := \{A \in SU(n) \mid$ 各行、各列に $1, -1, i, or - i$ が 1 つだけあり、それ以外は 0 $\}$

命題 20
$A_n^{(4)} =< \rho_{ij},\ \lambda_{kl} \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k < l \leq n >$
ただし、

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\rho_{ij}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)^t := (x_1, \dots, -x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)^t$

$$\lambda_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & i & \dots \\ 0 & \dots & i & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\lambda_{kl}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_l, \dots, x_n)^t := (x_1, \dots, ix_l, \dots, ix_k, \dots, x_n)^t$

証明

$\subseteq$ 自明。$\supseteq A \in A_n^{(4)}$。まず A の 1 行目を見る。$(1,1)$ 成分に 0 でない数があれば、そのままにする。$(1,1)$ 成分が 0 ならば、$k > 1$ について$(1,k)$ 成分に 0 でない数があるので、A の第 1 列を -1 倍して、A の第 1 列と第 k 列を交換する。これは A の右からρ_{1k}を掛けることである。次に A の 2 行目について見る。$(2,2)$ 成分に 0 でない数があれば、そのままにする。(2,2) 成分が 0 ならば、2 行目の中で、$l > 2$ について $(2,l)$ 成分に 0 でない数があるので、A の第 2 列を -1 倍して、A の第 2 列と第 k 列を交換する。これは、A の右から$\rho_{2,l}$を掛けることである。同様に 3 行目、4 行目と同じ作業をしていけば、対角線上に $1, -1, i, or -i$ を集めることができる。A の右から適当なρ_{ij}を掛けて 0 でない数を全て対角線上に集めた行列を B とする。$detB = 1$ である。よって行列 B の対角線上にある i の個数は偶数個である。

$$\rho_{ij}\lambda_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -i & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & i & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e.

$\rho_{ij}\lambda_{ij}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)^t := (x_1, \dots, -ix_i, \dots, ix_j, \dots, x_n)^t$

より B の右から適当な$\rho_{ij}\lambda_{ij}$を掛ければ、B の対角線の数を全て ± 1 にでき、そうして得られた行列を C とする。$detC = 1$ である。行列 C の対角線上にある -1 の個数は偶数個である。今

$$\tau_{ij} = \rho_{ij}\rho_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\tau_{ij}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)^t := (x_1, \dots, -x_i, \dots, -x_j, \dots, x_n)^t$

より、行列 C の右から適当なτ_{ij}を掛ければ、行列 C を単位行列にすることができる。$\rho_{ij}^{-1}, \lambda_{kl}^{-1} \in < \rho_{ij},\ \lambda_{kl} \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k < l \leq n >$ より、A の右から掛けた行列の逆行列をさらに右からかければ、$A \in < \rho_{ij},\ \lambda_{kl} \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k < l \leq n >$ が言える。

定義 21

$B_n^{(4)} := \{A \in U(n) \mid detA = \pm 1 \quad$ 各行、各列に $1, -1, i, or - i$ が 1 つだけあり、それ以外は 0 $\}$

$S_n^{(4)} := \{A \in U(n) \mid$ 各行、各列に $1, -1, i, or - i$ が 1 つだけあり、それ以外は 0 $\}$

命題 22

$B_n^{(4)} = < \sigma_{ij}, \tau_k, \mu_{lm} \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l < m \leq n >$

ただし、

$$\sigma_{ij} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\sigma_{ij}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)^t := (x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)^t$

$$\tau_k := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\tau_k(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)^t := (x_1, \dots, -x_k, \dots, x_n)^t$

$$\mu_{lm} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & i & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & i & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\mu_{lm}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)^t := (x_1, \dots, ix_l, \dots, ix_m, \dots, x_n)^t$

証明

$\supseteq$ は $\sigma_{ij},\ \tau_k,\ \mu_{lm} \in B_n^{(4)}$ より成り立つ。$\subseteq$ は $A \in A_n^{(4)} \subseteq B_n^{(4)}$ ならば既に良い。$A \in B_n^{(4)} \setminus A_n^{(4)}$ とする。このとき $detA\sigma_{ij} = 1$ より $A\sigma_{ij} \in A_n^{(4)}$ となる。命題 16 より、$A\sigma_{ij} \in < \rho_{ij},\ \lambda_{kl} \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k < l \leq n >$。今 $\rho_{ij} = \tau_i\sigma_{ij}$ かつ $\lambda_{kl} = \mu_{lm}\sigma_{lm}$ が言えるので、$A\sigma_{ij} \in < \sigma_{ij},\ \tau_k,\ \mu_{lm} \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l < m \leq n >$。以上より $A \in < \sigma_{ij},\ \tau_k,\ \mu_{lm} \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l < m \leq n >$ となり、命題 18 は示せた。

命題 23

$S_n^{(4)} = < \nu_{ij},\ \xi_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n >$

ただし、

$$\nu_{ij} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & i & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\nu_{ij}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)^t := (x_1, \dots, ix_j, \dots, x_i, \dots, x_n)^t$

$$\xi_k := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & i & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\xi_k(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n)^t := (x_1,\dots,ix_k,\dots,x_n)^t$

証明

$\supseteq$ は $\nu_{ij},\ \xi_k \in S_n^{(4)}$ より成り立つ。$\subseteq$ は $A \in S_n^{(4)}$ とする。まず A の 1 行目を見る。$(1,1)$ 成分が 0 でない数ならば、そのままにする。$(1,1)$ 成分が 0 ならば、$k > 1$ について $(1,k)$ 成分に 0 でない数があるので、A の第 1 列を i 倍して A の第 1 列と第 k 列を交換する。これは、A の右からν_{1k} を掛けることである。次に A の 2 行目を見る。$(2,2)$ 成分が 0 でない数ならば、そのままにする。$(2,2)$ 成分が 0 ならば、$l > 2$ について $(2,l)$ 成分に 0 でない数があるので、A の第 2 列を i 倍して、A の第 2 列と第 l 列を交換する。これは、A の右からν_{2l}を掛けることである。同様に 3 行目、4 行目と同じ作業を繰り返していくと、± 1 と $\pm i$ を対角線上に集めることができる。このようにして 0 でない全ての ± 1 と $\pm i$ を対角線上に集めた行列を B とする。さらに B の右から適当な回数だけξ_kを掛ければ、対角線上にある ± 1 と $\pm i$ を全て 1 にできる。このようにして A の右から適当なν_{ij}とξ_kを掛ければ単位行列を作れる。$\nu_{ij}^{-1}, \xi_k^{-1} \in < \nu_{ij},\ \xi_k \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n >$ なので、A の右から掛けた行列の逆行列をさらに右から掛ければ、$A \in < \nu_{ij},\ \xi_k \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n >$ が言える。

