グレブナー基底系の有用性とグレブナー基底との比較

楫研究室所属　修士2年
桜井佑樹

グレブナー基底系(G.S.)の紹介

- 包括的グレブナー基底(Complehensive Gröbner Basis,以下C.G.B.）はパラメータを含む多項式環上でグレブナー基底(G.B.)を考えるときに有用な概念

- C.G.B.を構成するときに必要となるのがグレブナー基底系(Gröbner System,以下G.S.）.

包括的グレブナー基底(C.G.B.)の紹介

- パラメータを含む多項式環において, グレブナー基底の理論がそのまま適用できるとは限らない.

- 係数体がパラメータを含んでいる多項式環$\mathbf{Q}(u_1)[x_1, x_2]$のイデアル$I = \langle u_1 x_1 + x_2,\ x_2 + 1 \rangle$を考える.
- $\{u_1 x_1 + x_2,\ x_2 + 1\}$は$I$のG.B.($x_1 > x_2$)だが, $u_1 = 0$を代入すると, 代入後のIのG.B.ではなくなってしまう.

- どんな代入に対しても代入後のイデアルのG.B.となる集合をC.G.B.とよぶ.

研究動機

- V.Weispfenning(1992)によって, C.G.B.の定義と存在が示され, G.S.の計算アルゴリズムが与えられた.

- それ以来C.G.B.や G.S.の計算例を示した論文は多くあるが, G.B.と比較して考察しているものは少ない.
- 加えてC.G.B.がG.B.であるのかについて触れられてもいない.
- そこで私は上記2点について考察した.

包括的グレブナー基底(C.G.B.)の定義

- k: 体
  $K = k(u_1, \ldots, u_m) = k(\underline{\boldsymbol{u}})$
  $S = K[x_1, \ldots, x_n] = K[\underline{\boldsymbol{x}}]$
  I を S のイデアルとする.
  I の有限部分集合 G が I のC.G.B.であるとは,

任意の特殊化 $\sigma : S \longrightarrow k[\underline{\boldsymbol{x}}]$
に対して, $\sigma(G)$ が $\langle \sigma(I) \rangle$ のG.B.となることをいう.

C.G.B.の例

- $G = \{u_1x_1 + x_2,\ x_2 + 1\} \subseteq \mathbf{Q}(u_1)[x_1, x_2]$
  $I = \langle G \rangle$ を考える.
  辞書式順序 $x_1 > x_2$ の下でのC.G.B.は

  $\{u_1x_1 + x_2, x_2 + 1, u_1x_1 - 1\}$

  である.

グレブナー基底系の定義の準備

- 定義（condition）

$k(\underline{\boldsymbol{u}})\backslash k$ の有限部分集合A, Bの組$\gamma = (A, B)$ が条件(condtion)であるとは

(1) $A \cap B = \phi$

(2) $f = \dfrac{p}{q} \in k(\underline{\boldsymbol{u}})$ がAまたはBに含まれるとき$q \in B$

$$\Sigma = \{\sigma \mid \sigma \text{は特殊化}\}$$

$$\Sigma_\gamma = \left\{ \sigma \in \Sigma \,\middle|\, \sigma(f) \begin{cases} = 0\,(\forall f \in A) \\ \neq 0\,(\forall f \in B) \end{cases} \right\}$$

グレブナー基底系(G.S.)の定義

- 定義(G.S.)

  I を $S = K[x_1, \dots, x_n]$ のイデアルとする.
  $GS = \{(\gamma_1, G_1), \dots (\gamma_s, G_s)\}$ が I の
  G.S.であるとは,

  (1) $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{s} \Sigma_{\gamma_i}$

  (2) G_i は I の有限部分集合

  (3)任意の i に対して $\sigma(G_i)$ は $\langle \sigma(I) \rangle$ のG.B.
  ($\forall \sigma \in \Sigma_{\gamma_i}$)

C.G.B.の構成法

- $G = \bigcup_{i=1}^{s} G_i$ は I のC.G.B.となる.

