

グレブナー基底系の有用性と グレブナー基底との比較

2012 年度修士論文

早稲田大学院基幹理工学研究科

数学応用数理専攻

5111a034-0

桜井佑樹

指導教員名 楫 元

平成 25 年 2 月 3 日

目 次

序文	2
1 包括的グレブナー基底の 定義と構成法	3
2 グレブナー基底系の有用性と グレブナー基底との比較	6
3 包括的グレブナー基底と グレブナー基底の関係	11
参考文献	12

序文

グレブナー基底系 (Gröbner System) とは 包括的グレブナー基底 (Comprehensive Gröbner Basis) を構成するために重要な概念であり, パラメータを含む多項式環上でグレブナー基底を考えるときに有用なものである.

多項式環上のグレブナー基底の理論はよく知られているが, パラメータ付きの多項式環の場合にもそのまま適用できるとは限らない. 例えば, 係数体がパラメータを含んでいる多項式環上のイデアル I を考え, そのグレブナー基底 G を求めたとする. G と I を構成する多項式それぞれのパラメータ変数に具体的な値を代入したとき, 代入後も G はイデアル I のグレブナー基底となっているだろうか. 一般には代入によって先頭項が変わってしまうことが起こりえるため, 代入後も G がグレブナー基底となるかどうかは分からない. どんな代入をしても, 代入後の I のグレブナー基底となるような集合を包括的グレブナー基底という.

包括的グレブナー基底の厳密な定義と, グレブナー基底系を用いたその構成法は Weispfenning [1] によって示された. その結果から, Dunn [2] により, 多項式環の係数体が特定の条件下にある場合がまとめなおされた. そのどちらの論文にも包括的グレブナー基底およびグレブナー基底系を用いた計算例が示されているが, グレブナー基底と比較しての有用性に関しては記述されていない. 加えて, 包括的グレブナー基底がグレブナー基底となっているのかについても触れられていない. グレブナー基底は重要な概念であるから, それとの比較や関係性についての考察も十分に必要がある. そこで本論文ではグレブナー基底系の有用性をグレブナー基底と比較し, また包括的グレブナー基底の定義から, それがグレブナー基底となっていることが示せるのかについて考察した.

本論文の第一章では包括的グレブナー基底の定義やグレブナー基底系を用いた構成法の確認をしている. グレブナー基底系の, グレブナー基底と比べての有用性については第二章にまとめた. 第三章では, 条件付きで包括的グレブナー基底がグレブナー基底であることを証明し, 定理が成立しない例をあげている.

1 包括的グレブナー基底の 定義と構成法

包括的グレブナー基底とは、パラメータ変数を含む多項式環とそのパラメータ変数への代入を考えたときに有用となるものである。例えば、 u_1 をパラメータ変数、 x_1, x_2 を主変数とし、 $G = \{u_1x_1 + x_2, x_2 + 1\} \subseteq \mathbb{Q}(u_1)[x_1, x_2]$ を考える。単項式順序を $x_1 > x_2$ の辞書式順序で定めると、 $u_1 = 1$ のとき $G = \{x_1 + x_2, x_2 + 1\}$ となり、 G は G で生成されるイデアル $\langle G \rangle$ のグレブナー基底になっている。一方で $u_1 = 0$ を代入すると $G = \{x_2, x_2 + 1\}$ となり、このときの G は $\langle G \rangle$ のグレブナー基底にはなっていない。この例では $G' = \{u_1x_1 + x_2, x_2 + 1, u_1x_1 - 1\}$ とおけば、任意の $\mathbb{Q}$ の元の代入に対して、代入後の G' は $\langle G' \rangle$ のグレブナー基底になっている。この G' のように、任意の代入に対して代入後のイデアルのグレブナー基底になるような集合を包括的グレブナー基底という。その存在と構成法は Weispfenning [1] によって示された。

この章では包括的グレブナー基底の定義と、それを構成するために必要となるグレブナー基底系について確認する。ここでの議論については主に Dunn [2] からの引用であり、詳しくはそちらを参照されたい。

k を体とする。 $u_1, \dots, u_m$ をパラメータ変数、 $x_1, \dots, x_n$ を主変数とし、
 $Q = k(u_1, \dots, u_m) = k(u)$
 $S = Q[x_1, \dots, x_n] = Q[x]$
とおく。