補題 24

$B_n^{(4)} := \{A \in U(n) \mid detA = \pm 1$　各行、各列に $1, -1, i, or -i$ が 1 つだけあり、それ以外は 0 $\}$。このとき、任意の $\sigma \in \{\nu_{ij},\ \xi_k \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n\}$ に対して

$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{B_n^{(4)}} = (\sigma$ で不変な式 $) \oplus (\sigma$ で -1 倍される式 $)$ と表せる

証明

$S_n^{(4)} := \{A \in U(n) \mid$ 各行、各列に $1, -1, i, or -i$ が 1 つだけあり、それ以外は 0 $\}$ である。命題 21 より $S_n^{(4)} =< \nu_{ij},\ \xi_k \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n >$ が言える。$\sigma,\ \sigma' \in \{\nu_{ij},\ \xi_k \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n\}$ をとると、$\det \sigma\sigma' = \pm 1$

となる。$B_n^{(4)}$ の定義より、$\sigma\sigma,\ \sigma\sigma' \in B_n^{(4)}$。よって $f \in \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{B_n^{(4)}}$ のとき、$\sigma\sigma(f)=f$ かつ $\sigma\sigma'(f)=f$。よって $\sigma(f)=\sigma^{-1}(f)$ であり、$\sigma(f)={\sigma'}^{-1}(f)=\sigma'(f)$ が成り立つ。$f=\frac{f+\sigma(f)}{2}+\frac{f-\sigma(f)}{2}$ と分解すると、$\sigma'(\frac{f+\sigma(f)}{2})=\frac{\sigma'(f)+f}{2}=\frac{f+\sigma(f)}{2}$ と $\sigma'(\frac{f-\sigma(f)}{2})=\frac{\sigma'(f)-f}{2}=-\frac{f-\sigma(f)}{2}$ が成り立つ。
以上より $\sigma \in \{\nu_{ij},\ \xi_k \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n\}$ としたとき、
$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{B_n^{(4)}} = (\sigma$ で不変な式 $) \oplus (\sigma$ で -1 倍される式 $)$ と表せることが言える。

補題 25
$\sigma \in \{\nu_{ij},\ \xi_k \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n\}$ とする。
このとき $f \in \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ に対して、

$$\sigma(f)=f \text{ ならば } f \in \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{S_n^{(4)}}$$

$$\text{さらに}\quad \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{S_n^{(4)}} = \mathbb{C}[s_1^{(4)},\cdots,s_n^{(4)}]$$

が成り立つ。

注意

$$\begin{aligned}
\text{具体的には}\quad s_1^{(4)} &= \sum_i x_i^4 \\
s_2^{(4)} &= \sum_{i<j} x_i^4 1 x_j^4 \\
&\ \vdots \\
s_r^{(4)} &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} x_{i_1}^4 x_{i_2}^4 \cdots x_{i_r}^4 \\
&\ \vdots \\
s_n^{(4)} &= \prod_i x_i^4 \quad \text{である。}
\end{aligned}$$

補題 25 の証明
$S_n^{(4)} =< \nu_{ij},\ \xi_k \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n >$。$\sigma \in \{\nu_{ij},\ \xi_k \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n\} \subset S_n^{(4)}$ より、$\sigma(f)=f$ ならば $f \in \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{S_n^{(4)}}$。
一方、互換 $\sigma_{ij} \in S_n^{(4)}$。よって $\sigma_{ij}(f)=f$ かつ $\xi_k(f)=f$。よって f は $x_1^4,\cdots,x_n^4$ に関

する対称式になる。よって f は 4 乗に関する基本対称式で表せる。

補題 26

$\sigma \in \{\nu_{ij},\ \xi_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$ とする。$f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ に対して、

$$\sigma(f) = -f \text{ ならば } f = q\prod_i x_i^2 \quad \text{ただし } q \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{S_n^{(4)}}$$

証明

f を x_1で割る。$f = gx_1 + r(x_2, \ldots, x_n)$ と表せる。さらに両辺に ξ_1 を作用させると $-f = \xi_1(f) = \xi_1(g)ix_1 + r(x_2, \ldots, x_n)$ を得る。2 つの式の差をとると $2f = (g - \xi_1(g)i)x_1$ を得るので、f は x_1で割り切れる。よって $f = g'x_1$ と書ける。両辺に ξ_1 を作用させると $-f = \xi_1(f) = \xi_1(g')ix_1$ を得る。よって 2 つの式の和をとると、$0 = (g' + i\xi_1(g'))x_1$ となる。よって $g' + i\xi_1(g') = 0$。ゆえに、$\xi_1(g') = -\frac{1}{i}g' = ig'$。
今、g'を x_1で割る。すると $g' = g''x_1 + r'(x_2, \ldots, x_n)$ と書ける。両辺にξ_1を作用させると $ig' = \xi_1(g')ix_1 + r'(x_2, \ldots, x_n)$。2 つの式の差をとると、$(1-i)g' = (g'' - i\xi_1(g''))x_1$ を得る。よって g'は x_1で割り切れる。以上より f は x_1^2で割り切れることが言えた。同様の議論で、f は任意の i について x_i^2で割り切れることが分かる。
よって、$f = q\prod_i x_i^2$と書ける。両辺にξ_kを作用させると $-f = \xi_k(f) = -\xi_k(q)\prod_i x_i^2$より $f = \xi_k(q)\prod_i x_i^2$を得るので、$\xi(q) = q$ となる。

定理 27

$B_n^{(4)} := \{A \in U(n) \mid detA = \pm 1$　各行、各列に $1, -1, i, or - i$ が 1 つだけあり、それ以外は 0 $\}$ とする。　このとき

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{B_n^{(4)}} &= \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \ldots s_n^{(4)}] \oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \ldots s_n^{(4)}]s_n^{(2)} \\ &= \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_{n-1}^{(4)}, s_n^{(2)}]\end{aligned}$$

が成り立つ。

注意

$$
\begin{aligned}
\text{具体的には}\quad s_1^{(2)} &= \sum_i x_i^4 \\
s_2^{(2)} &= \sum_{i<j} x_i^4 x_j^4 \\
&\vdots \\
s_r^{(2)} &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} x_{i_1}^4 x_{i_2}^4 \cdots x_{i_r}^4 \\
&\vdots \\
s_{n-1}^{(4)} &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}} x_{i_1}^4 x_{i_2}^4 \cdots x_{i_{n-1}}^4 \\
s_n^{(4)} &= \prod_i x_i^4 \\
s_n^{(2)} &= \prod_i x_i^2 \quad \text{である。}
\end{aligned}
$$