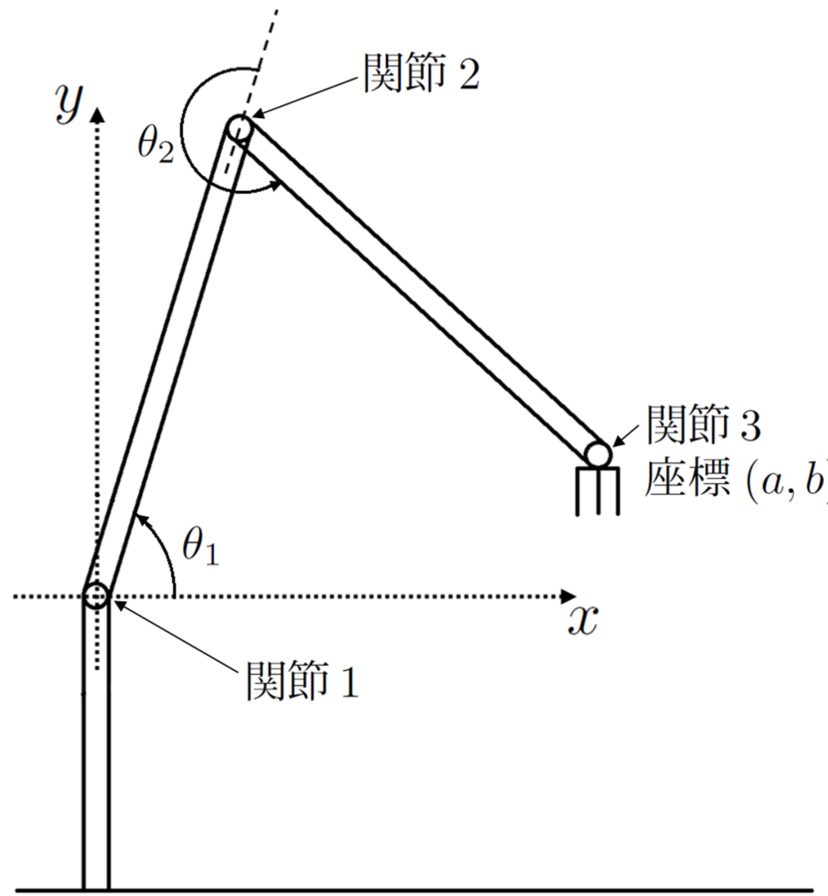
- $GS = \{(\gamma_1, G_1), \ldots (\gamma_s, G_s)\}$
  における $(\gamma_i,\ G_i)$ を Gröbner pair とよぶ.

- G.S.を求めるアルゴリズムは
  V.Weispfenning(1992)によって与えられた.

グレブナー基底系(G.S.)と
グレブナー基底(G.B.)の比較

- 図のような平面上のロボットアームを考える.

問.
アームの手が付いている関節の座標 (a, b) が与えられたとき取るべき θ_1 と θ_2 を求めたい.



G.S.とG.B.の比較

- (a, b) を θ_1, θ_2 で表すと
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos\theta_1 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) + \sin\theta_1 \end{pmatrix}$$
となる.
$$c_i = \cos\theta_i \qquad s_i = \sin\theta_i$$
とおきかえて, 次の f_1, f_2, f_3, f_4 を c_i, s_i について解く.
$$\begin{cases} f_1 = l_3(c_1c_2 - s_1s_2) + l_2c_1 - a \\ f_2 = l_3(s_1c_2 - c_1s_2) + l_2s_1 - b \\ f_3 = c_1^2 + s_1^2 - 1 \\ f_4 = c_2^2 + s_2^2 - 1 \end{cases}$$

G.S.とG.B.の比較

$I = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$ のG.B.は以下のようになる.

$$\{4(a^2+b^2)s_1^2 - 4b(a^2+b^2)s_1 + (a^4+2a^2b^2-4a^2+b^4),$$
$$2ac_1 + 2bs_1 - (a^2+b^2),$$
$$s_2 - bc_1 + as_1,$$
$$c_2 + c_1^2 - ac_1 + s_1^2 - bs_1\}.$$

(単項式順序は $c_2 > s_2 > c_1 > s_1$)

- $a^2+b^2 \neq 0$ かつ $b \neq 0$ のときの c_i と s_i は求められるが, $b=0$ の場合などを考えようとするとG.B.を計算し直さなければならない.

G.S.とG.B.の比較

- $I = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$ のG.S.を計算すると, 5つのGröbner pair からなることがわかる. その5つの場合それぞれについて c_i と s_i を求めることで問題が解ける.

- G.S.は最初からパラメータの場合分けをするので,アルゴリズムによって自動的に解が出せる.

包括的グレブナー基底(C.G.B.)とグレブナー基底(G.B.)の関係

- 定理

  k を無限体とする. $k(\underline{\boldsymbol{u}})[\underline{\boldsymbol{x}}]$ のイデアルを I , I の C.G.B を $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$ とする.
  このとき G は I のG.B.となっている.

- より一般に $k[\underline{\boldsymbol{u}}][\underline{\boldsymbol{x}}]$ に対してもC.G.B.を考えることができるが, その場合は必ずしも定理は成立しない.
- 実際 $I = \langle u_1 x_1, x_2 \rangle \subseteq k[u_1][x_1, x_2]$ に対して $G = \{u_1^2 x_1,\ x_2\}$ はC.G.B.だが G.B.ではない.

証明のoutline

任意に $f \in I$ をとる.
(ある $g_i \in G$ が存在して $\mathrm{LT}(g_i)|\mathrm{LT}(f)$ を示せばよい)
$\mathrm{LT}(f) = \frac{p}{q}x^{\alpha}$, $g_i = \sum_{j=1}^{s_i} \frac{p_{i,j}}{q_{i,j}} x^{\alpha_{i,j}}$
とあらわし,
$$\Sigma_{\neq 0} = \{\sigma \in \Sigma \,|\, \sigma(p), \sigma(q), \sigma(p_{i,j}), \sigma(q_{i,j}) \neq 0 \,(1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s_i)\}$$
とおく.
このとき, k は無限体より $\Sigma_{\neq 0}$ は空でない.
よってある $\rho \in \Sigma_{\neq 0}$ が取れる.
C.G.B.の仮定より $\mathrm{LT}(\rho(g_i))|\mathrm{LT}(\rho(f))$.
したがって $\mathrm{LT}(g_i)|\mathrm{LT}(f)$.