正整数 $a_1, \dots, a_n$ に対して $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ とし、 $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} = x^\alpha$ と表す。 $M = \{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n\}$ とおき、 M 上の単項式順序を $\succ$ とする。 $f \in S$ に対して、 $\succ$ に関する f の先頭項を $\text{LT}(f)$ とかく。 $\text{LT}(0) = \text{LC}(0) = \text{LM}(0) = 0$ と定義する。 $\text{LT}(f) = c_\alpha x^\alpha$ ($c_\alpha \in Q$) とおいたとき、 $\text{LC}(f) = c_\alpha$ 、 $\text{LM}(f) = x^\alpha$ と定める。 $F \subseteq S$ のとき $\text{LT}(F) = \{\text{LT}(f) \mid f \in F\}$ と定め、 F で生成されるイデアルを $\langle F \rangle$ とかく。

Definition 1

I を S のイデアルとする。有限集合 $G \subseteq S$ が I のグレブナー基底であるとは、 $\langle \text{LT}(G) \rangle = \langle \text{LT}(I) \rangle$ が成り立つことをいう。

冒頭の例で考えれば、 $G_1 = \{x_1 + x_2, x_2 + 1\}$ 、 $I_1 = \langle G_1 \rangle$ については $\langle \text{LT}(I_1) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle = \langle \text{LT}(G_1) \rangle$ となるから、 G_1 は I_1 のグレブナー基底となっている。一方で $G_2 = \{x_2, x_2 + 1\}$ 、 $I_2 = \langle G_2 \rangle$ については $x_2 - (x_2 + 1) = -1 \in I_2$ だから $\langle \text{LT}(I_2) \rangle = \langle 1 \rangle \neq \langle \text{LT}(G_2) \rangle = \langle x_2 \rangle$ となり、 G_2 は I_2 のグレブナー基底ではない。

パラメータ変数 $u_1, \dots, u_m$ に, それぞれ k の元 $k_1, \dots, k_m$ を代入して得られる写像 $\sigma: k[u] \rightarrow k$ を考える. $q \in k[u]$ が $\sigma(q) \neq 0$ をみたすとき, $\sigma\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{\sigma(p)}{\sigma(q)}$ と定める. さらに $f = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \in S$ に対して, $\sigma(f) = \sum_{\alpha} \sigma(c_{\alpha}) x^{\alpha}$ と定めることで σ を拡張して考えることができる. この写像を $\sigma: S \rightarrow k[x]$ と表して, 特殊化 (*specialization*) とよぶ.

$\Sigma = \{\sigma \mid \sigma \text{ は特殊化}\}$ と定め, $F \subseteq S$ に対し $\sigma(F) = \{\sigma(f) \mid f \in F\}$ とする.

Definition 2

有限集合 $G \subseteq S$ がイデアル I の包括的グレブナー基底であるとは, 任意の $\sigma \in \Sigma$ に対して, $\sigma(G)$ が $\langle \sigma(I) \rangle$ のグレブナー基底となることをいう.

任意のイデアル I に対し包括的グレブナー基底が存在することは, Weispfenning [1] によって示された.

次にグレブナー基底系を導入する上で必要となる, 条件を定義する.

Definition 3

条件 (*condition*) $\gamma = (g, r)$ とは次を満たす集合の組である.

- (1) g, r は $Q \setminus k$ の有限部分集合で, $g \cap r = \emptyset$,
- (2) $f = \frac{p}{q}$ が g または r に含まれるとき, $q \in r$.

条件 γ に対して,

$$\Sigma_{\gamma} = \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma(f) = 0 (\forall f \in g), \sigma(f) \neq 0 (\forall f \in r)\}$$

と定める. 有限個の γ からなる集合 $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$ が被覆であるとは,

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^s \Sigma_{\gamma_i}$$

が成り立つことをいう.