定理 27 の証明

$\supseteq$ は $s_1^{(4)}, \ldots, s_{n-1}^{(4)}, s_n^{(2)}$ は $\{\nu_{ij},\ \xi_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$ で不変なので成り立つ。$\subseteq$ は補題 24 より、任意の $\sigma \in \{\nu_{ij},\ \xi_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$ に対して
$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{B_n^{(4)}} = (\sigma$ で不変な式 $) \oplus (\sigma$ で -1 倍される式 $)$ と表せる
補題 25 より σ で不変な式は $s_1^{(4)}, \ldots, s_n^{(4)}$ の多項式で書ける。補題 26 より σ で -1 倍される式は $s_n^{(2)}$ で割り切れて、かつ商は $s_1^{(4)}, \ldots, s_n^{(4)}$ の多項式で書ける。以上より定理は示された。

$(s_n^{(2)})^2 = (\prod_i x_i^2)^2 \in \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \ldots s_n^{(4)}]$ より、$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{B_n^{(4)}}$ は $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{S_n^{(4)}}$ の 2 次の整拡大になっている。

$$
\begin{array}{lll}
S_n^{(4)} \longleftrightarrow \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \ldots s_n^{(4)}] & & \\
\cup \qquad\qquad\quad \cap & & \text{2 次の整拡大} \\
B_n^{(4)} \longleftrightarrow \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \ldots s_{n-1}^{(4)}, s_n^{(2)}] & & \\
\cup \qquad\qquad\quad \cap & & \\
\{e\} \longleftrightarrow \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] & &
\end{array}
$$

補題 28
$A_n^{(4)} := \{A \in SU(n) \mid$ 各行、各列に $1, -1, i, or - i$ が 1 つだけあり、それ以外は 0 $\}$。このとき任意の $\sigma \in \{\sigma_{ij}, \tau_k, \mu_{lm} \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l < m \leq n\}$ に対して、$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(4)}} = (\sigma$ で不変な式 $) \oplus (\sigma$ で -1 倍される式 $)$ と表せる。

証明
補題 24 と同じ議論をする。$B_n^{(4)} := \{A \in U(n) \mid detA = \pm 1$ 　各行、各列に $1, -1, i, or - i$ が 1 つだけあり、それ以外は 0 $\}$。命題 20 より $B_n^{(4)} =< \sigma_{ij}, \tau_k, \mu_{lm} \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l < m \leq n >$ が言える。$\sigma,\ \sigma' \in \{\sigma_{ij}, \tau_k, \mu_{lm} \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l < m \leq n\} \subset B_n^{(4)}$ とすると、$\det \sigma\sigma' = 1$。よって $\sigma\sigma,\ \sigma\sigma' \in A_n^{(4)}$ が言える。よって $f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(4)}}$ のとき $\sigma\sigma(f) = \sigma\sigma'(f) = f$ から $\sigma(f) = \sigma'(f)$ が言える。
$f = \frac{f+\sigma(f)}{2} + \frac{f-\sigma(f)}{2}$ と分解すると、$\sigma'(\frac{f+\sigma(f)}{2}) = \frac{\sigma'(f)+f}{2} = \frac{f+\sigma(f)}{2}$ と $\sigma'(\frac{f-\sigma(f)}{2}) = \frac{\sigma'(f)-f}{2} = -\frac{f-\sigma(f)}{2}$ が成り立つ。
以上より $\sigma \in \{\sigma_{ij}, \tau_k, \mu_{lm} \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l < m \leq n\}$ としたとき、$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(4)}} = (\sigma$ で不変な式 $) \oplus (\sigma$ で -1 倍される式 $)$ と表せることが言える。

補題 29
$\sigma \in \{\sigma_{ij}, \tau_k, \mu_{lm} \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l < m \leq n\}$ とする。このとき $f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ に対して、

$$\sigma(f) = f \text{ ならば } f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{B_n^{(4)}}$$

$$\text{さらに} \quad \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{B_n^{(4)}} = \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_{n-1}^{(4)}, s_n^{(2)}]$$

が成り立つ。

注意

$$
\begin{aligned}
\text{具体的には}\quad s_1^{(4)} &= \sum_i x_i^4 \\
s_2^{(4)} &= \sum_{i<j} x_i^4 x_j^4 \\
&\vdots \\
s_r^{(4)} &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} x_{i_1}^4 x_{i_2}^4 \cdots x_{i_r}^4 \\
&\vdots \\
s_{n-1}^{(4)} &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}} x_{i_1}^4 x_{i_2}^4 \cdots x_{i_{n-1}}^4 \\
s_n^{(4)} &= \prod_i x_i^4 \\
s_n^{(2)} &= \prod_i x_i^2 \quad \text{である。}
\end{aligned}
$$

補題 29 の証明

補題 25 と同じ議論をする。$B_n^{(4)} =< \sigma_{ij},\ \tau_k,\ \mu_{lm} \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l < m \leq n >$ より $\sigma \in \{\sigma_{ij}, \tau_k, \mu_{lm} \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l < m \leq n\}$ に対して、$\sigma(f) = f$ ならば任意の $\rho \in B_n^{(4)}$ に関して、$\rho(f) = f$。よって $f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{B_n^{(4)}}$ が成り立つ。補題の後半は定理 27 である。

補題 30

$\sigma \in \{\sigma_{ij},\ \tau_k,\ \mu_{lm} \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq l < m \leq n\}$ とする。$f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ に対して、

$$\sigma(f) = -f \text{ ならば } f = q \prod_i x_i \prod_{i<j} (x_i^4 - x_j^4) \quad \text{ただし}\sigma(q) = q$$

証明

まずはじめに f を x_1で割る。すると $f = gx_1 + r(x_2, \ldots, x_n)$ と書ける。今、両辺にτ_1を作用させせると $-f = \tau_1(f) = -\tau(g)x_1 + r(x_2, \ldots, x_n)$ を得る。2つの式の差をとると、$2f = (g + \tau_1(g))x_1$となる。よって f は x_1で割り切れる。同様に f は任意の i に対して、x_iで割り切れることが言える。

2番目に、f を $(x_1 - x_2)$ で割る。すると $f = g_1(x_1 - x_2) + r_1(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ と書け

