2 月 8 日発表会資料

グレブナー基底系の有用性とグレブナー基底との比較

数学応用数理専攻　修士 2 年

椙研究室所属

桜井佑樹 (5111a034-0)

はじめに

グレブナー基底系 (Gröbner System, 以下 G.S.) とは包括的グレブナー基底 (Comprehensive Gröbner Basis, 以下 C.G.B.) を構成するために重要な概念であり, パラメータを含む多項式環上で G.B. を考えるときに有用なものである. C.G.B. の定義と, G.S. を用いたそれの構成法は Weispfenning [1] によって示された. それを含め多くの論文に C.G.B. および G.S. を用いた計算例が示されているが, G.B. と比較しての有用性に関しては記述されていない. 加えて, C.G.B. が G.B. となっているのかについても触れられていない. そこで本論文では G.S. の有用性を G.B. と比較し, また C.G.B. の定義から, それが G.B. となっていることが示せるのかについて考察した.

C.G.B. の定義

k を体とする. $u_1,\ldots,u_m$ をパラメータ変数, $x_1,\ldots,x_n$ を主変数とし, $K=k(u_1,\ldots,u_m)=k(\underline{\boldsymbol{u}})$, $S=K[x_1,\ldots,x_n]=K[\underline{\boldsymbol{x}}]$ とおく. パラメータ変数 $u_1,\ldots,u_m$ に, それぞれ k の元 $k_1,\ldots,k_m$ を代入して得られる写像 $\sigma : k[\underline{\boldsymbol{u}}] \longrightarrow k$ を考える. $q\in k[\underline{\boldsymbol{u}}]$ が $\sigma(q)\neq 0$ をみたすとき, $\sigma\left(\dfrac{p}{q}\right)=\dfrac{\sigma(p)}{\sigma(q)}$ と定める. さらに $f=\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in S$ に対して, $\sigma(f)=\sum_\alpha \sigma(c_\alpha)x^\alpha$ と定めることで σ を拡張して考えることができる. この写像を $\sigma : S\longrightarrow k[\underline{\boldsymbol{x}}]$ と表して, 特殊化 (*specialization*) とよぶ.

$\Sigma=\{\,\sigma \mid \sigma\text{は特殊化}\,\}$ と定め, $F\subseteq S$ に対し $\sigma(F)=\{\,\sigma(f)\mid f\in F\,\}$ とする.

Definition

有限集合 $G\subseteq S$ がイデアル I の *C.G.B.* であるとは, 任意の $\sigma\in\Sigma$ に対して, $\sigma(G)$ が $\langle\sigma(I)\rangle$ の G.B. となることをいう.

G.S. の有用性と G.B. との比較

図 1 のようなロボットアームのモデルを考える. ロボットアームの手が付いている回転関節の座標 (a,b) が与えられたたとき, それを満たす $c_i=\cos\theta_i$, $s_i=\sin\theta_i$ を求めるためには, $I=\langle f_1, f_2, f_3, f_4\rangle$ の零点集合を考えればよい. そのために I の $\mathbf{R}(a,b)[c_1,c_2,s_1,s_2]$ 上での G.S. を求めた. 計算には Reduce のコマンド gsys を使用し, $c_2>s_2>c_1>s_1$ の辞書式順序で計算した. 計算の結果, G.S. は①〜⑤の 5 つの Gröbner pair からなることが分った. 詳細は以下のとおりである.

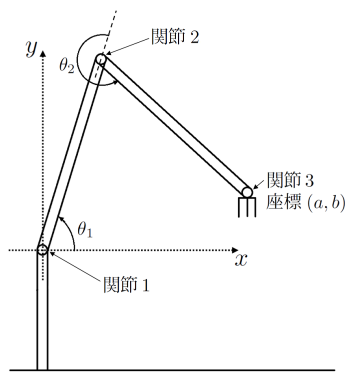

図 1: ロボットアーム

{

①{$a^2+b^2\neq 0\wedge a\neq 0\wedge b\neq 0$,
{$c_2^2+s_2^2-1, c_2c_1-s_2s_1+c_1-a, c_2s_1+s_2c_1+s_1-b, c_2-ac_1-bs_1+1, s_2^2-bs_2c_1+as_2s_1-(2a)c_1-(2b)s_1+(a^2+b^2), s_2c_1+ac_1s_1+bs_1^2-b, s_2s_1-bc_1s_1+as_1^2, (4a^3)s_2+(4a^4+8a^2b^2+4b^4)s_1^3-(4a^4b+8a^2b^3+4b^5)s_1^2+(a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6)s_1-(2a^4b+2a^2b^3), c_1^2+s_1^2-1, (2a)c_1s_1+(2b)s_1^2-(a^2+b^2)s_1, (a^3+ab^2)c_1+(2a^2+2b^2)s_1^2-(a^2b+b^3)s_1-2a^2, (4a^4b+8a^2b^3+4b^5)s_1^3-(4a^4b^2+8a^4+8a^2b^4+8a^2b^2+4b^6)s_1^2+(a^6b+3a^4b^3+4a^4b+3a^2b^5+4a^2b^3+b^7)s_1-(2a^6+4a^4b^2-8a^4+2a^2b^4), (4a^4+4a^2b^2)s_1^2-(4a^4b+4a^2b^3)s_1+(a^6+2a^4b^2-4a^4+a^2b^4)$}},