$f \in S$ に対して, f の項 $c_{\alpha} x^{\alpha}$ が γ に関する条件付き先頭項であるとは, 任意の $\sigma \in \Sigma_{\gamma}$ について $\sigma(a) \neq 0$ かつ, $x^{\alpha'} \succ x^{\alpha}$ となる f の項 $c_{\alpha'} x^{\alpha'}$ すべてに対し $\sigma(c_{\alpha'}) = 0$ が成立することをいう. このとき $c_{\alpha} x^{\alpha} = \text{LT}_{\gamma}(f)$ とかく. 以下に条件付き先頭項の例を挙げる. $Q(u_1, u_2)[x_1, x_2]$ に対して $x_1 \succ x_2$ となる単項式順序をとり, $\gamma = (\{u_1\}, \{\})$ を考える. このとき $\Sigma_{\gamma} = \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma(u_1) = 0\}$ であるから, $f_1 = u_1 x_1 + (u_1 + 1)x_2$ に対しては $\text{LT}_{\gamma}(f_1) = (u_1 + 1)x_2$ である. しかし一方で $f_2 = u_2 x_1 + (u_1 + 1)x_2$ に対しては $\text{LT}_{\gamma}(f_2)$ は定まらない. なぜなら $\sigma(u_2) = 0$ となるかどうかは各 $\sigma \in \Sigma_{\gamma}$ によって変わってしまうからである. このように条件 γ と f の取り方によっては, $\text{LT}_{\gamma}(f)$ は定義されないこともある. f の項 $c_{\alpha} x^{\alpha}$ すべてについて $\sigma(c_{\alpha}) = 0$ が成り立つとき, または $\text{LT}_{\gamma}(f)$ が定義されるとき, f は γ によって決定されるという. $F = \{f_1, \dots, f_n\} \subseteq S$ としたとき, すべての i について f_i が γ によって決定

されることを, F は γ によって決定されるという.

Definition 4

条件と S の部分集合の組からなる有限集合 $\{(\gamma_1, G_1), \dots, (\gamma_s, G_s)\}$ がイデアル I のグレブナー基底系であるとは, 以下が成立することをいう.

- (1) G_i は I の有限部分集合であって, γ_i によって決定される.
- (2) $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$ は被覆である.
- (3) 任意の $\sigma \in \Sigma_{\gamma_i}$ に対して, $\sigma(G_i)$ は $\langle \sigma(I) \rangle$ のグレブナー基底.

例えば $\mathbb{Q}(u_1)[x_1, x_2]$ と単項式順序 $x_1 \succ x_2$ を考え, $I = \langle u_1x_1 + x_2, x_2 + 1 \rangle$ とする. $\{(\{\{u\}\}, \{u\}), \{u_1x_1 + x_2, x_2 + 1\}\}, ((\{u\}, \{\}), \{u_1x_1 + x_2, x_2 + 1, u_1x_1 - 1\})\}$ は I のグレブナー基底系であることがわかる.

イデアル I のグレブナー基底系 $\{(\gamma_1, G_1), \dots, (\gamma_s, G_s)\}$ の各元 (γ_i, G_i) を *Gröbner pair* とよぶ. $G = \bigcup_{i=1}^s G_i$ は I の包括的グレブナー基底となる. イデアル I の生成元が与えられたとき, そこからからグレブナー基底系を求めるアルゴリズムが Weispfenning [1] によって与えられている.

以上の議論は $k(u)$ を $k[u]$ に置き換えた場合も同様に成立する.

2 グレブナー基底系の有用性と グレブナー基底との比較

この章では Cox, Little, O'Shea [3] の 6 章にある, Robotics に関する例題を考える.

3 つの回転関節とリンクを持ち, 先端の関節に手が付いているロボットアームのモデルを考える. ロボットアームの根元から順にリンク 1, 関節 1, リンク 2, 関節 2, リンク 3, 関節 3 とおき, 関節 1 を原点にリンク 1 と垂直方向に x 軸を取るようにして直交座標 (x, y) を入れる. リンク i の長さを l_i とおき, リンク i とリンク $(i+1)$ のなす角を θ_i とする (図 1 参照).