る。両辺にσ_{12}を作用させると $-f = \sigma_{12}(f) = -\sigma(g_1)(x_1 - x_2) + r_1(x_1, x_3, \ldots, x_n)$ を得る。今、ある多項式 $h(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ があって $r_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) - r_1(x_1, x_3, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n)(x_1 - x_2)$ を満たす。このことをふまえて２つの式の差をとると、$2f = (g_1 + \sigma_{12}(g_1))(x_1 - x_2) + h(x_1 - x_2) = (g_1 + \sigma_{12}(g_1) + h)(x_1 - x_2)$ となる。よって f は $(x_1 - x_2)$ で割り切れる。このことから $f = g_2(x_1 - x_2)$ と書ける。両辺にτ_2を作用させると、$-f = \tau_2(f) = \tau(g_2)(x_1 + x_2)$ を得るので、f は $(x_1 + x_2)$ で割り切れる。同様に任意の $i < j$ に対して f は $(x_i - x_j)$ と $(x_i + x_j)$ で割り切れる。よって f は任意の $i < j$ に対して $(x_i^2 - x_j^2)$ で割り切れる。
３番目に、f を $(x_1 + ix_2)$ で割る。すると $f = g_2(x_1 + ix_2) + r_2(x_2, \ldots, x_n)$ － ①と書ける。今$\pi_{kl} := \mu_{kl}\sigma_{kl}\tau_l$とおく。$\pi_{kl}$は次のような行列である。

$$\pi_{kl} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -i & \ldots \\ 0 & \ldots & i & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\pi_{kl}(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_l, \ldots, x_n)^t := (x_1, \ldots, -ix_l, \ldots, x_k, \ldots, x_n)^t$

$f = g_2(x_1 + ix_2) + r_2(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ の両辺にπ_{12}を作用させる。

$\pi_{12}(f) = (\nu_{12}\sigma_{12}\tau_2)(f) = -f$ と $\pi_{12}(x_1 + ix_2) = -ix_2 + i(ix_1) = -ix_2 - x_1 = -(x_1 + ix_2)$ を考えれば、

$$-f = \pi_{12}(f) = -\pi_{12}(g_2) + r_2(ix_1, x_3, \ldots, x_n) \text{ － ②}$$

を得る。今ある $a_0,\ a_1,\ \ldots, a_m \in \mathbb{C}[x_3, x_4, \ldots, x_n]$ を用いて、

$$r_2(x_2, x_3, \ldots, x_n) = a_0 x_2^m + a_1 x_2^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x_2 + a_m$$

とおく。
このとき、

$$r_2(ix_1, x_3, \ldots, x_n) = a_0(ix_1)^m + a_1(ix_1)^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(ix_1) + a_m$$

となる。

よって
$r_2(x_2,\ x_3,\dots,x_n)-r_2(ix_1,\ x_3,\dots,x_n)$
$=a_0(x_2^m-(ix_1)^m)+a_1(x_2^{m-1}-(ix_1)^{m-1})+\dots+a_{m-1}(x_2-ix_1)$
$=h(x_1,\dots,x_n)(x_2-ix_1)$
$=-ih(x_1,\dots,x_n)(x_1+ix_2)$
以上より、①$-$②を考えると $2f=(g_2+\pi_{12}-ih(x_1,\dots,x_n))(x_1+ix_2)$ を得る。よって f は (x_1+ix_2) で割り切れる。$f=g_3(x_1+ix_2)$ と書ける。両辺にτ_2を作用させると $-f=\tau_2(g_3)(x_1-ix_2)$ を得る。よって f は (x_1-ix_2) で割り切れる。以上より f は $(x_1^2+x_2^2)$ で割り切れる。同様の議論で任意の $i<j$ について f は $(x_i^2+x_j^2)$ で割り切れる。
f は任意の $I<j$ について $(x_i^2+x_j^2)$ と $(x_i^2-x_j^2)$ で割り切れるので $(x_i^4-x_j^4)$ で割り切れる。
以上より $f=q\prod_i x_i\prod_{i<j}(x_i^4-x_j^4)$ が示せた。$\sigma\in\{\sigma_{ij},\ \tau_k,\ \mu_{lm}\mid 1\le i<j\le n,\ 1\le k\le n,\ 1\le l<m\le n\}$ をとり、σ を両辺に作用させると $-f=\sigma(f)=-\sigma(q)\prod_i x_i\prod_{i<j}(x_i^4-x_j^4)$ より $f=\sigma(q)\prod_i x_i\prod_{i<j}(x_i^4-x_j^4)$ を得るので、$\sigma(q)=q$ である。よって補題を示せた。

主定理 31
$A_n^{(4)}:=\{A\in SU(n)\mid$ 各行、各列に $1,-1,i,or-i$ が 1 つだけあり、それ以外は 0 $\}$。このとき、

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{A_n^{(4)}}&=\mathbb{C}[s_1^{(4)},\dots s_{n-1}^{(4)},s_n^{(2)}]\oplus\mathbb{C}[s_1^{(4)},\dots s_{n-1}^{(4)},s_n^{(2)}]s_n\Delta^{(4)}\\&=\mathbb{C}[s_1^{(4)},\cdots,s_{n-1}^{(4)},s_n^{(2)},s_n\Delta^{(4)}]\\i.e.&=\mathbb{C}[s_1^{(4)},\cdots,s_n^{(4)}]\oplus\mathbb{C}[s_1^{(4)},\cdots,s_n^{(4)}]s_n^{(2)}\\&\quad\oplus\mathbb{C}[s_1^{(4)},\cdots,s_n^{(4)}]s_n\Delta^{(4)}\oplus\mathbb{C}[s_1^{(4)},\cdots,s_n^{(4)}]s_n^{(2)}s_n\Delta^{(4)}\end{aligned}$$

が成り立つ。

注意

$$
\begin{aligned}
\text{具体的には}\quad s_1^{(4)} &= \sum_i x_i^4 \\
s_2^{(4)} &= \sum_{i<j} x_i^4 x_j^4 \\
&\vdots \\
s_r^{(4)} &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} x_{i_1}^4 x_{i_2}^4 \cdots x_{i_r}^4 \\
&\vdots \\
s_{n-1}^{(4)} &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}} x_{i_1}^4 x_{i_2}^4 \cdots x_{i_{n-1}}^4 \\
s_n^{(4)} &= \prod_i x_i^4 \\
s_n^{(2)} &= \prod_i x_i^2 \\
s_n\Delta^{(4)} &= \prod_i x_i \prod_{i<j}(x_i^4 - x_j^4) \quad \text{である。}
\end{aligned}
$$

主定理 31 の証明

$\supseteq$ は $s_1^{(4)}, \ldots, s_{n-1}^{(4)}, s_n^{(2)}, s_n\Delta^{(4)}$ は $\{\sigma_{ij},\ \tau_k,\ \mu_{lm} \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n,\ 1 \le l < m \le n\}$ によって不変なので成り立つ。$\subseteq$ は補題 28 より、任意の $\sigma \in \{\sigma_{ij},\ \tau_k,\ \mu_{lm} \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n,\ 1 \le l < m \le n\}$ に対して