②$\{a^2+b^2\neq 0\wedge a\neq 0\wedge a^2b+b^3=0,$
$\{c_2^2+s_2^2-1, c_2c_1-s_2s_1+c_1-a, c_2s_1+s_2c_1+s_1-b, c_2-ac_1-bs_1+1, s_2^2-bs_2c_1+as_2s_1-(2a)c_1-(2b)s_1+(a^2+b^2), s_2c_1+ac_1s_1+bs_1^2-b, s_2s_1-bc_1s_1+as_1^2, (4a^3)s_2+(4a^4+8a^2b^2+4b^4)s_1^3-(4a^4b+8a^2b^3+4b^5)s_1^2+(a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6)s_1-(2a^4b+2a^2b^3), c_1^2+s_1^2-1, (2a)c_1s_1+(2b)s_1^2-(a^2+b^2)s_1, (a^3+ab^2)c_1+(2a^2+2b^2)s_1^2-(a^2b+b^3)s_1-2a^2, -(4a^4b^2+8a^4+8a^2b^4+8a^2b^2+4b^6)s_1^2+(a^6b+3a^4b^3+4a^4b+3a^2b^5+4a^2b^3+b^7)s_1-(2a^6+4a^4b^2-8a^4+2a^2b^4)\}\},$

③$\{a\neq 0\wedge a^3+ab^2=0,$
$\{-2a^2\}\},$

④$\{b\neq 0\wedge a=0,$
$\{c_2^2+s_2^2-1, c_2c_1-s_2s_1+c_1-a, c_2s_1+s_2c_1+s_1-b, c_2-ac_1-bs_1+1, s_2^2-bs_2c_1+as_2s_1-(2a)c_1-(2b)s_1+(a^2+b^2), s_2c_1+ac_1s_1+bs_1^2-b, s_2s_1-bc_1s_1+as_1^2, s_2-bc_1, c_1^2+s_1^2-1, (2b)c_1s_1-(a^2+b^2)c_1, (2b)s_1^2-(a^2+b^2)s_1, (2b^2)s_1-(a^2b+b^3)\}\},$

⑤$\{a=0\wedge b=0,$
$\{c_2^2+s_2^2-1, c_2c_1-s_2s_1+c_1-a, c_2s_1+s_2c_1+s_1-b, c_2-ac_1-bs_1+1, s_2^2-bs_2c_1+as_2s_1-(2a)c_1-(2b)s_1+(a^2+b^2), s_2c_1+ac_1s_1+bs_1^2-b, s_2s_1-bc_1s_1+as_1^2, s_2, c_1^2+s_1^2-1\}\}$
$\}$

例えば最初の Gröbner pair を見れば,$a^2+b^2\neq 0\wedge a\neq 0\wedge b\neq 0$ のときの G.B. が分かり,s_i, c_i を求めることができる．G.B. に比べ G.S. は,アルゴリズムにより自動的に解を求めることができる点で優れている.

C.G.B. と G.B. の関係

定理

k を無限体, I を $k(\underline{\boldsymbol{u}})[\underline{\boldsymbol{x}}]$ のイデアル, $G=\{g_1,\dots,g_r\}$ を I の C.G.B. とする．このとき G は I の G.B. である.

証明の概要

任意に $f\in I$ をとる．$\mathrm{LT}(f)=\frac{p}{q}x^{\alpha}$ とおき，$g_i=\sum_{j=1}^{s_i}\frac{p_{i,j}}{q_{i,j}}x^{\alpha_{i,j}}$ とする.
$\Sigma_{\neq 0}=\{\sigma\in\Sigma\,|\,\sigma(p),\,\sigma(q),\,\sigma(p_{i,j}),\,\sigma(q_{i,j})\neq 0\,(1\leq i\leq r,\,1\leq j\leq s_i)\}$
とおけば,k が無限体より $\Sigma_{\neq 0}$ は空でない．したがって,ある $\rho\in\Sigma_{\neq 0}$ が存在する. この ρ について，G は I の C.G.B. であるから,ある $g_i\in G$ が存在して，$\mathrm{LT}(\rho(g_i))|\mathrm{LT}(\rho(f))$ となる. このとき $\mathrm{LM}(\rho(g_i))=\mathrm{LM}(g_i)$，$\mathrm{LM}(\rho(f))=\mathrm{LM}(f)$ が成立している．よって $\mathrm{LT}(g_i)|\mathrm{LT}(f)$ となり示せた.

より一般に,多項式環を係数環とする $k[\underline{\boldsymbol{u}}][\underline{\boldsymbol{x}}]$ に対しても C.G.B. を考えることができるが，その場合は定理は成立しない．実際,$I=\langle u_1x_1,x_2\rangle\subseteq k[u_1][x_1,x_2]$ に対して，$G=\{u_1^2x_1,\,x_2\}$ を考えれば，G は I の包括的グレブナー基底になっているが,グレブナー基底ではない.

参考文献

[1] V.Weispfenning. Comprehensive Gröbner Bases. *Journal of Symbolic Computation*, 14:1-29pp, 1992.

[2] W.Dunn. Algorithms and applications of comprehensive Groebner bases. Thesis(Ph.D.)-The University of Arizona, 1995.

[3] D.Cox, J.Little, D.O'Shea. *Ideals,Varieties,and Algorithms.* Springer-Verlag, New York, 1996.