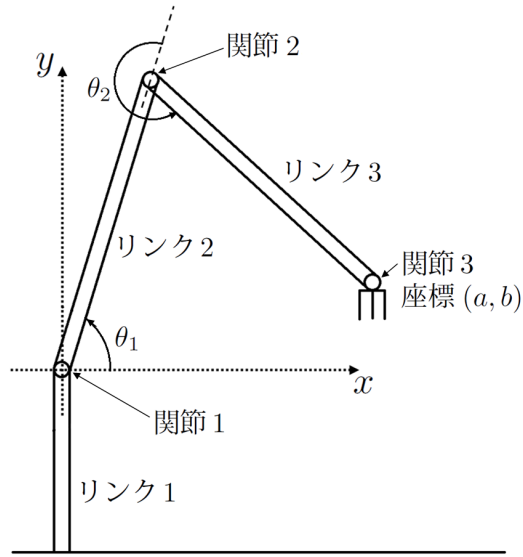


図 1: ロボットアーム

ロボットアームの手が付いている関節 3 の座標は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos \theta_1 \\ l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \sin \theta_1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

と表すことができる.

$$c_i = \cos \theta_i$$

$$s_i = \sin \theta_i$$

とおけば, (1) 式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_3(c_1 c_2 - s_1 s_2) + l_2 c_1 \\ l_3(s_1 c_2 - c_1 s_2) + l_2 s_1 \end{pmatrix}$$

と書きかえられる。したがって座標 (a, b) が与えられたとき、その座標に関する節 3 を乗せるために必要な c_i, s_i の値を求めるためには

$$\begin{cases} f_1 = l_3(c_1 c_2 - s_1 s_2) + l_2 c_1 - a \\ f_2 = l_3(s_1 c_2 - c_1 s_2) + l_2 s_1 - b \\ f_3 = c_1^2 + s_1^2 - 1 \\ f_4 = c_2^2 + s_2^2 - 1 \end{cases}$$

の零点集合を考えればよい。

Cox, Little, O'Shea [3] では $l_2 = l_3 = 1$ の場合を扱っているので、ここでも同じ仮定のもとで考える。

上の連立式を解くために、 $I = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$ の $\mathbf{R}(a, b)[c_1, c_2, s_1, s_2]$ 上でのグレブナー基底系を求めた。計算には Reduce のコマンド `gsys` を使用し、 $c_2 > s_2 > c_1 > s_1$ の辞書式順序で計算した。その結果は次の通りである。