$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(4)}} = (\sigma$ で不変な式 $) \oplus (\sigma$ で -1 倍される式 $)$ と表せる

補題 29 より σ で不変な式は $s_1^{(4)}, \ldots, s_{n-1}^{(4)}, s_n^{(2)}$ の多項式で書ける。補題 30 より σ で -1 倍される式は $s_n\Delta^{(4)}$ で割り切れて、かつ商は $s_1^{(4)}, \ldots, s_{n-1}^{(4)}, s_n^{(2)}$ の多項式で書ける。以上より定理は示された。

$(s_n\Delta^{(4)})^2 = (\prod_i x_i \prod_{i<j}(x_i^4 - x_j^4))^2 \in \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \ldots s_{n-1}^{(4)}, s_n^{(2)}]$ より $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(4)}}$ は $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{B_n^{(4)}}$ の 2 次の整拡大になっている。よって定理 23 と合わせれば、$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(4)}}$ は $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{S_n^{(4)}}$ の 4 次の整拡大になっている。

$$
\begin{array}{lll}
S_n^{(4)} \longleftrightarrow \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \dots s_n^{(4)}] & & \\
\cup \qquad\qquad \cap & & \text{2 次の整拡大} \\
B_n^{(4)} \longleftrightarrow \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \dots s_{n-1}^{(4)}, s_n^{(2)}] & & \\
\cup \qquad\qquad \cap & & \text{2 次の整拡大} \\
A_n^{(4)} \longleftrightarrow \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \dots s_{n-1}^{(4)}, s_n^{(2)}, s_n\Delta^{(4)}] & & \\
\cup \qquad\qquad \cap & & \\
\{e\} \longleftrightarrow \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n] & &
\end{array}
$$

次に $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(4)}}$ のヒルベルト級数を求める。

定理 32

$$\Phi(\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{S_n^{(4)}}, z) = \frac{1}{(1-z^4)(1-z^8)\cdots(1-z^{4n})}$$

$$\Phi(\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(4)}}, z) = \frac{1 + z^{2n} + z^{n(2n-1)} + z^{2n^2(2n-1)}}{(1-z^4)(1-z^8)\cdots(1-z^{4n})}$$

$$= \frac{1 + z^{n(2n-1)}}{(1-z^4)(1-z^8)\cdots(1-z^{4(n-1)})(1-z^{2n})}$$

証明

補題 25 より $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{S_n^{(4)}} = \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}]$ となる。$s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}$ の次数はそれぞれ 4, $8, \dots, 4n$ である。$s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}$ は代数的独立なので、定理 17 より

$$\Phi(\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{S_n^{(4)}}, z) = \frac{1}{(1-z^4)(1-z^8)\cdots(1-z^{4n})}$$

主定理 31 より

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n^{(4)}} &= \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}] \oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}]s_n^{(2)} \\
&\oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}]s_n\Delta^{(4)} \oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \cdots, s_n^{(4)}]s_n^{(2)}s_n\Delta^{(4)}
\end{aligned}
$$

が言える。$s_n^{(2)}$ と $s_n\Delta^{(4)}$ の次数はそれぞれ $2n$ と $n(2n-1)$ なので、

$$\Phi(\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{A_n^{(4)}},z) = \frac{1+z^{2n}+z^{n(2n-1)}+z^{2n^2(2n-1)}}{(1-z^4)(1-z^8)\cdots(1-z^{4n})}$$

$$= \frac{(1+z^{2n})(1+z^{n(2n-1)})}{(1-z^4)(1-z^8)\cdots(1-z^{4(n-1)})(1-z^{2n})}$$

$$= \frac{1+z^{n(2n-1)}}{(1-z^4)(1-z^8)\cdots(1-z^{4(n-1)})(1-z^{2n})}$$

が言える。

2.3 $S_n^{(4)}$の別の部分群によって不変な部分環を生成する斉次多項式

定義 33

$C_n^{(4)} :=< \nu_{ij}, \nu_{ij}^t \mid 1 \le i < j \le n >\subset S_n^{(4)} \subset M(n,\mathbf{C})$

ただし

$$\nu_{ij} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & i & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\nu_{ij}(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)^t := (x_1,\dots,ix_j,\dots,x_i,\dots,x_n)^t$

$$\nu_{ij}^t := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ 0 & \dots & i & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\nu_{ij}^t(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)^t := (x_1,\dots,x_j,\dots,ix_i,\dots,x_n)^t$

$S_n^{(4)}$ の生成元を別の元に取り替える。

命題 34

$S_n^{(4)} =< \sigma_{ij}, \xi_k \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n >$

ただし

$$\sigma_{ij} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\sigma_{ij}(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)^t := (x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n)^t$

$$\xi_k := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & i & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\xi_k(x_1,\dots,x_k,\dots,x_n)^t := (x_1,\dots,ix_k,\dots,x_n)^t$

証明

$\supseteq$ は $\sigma_{ij},\ \xi_j \in S_n^{(4)}$ より成り立つ。$\subseteq$ は $\sigma_{ij}\xi_j = \nu_{ij}$ より、$S_n^{(4)} =< \nu_{ij},\ \xi_k > \subset < \sigma_{ij},\ \xi_k >$ より成り立つ。

補題 35

$C_n^{(4)} :=< \nu_{ij}, \nu_{ij}^t \mid 1 \le i < j \le n >$。このとき、任意の $\sigma \in \{\sigma_{ij},\ \xi_k \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n\}$ に対して、$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{C_n^{(4)}} = (\sigma$ で不変な式 $) \oplus (\sigma$ で -1 倍される式 $)$ と表せる。

証明

まず、任意の $\sigma,\ \sigma' \in \{\sigma_{ij}, \xi_k \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n\}$ に対して、$\sigma\sigma' \in C_n^{(4)}$ が成り立つことを示す。

$\sigma_{12}\sigma_{13} \in C_n^{(4)},\ \sigma_{12}\sigma_{34} \in C_n^{(4)},\ \sigma_{12}\xi_1 \in C_n^{(4)},\ \sigma_{12}\xi_3 \in C_n^{(4)},\ \xi_1\xi_1 \in C_n^{(4)},\ \xi_1\xi_2 \in C_n^{(4)},$ を示せば十分である。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in C_n^{(4)}$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in C_n^{(4)}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in C_n^{(4)}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in C_n^{(4)}
$$

$$
\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in C_n^{(4)}
$$

$$
\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in C_n^{(4)}
$$

以上より、任意の $\sigma,\ \sigma' \in \{\sigma_{ij}, \xi_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$ に対して、$\sigma\sigma' \in C_n^{(4)}$ が成り立つことを示せた。
よって $f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{C_n^{(4)}}$ のとき、$\sigma\sigma(f) = f$ かつ $\sigma\sigma'(f) = f$。よって $\sigma(f) = \sigma^{-1}(f)$ であり、$\sigma(f) = {\sigma'}^{-1}(f) = \sigma'(f)$ が成り立つ。$f = \frac{f+\sigma(f)}{2} + \frac{f-\sigma(f)}{2}$ と分解すると、$\sigma'(\frac{f+\sigma(f)}{2}) = \frac{\sigma'(f)+f}{2} = \frac{f+\sigma(f)}{2}$ と $\sigma'(\frac{f-\sigma(f)}{2}) = \frac{\sigma'(f)-f}{2} = -\frac{f-\sigma(f)}{2}$ が成り立つ。
以上より $\sigma \in \{\sigma_{ij},\ \xi_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$ としたとき、
$\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{C_n^{(4)}} = (\sigma$ で不変な式 $) \oplus (\sigma$ で -1 倍される式 $)$ と表せることが言える。

補題 36

$\sigma \in \{\sigma_{ij},\ \xi_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$ とする。

このとき $f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ に対して、

$$\sigma(f) = f \text{ ならば } f \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{S_n^{(4)}}$$

証明

$S_n^{(4)} =< \sigma_{ij},\ \xi_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n >=< \nu_{ij},\ \xi_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n >$ より、補題 25 と同様に成り立つ。

補題 37

$\sigma \in \{\sigma_{ij},\ \xi_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$ とする。$f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ に対して、

$$\sigma(f) = -f \text{ ならば } f = q \prod_i x_i^2 \prod_{i<j} (x_i^4 - x_j^4) \quad \text{ただし} \sigma(q) = q$$

証明

$\xi_k \in \{\sigma_{ij},\ \xi_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$ より、補題 24 と同様に考えれば f は $\prod_i x_i^2$ で割り切れる。$\sigma_{ij} \in \{\sigma_{ij},\ \xi_k \mid 1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$ より、補題 28 と同様に考えれば f は $(x_i - x_j)$ で割り切れる。よって $f = g_3(x_i - x_j)$ と書ける。さらに

$$\tau_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & -1 & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \xi_k \xi_k$$

より、両辺に τ_jを作用させると $f = \tau_j(f) = \tau_j(g_3)(x_i + x_j)$ となる。よって f は $(x_i + x_j)$ で割り切れる。以上より f は $(x_i^2 - x_j^2)$ で割り切れる。

次に 補題 28 と同じように今 $\pi_{kl} := \xi_k \xi_l \sigma_{kl} \xi_l \xi_l$ とおく。π_{kl} は次のような行列である。

$$\pi_{kl} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -i & \ldots \\ 0 & \ldots & i & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\pi_{kl}(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_l,\ldots,x_n)^t := (x_1,\ldots,-ix_l,\ldots,x_k,\ldots,x_n)^t$

今 $\pi_{kl}(f) = (\xi_k\xi_l\sigma_{kl}\xi_l\xi_l)(f) = -f$ であるので、補題 30 と同様に考えれば、任意の $k < l$ に対して f は $(x_k + ix_l)$ で割り切れる。さらに $\tau_k = \xi_k\xi_k$ であるので、$\tau_k(f) = f$ である。$f = g_4(x_k + ix_l)$ と書いて、両辺にτ_lを作用させると $f = \tau_l(g_4)(x_k - ix_l)$ となるので、f は $(x_k^2 + x_l^2)$ で割り切れる。
以上より $f = q\prod_i x_i^2 \prod_{i<j}(x_i^4 - x_j^4)$ と書ける。$\sigma \in \{\sigma_{ij},\ \xi_k \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n\}$ のとき、$\sigma(q) = q$ となることも補題 28 と同様に分かる。

主定理 38
$C_n^{(4)} :=< \nu_{ij}, \nu_{ij}^t \mid 1 \le i < j \le n >$。このとき

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{C_n^{(4)}} &= \mathbb{C}[s_1^{(4)},\cdots,s_n^{(4)}] \oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)},\cdots,s_n^{(4)}]s_n^{(2)}\Delta^{(4)} \\ &= \mathbb{C}[s_1^{(4)},\cdots,s_n^{(4)},s_n^{(2)}\Delta^{(4)}]\end{aligned}$$

が成り立つ。

注意

$$\begin{aligned}\text{具体的には}\quad s_1^{(4)} &= \sum_i x_i^4 \\ s_2^{(4)} &= \sum_{i<j} x_i^4 x_j^4 \\ &\vdots \\ s_r^{(4)} &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} x_{i_1}^4 x_{i_2}^4 \cdots x_{i_r}^4 \\ &\vdots \\ s_n^{(4)} &= x_1^4 x_2^4 \cdots x_n^4 \\ s_n^{(2)}\Delta^{(4)} &= \prod_i x_i^2 \prod_{i<j}(x_i^4 - x_j^4) \quad \text{である。}\end{aligned}$$

主定理 38 の証明
$\supseteq$ は $s_1^{(4)},\ldots,s_n^{(4)},s_n^{(2)}\Delta^{(4)}$ は $\{\nu_{ij},\ \nu_{ij}^t \mid 1 \le i < j \le n\}$ によって不変なので成り立つ。
$\subseteq$ は補題 35 より、任意の $\sigma \in \{\sigma_{ij},\ \tau_k,\ \mu_{lm} \mid 1 \le i < j \le n,\ 1 \le k \le n,\ 1 \le l < m \le n\}$

に対して

$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{C_n^{(4)}} = (\sigma$ で不変な式 $)\oplus(\sigma$ で -1 倍される式 $)$ と表せる

補題 36 より σ で不変な式は $s_1^{(4)},\ldots,s_n^{(4)}$ の多項式で書ける。補題 37 より σ で -1 倍される式は $s_n^{(2)}\Delta^{(4)}$ で割り切れて、かつ商は $s_1^{(4)},\ldots,s_n^{(4)}$ の多項式で書ける。以上より定理は示された。

$(s_n^{(2)}\Delta^{(4)})^2 = (\prod_i x_i^2 \prod_{i<j}(x_i^4 - x_j^4))^2 \in \mathbb{C}[s_1^{(4)},\cdots,s_n^{(4)}]$ なので、$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{C_n^{(4)}}$ は $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{S_n^{(4)}}$ の 2 次の整拡大になっている。

$$
\begin{array}{lll}
S_n^{(2)} & \longleftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(2)},\ldots s_n^{(2)}] \\
\cup & & \cap \\
A_n^{(2)} & \longleftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(2)},\cdots,s_n^{(2)},s_1\Delta^{(2)}] \\
\cup & & \cap \\
\{e\} & \longleftrightarrow & \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
S_n^{(4)} & \longleftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(4)},\ldots s_n^{(4)}] \\
\cup & & \cap \\
B_n^{(4)} & \longleftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(4)},\ldots s_{n-1}^{(4)},s_n^{(2)}] \\
\cup & & \cap \\
A_n^{(4)} & \longleftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(4)},\ldots s_{n-1}^{(4)},s_n^{(2)},s_1\Delta^{(4)}] \\
\cup & & \cap \\
\{e\} & \longleftrightarrow & \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
S_n^{(4)} & \longleftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(4)},\ldots s_n^{(4)}] \\
\cup & & \cap \\
C_n^{(4)} & \longleftrightarrow & \mathbb{C}[s_1^{(4)},\ldots s_n^{(4)},s_1^{(2)}\Delta^{(4)}] \\
\cup & & \cap \\
\{e\} & \longleftrightarrow & \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]
\end{array}
$$

次に、$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{C_n^{(4)}}$ のヒルベルト級数を求める。

定理 39

$$\Phi(\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{C_n^{(4)}},z) = \frac{1+z^{2n^2}}{(1-z^4)(1-z^8)\cdots(1-z^{4n})}$$

証明
定理 32 より

$$\Phi(\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{S_n^{(4)}},z)=\frac{1}{(1-z^4)(1-z^8)\cdots(1-z^{4n})}$$

主定理 38 より

$$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{C_n^{(4)}}=\mathbb{C}[s_1^{(4)},\cdots,s_n^{(4)}]\oplus\mathbb{C}[s_1^{(4)},\cdots,s_n^{(4)}]s_n^{(2)}\Delta^{(4)}$$

であり、$s_n^{(2)}\Delta^{(4)}$ の次数は $2n^2$ なので、

$$\Phi(\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{C_n^{(4)}},z)=\frac{1+z^{2n^2}}{(1-z^4)(1-z^8)\cdots(1-z^{4n})}$$

が成り立つ。

2.4 $C_n^{(4)}$の部分群に関する予想

ここでは、群 $C_2^{(4)}$ について考える。$C_2^{(4)}$ は 16 個の元をもつ。$C_2^{(4)}$ の部分群として、まず $C_2^{(4)}\cap B_2^{(4)}$ がある。

定義 40
$D_2^{(4)}:=C_2^{(4)}\cap B_2^{(4)}$

$D_2^{(4)}$ は 8 個の元を持つ。

命題 41
$D_2^{(4)}=<\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i&0\\0&i\end{pmatrix}>$

命題 42

$$\Phi(\mathbb{C}[x,y]^{D_2^{(4)}},z)=\frac{1+z^4}{1-z^4}$$

モーリーンの定理を使って、ヒルベルト級数を計算した。

定義 43
${D'_2}^{(4)} :=< \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} >$

命題 44

$$\Phi(\mathbb{C}[x,y]^{{D'_2}^{(4)}}, z) = \frac{1+z^4}{(1-z^4)(1-z^8)}$$

$C_2^{(4)}$ には $D_2^{(4)}$ とは別の部分群がある。

定義 45
$E_2^{(4)} :=< \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} >$

$C_2^{(4)} =< \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix} >$
なので、$E_2^{(4)}$ は $C_2^{(4)}$ から転置行列を除いた群である。

命題 46

$$\Phi(\mathbb{C}[x,y]^{E_2^{(4)}}, z) = \frac{1+z^4+2z^8}{(1-z^4)(1-z^8)}$$

証明
モーリーンの定理を使って、ヒルベルト級数を計算した。

予想 47

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x,y]^{E_2^{(4)}} &= \mathbb{C}[x^4+y^4, x^4y^4] \\ &\oplus \mathbb{C}[x^4+y^4, x^4y^4]xy(x^2-iy^2) \\ &\oplus \mathbb{C}[x^4+y^4, x^4y^4]x^2y^2(x^4-y^4) \\ &\oplus \mathbb{C}[x^4+y^4, x^4y^4]x^3y^3(x^2+iy^2) \end{aligned}$$

が成り立つ。

定義 48
$E_n^{(4)} :=< \nu_{kl} \mid 1 \leq k < l \leq n >\subset C_n^{(4)} \subset S_n^{(4)}$
ただし

$$\nu_{kl} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & i & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\nu_{kl}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_l, \dots, x_n)^t := (x_1, \dots, ix_l, \dots, x_k, \dots, x_n)^t$

予想 49

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{E_n^{(4)}} &= \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \dots, s_n^{(4)}] \\ &\oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \dots, s_n^{(4)}] s_n \prod_{k<l} (x_k^2 - i x_l^2) \\ &\oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \dots, s_n^{(4)}] s_n^{(2)} \prod_{k<l} (x_k^4 - x_l^4) \\ &\oplus \mathbb{C}[s_1^{(4)}, \dots, s_n^{(4)}] s_n^{(3)} \prod_{k<l} (x_k^2 + i x_l^2) \end{aligned}$$

が成り立つ。

注意

$$\begin{aligned} \text{具体的には} \quad s_1^{(4)} &= \sum_i x_i^4 \\ s_2^{(2)} &= \sum_{i<j} x_i^4 x_j^4 \\ &\vdots \\ s_n^{(4)} &= x_1^4 x_2^4 \cdots x_n^4 \\ s_n^{(3)} &= x_1^3 x_2^3 \cdots x_n^3 \\ s_n^{(2)} &= x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2 \quad \text{である。} \end{aligned}$$

予想 50

$$\Phi(\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]^{E_n^{(4)}},z)=\frac{1+z^{n^2}+z^{2n^2}+z^{n^2+2n}}{(1-z^4)(1-z^8)\cdots(1-z^{4n})}$$

が成り立つ。

$S_n^{(4)}$, $B_n^{(4)}$, $A_n^{(4)}$, $C_n^{(4)}$, $D_n^{(4)}$, ${D'}_n^{(4)}$, $E_n^{(4)}$ の間には次のような包含関係がある。($\rightarrow$ は $\supset$ の意味で用いた。)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & S_n^{(4)} & & & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow & & & \\
 & & B_n^{(4)} & & & & C_n^{(4)} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & \\
A_n^{(4)} & & & & D_n^{(4)} & & & & E_n^{(4)} \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & {D'}_n^{(4)} & & & &
\end{array}
$$

3 付録

付録において、n 次交代群によって不変な部分環は、基本対称式と差積によって生成されることの証明を紹介する。まず、いくつかの準備を行う。

補題 1

A_n を n 次交代群とする。このとき、$f\in\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{A_n}$ ならば $\sigma_{ij}(f)=\sigma_{kl}(f)$

ただし、$\sigma_{ij}\in M(\mathbb{C},n)$ であり、$\sigma_{ij}(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n)^t=(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_n)^t$

証明

A_n は交代群なので、交代群の定義より $\sigma_{ij}\sigma_{kl}\in A_n$ となる。よって、$\sigma_{ij}\sigma_{kl}(f)=f$. さらに $\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{kl}(f)=\sigma_{kl}(f)$. 以上より、$\sigma_{ij}(f)=\sigma_{kl}(f)$ が得られる。

補題 2
A_n を n 次交代群とする。このとき、A_n で不変な多項式は、対称式と交代式の和で書ける。
証明
補題 1 より任意の $1 \leq i < j \leq n,\ 1 \leq k < l \leq n$ について σ_{ij} と σ_{kl} を f に作用させるとき、区別しないで考えることができる。よって任意の $\sigma \in \{\sigma_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ をとる。 $f = \frac{f+\sigma(f)}{2} + \frac{f-\sigma(f)}{2}$ と分解したとき、$\sigma(\frac{f+\sigma(f)}{2}) = \frac{\sigma(f)+f}{2} = \frac{f+\sigma(f)}{2}$ と $\sigma(\frac{f-\sigma(f)}{2}) = \frac{\sigma(f)-f}{2} = -\frac{f-\sigma(f)}{2}$ が成り立つ。よって補題は示された。

補題 3
$f, g \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ とする。このとき $\sigma_{ij}(f) = -f$ ならば $f = g\prod_{i<j}(x_i - x_j)$. ただし $\sigma_{ij}(g) = g$

証明
まず f を $(x_1 - x_2)$ で割ると、$f = q(x_1 - x_2) + r(x_2, x_3, \dots x_n)$ を得る。$-f = \sigma_{12}(f) = -\sigma_{12}(q)(x_1 - x_2) + r(x_1, x_3, \dots x_n)$ より、$r(x_2, x_3, \dots x_n) - r(x_1, x_3, \dots x_n) = h(x_1, \dots x_n)(x_1 - x_2)$, (ただし $h \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$) より
$2f = (q + \sigma_{12}(q))(x_1 - x_2) + h(x_1 - x_2) = (q + \sigma_{12}(q) + h)(x_1 - x_2)$. よって、$f$ は $(x_1 - x_2)$ で割り切れる。同様に f は $\forall i \neq j$ について $(x_i - x_j)$ で割り切れる。よって $f = g\prod_{i<j}(x_i - x_j)$ と表せる。さらに、$\sigma_{ij}(f) = -\sigma_{ij}(g)\prod_{i<j}(x_i - x_j)$. さらに $f = \sigma_{ij}(g)\prod_{i<j}(x_i - x_j)$ となるので、$\sigma_{ij}(g) = g$ が得られる。

以下のよく知られた定理を使う。
定理 4(7 章、§ 1、定理３「グレブナ基底と代数多様体入門」)
S_n を n 次対称群とする。このとき、

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}]^{S_n} = \mathbb{C}[s_1, \cdots, s_n]$$

が成り立つ。

注意

$$\text{具体的には}\quad \begin{aligned} s_1 &= \sum_i x_i \\ s_2 &= \sum_{i<j} x_i x_j \\ &\vdots \\ s_r &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} \\ &\vdots \\ s_n &= x_1 x_2 \cdots x_n \quad \text{である。(記号 12 を見よ。)} \end{aligned}$$

以上の準備を行った上で、次の命題を示す。

命題 5(Example1.6 「An Introduction to invariants and Moduli」)

A_n を n 次交代群とする。このとき、

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]^{A_n} &= \mathbb{C}[s_1, \cdots, s_n] \oplus \mathbb{C}[s_1, \cdots, s_n]\Delta \\ &= \mathbb{C}[s_1, \cdots, s_n, \Delta] \end{aligned}$$

が成り立つ。

注意

$$\text{具体的には}\quad \begin{aligned} s_1 &= \sum_i x_i \\ s_2 &= \sum_{i<j} x_i x_j \\ &\vdots \\ s_r &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} \\ &\vdots \\ s_n &= x_1 x_2 \cdots x_n \\ \Delta &= \prod_{i<j} (x_i - x_j) \quad \text{である。} \end{aligned}$$

証明

補題 2 より、n 次交代群で不変な多項式は、対称式と交代式の和で書かれる。さらに補題 3 より、交代式は差積と対称式の積で書かれる。最後に定理 4 によって、対称式は基本対称式の多項式で書かれることが分かるで、$\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{A_n} = \mathbb{C}[s_1,\cdots,s_n] \oplus \mathbb{C}[s_1,\cdots,s_n]\Delta = \mathbb{C}[s_1,\cdots,s_n\Delta]$ となることが示された。

$(\Delta)^2 = (\prod_{i<j}(x_i - x_j))^2 \in \mathbb{C}[s_1,\cdots,s_n]$ より $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{A_n}$ は $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]^{S_n}$ の２次の整拡大になっている。

$$
\begin{array}{lll}
S_n \longleftrightarrow \mathbb{C}[s_1,\ldots s_n] & & \\
\cup \qquad\qquad\quad \cap & & 2\text{次の整拡大} \\
A_n \longleftrightarrow \mathbb{C}[s_1,\cdots,s_n,\Delta] & & \\
\cup \qquad\qquad\quad \cap & & \\
\{e\} \longleftrightarrow \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n] & &
\end{array}
$$

4　感謝

楫元先生には大変長い時間にわたって、数多くのご指導をいただきました。この研究の動機付けである、正方形や立方体の回転群を４次元以上に拡張してみるというアイディアは楫先生に与えていただきました。その後、研究が何も進まない時期が長く続きましたが、楫先生からその都度素晴らしいアドバイスを頂きました。そのおかげでなんとか論文を形にすることができました。楫先生に感謝いたします。ありがとうございました。

参考文献

[1] D. コックス, J. リトル, D. オシー「グレブナ基底と代数多様体入門 」シュプリンガー・ジャパン　1991

[2] B.Sturmfels, *Algorithms in Invariant Theory*, Text and Monographs in Symbolic Computation. Springer-Verlag, New York-Vienna, 1993

[3] S.Mukai, *An Introduction to invariants and Moduli*, Cambridge University Press, 2003

[4] J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, 1990

[5] 菅本守「超立方体回転群により不変な部分環を生成する斉次多項式について」卒業論文 2010