$$\begin{aligned}
& \{ \{ a^2 + b^2 \neq 0 \wedge a \neq 0 \wedge b \neq 0, \\
& \{ c_2^2 + s_2^2 - 1, c_2 c_1 - s_2 s_1 + c_1 - a, c_2 s_1 + s_2 c_1 + s_1 - b, c_2 - a c_1 - b s_1 + 1, s_2^2 - \\
& b s_2 c_1 + a s_2 s_1 - (2a) c_1 - (2b) s_1 + (a^2 + b^2), s_2 c_1 + a c_1 s_1 + b s_1^2 - b, s_2 s_1 - \\
& b c_1 s_1 + a s_1^2, (4a^3) s_2 + (4a^4 + 8a^2 b^2 + 4b^4) s_1^3 - (4a^4 b + 8a^2 b^3 + 4b^5) s_1^2 + (a^6 + \\
& 3a^4 b^2 + 3a^2 b^4 + b^6) s_1 - (2a^4 b + 2a^2 b^3), c_1^2 + s_1^2 - 1, (2a) c_1 s_1 + (2b) s_1^2 - (a^2 + \\
& b^2) s_1, (a^3 + a b^2) c_1 + (2a^2 + 2b^2) s_1^2 - (a^2 b + b^3) s_1 - 2a^2, (4a^4 b + 8a^2 b^3 + 4b^5) s_1^3 - \\
& (4a^4 b^2 + 8a^4 + 8a^2 b^4 + 8a^2 b^2 + 4b^6) s_1^2 + (a^6 b + 3a^4 b^3 + 4a^4 b + 3a^2 b^5 + 4a^2 b^3 + \\
& b^7) s_1 - (2a^6 + 4a^4 b^2 - 8a^4 + 2a^2 b^4), (4a^4 + 4a^2 b^2) s_1^2 - (4a^4 b + 4a^2 b^3) s_1 + \\
& (a^6 + 2a^4 b^2 - 4a^4 + a^2 b^4) \} \}, \\
& \{ a^2 + b^2 \neq 0 \wedge a \neq 0 \wedge a^2 b + b^3 = 0, \\
& \{ c_2^2 + s_2^2 - 1, c_2 c_1 - s_2 s_1 + c_1 - a, c_2 s_1 + s_2 c_1 + s_1 - b, c_2 - a c_1 - b s_1 + 1, s_2^2 - \\
& b s_2 c_1 + a s_2 s_1 - (2a) c_1 - (2b) s_1 + (a^2 + b^2), s_2 c_1 + a c_1 s_1 + b s_1^2 - b, s_2 s_1 - \\
& b c_1 s_1 + a s_1^2, (4a^3) s_2 + (4a^4 + 8a^2 b^2 + 4b^4) s_1^3 - (4a^4 b + 8a^2 b^3 + 4b^5) s_1^2 + (a^6 + \\
& 3a^4 b^2 + 3a^2 b^4 + b^6) s_1 - (2a^4 b + 2a^2 b^3), c_1^2 + s_1^2 - 1, (2a) c_1 s_1 + (2b) s_1^2 - (a^2 + \\
& b^2) s_1, (a^3 + a b^2) c_1 + (2a^2 + 2b^2) s_1^2 - (a^2 b + b^3) s_1 - 2a^2, -(4a^4 b^2 + 8a^4 + \\
& 8a^2 b^4 + 8a^2 b^2 + 4b^6) s_1^2 + (a^6 b + 3a^4 b^3 + 4a^4 b + 3a^2 b^5 + 4a^2 b^3 + b^7) s_1 - (2a^6 + \\
& 4a^4 b^2 - 8a^4 + 2a^2 b^4) \} \}, \\
& \{ a \neq 0 \wedge a^3 + a b^2 = 0, \\
& \{ -2a^2 \} \}, \\
& \{ b \neq 0 \wedge a = 0, \\
& \{ c_2^2 + s_2^2 - 1, c_2 c_1 - s_2 s_1 + c_1 - a, c_2 s_1 + s_2 c_1 + s_1 - b, c_2 - a c_1 - b s_1 + 1, s_2^2 - b s_2 c_1 + \\
& a s_2 s_1 - (2a) c_1 - (2b) s_1 + (a^2 + b^2), s_2 c_1 + a c_1 s_1 + b s_1^2 - b, s_2 s_1 - b c_1 s_1 + a s_1^2, s_2 - \\
& b c_1, c_1^2 + s_1^2 - 1, (2b) c_1 s_1 - (a^2 + b^2) c_1, (2b) s_1^2 - (a^2 + b^2) s_1, (2b^2) s_1 - (a^2 b + b^3) \} \}, \\
& \{ a = 0 \wedge b = 0, \\
& \{ c_2^2 + s_2^2 - 1, c_2 c_1 - s_2 s_1 + c_1 - a, c_2 s_1 + s_2 c_1 + s_1 - b, c_2 - a c_1 - b s_1 + 1, s_2^2 - \\
& b s_2 c_1 + a s_2 s_1 - (2a) c_1 - (2b) s_1 + (a^2 + b^2), s_2 c_1 + a c_1 s_1 + b s_1^2 - b, s_2 s_1 - \\
& b c_1 s_1 + a s_1^2, s_2, c_1^2 + s_1^2 - 1 \} \} \}
\end{aligned}$$

Reduce の計算結果においては, 条件は集合の組の形では出力されない. 例えば上記計算結果の 10 行目 $a^2 + b^2 \neq 0 \wedge a \neq 0 \wedge a^2b + b^3 = 0$ を 1 章の条件 γ の形に置き換えれば, $\gamma = (\{a^2b + b^3\}, \{a^2 + b^2, a\})$ となる.

計算結果について考察したい. 最初の Gröbner pair を見れば, $a^2 + b^2 \neq 0 \wedge a \neq 0 \wedge b \neq 0$ のとき, グレブナー基底は

$$\begin{aligned} & \{c_2^2 + s_2^2 - 1, \\ & c_2c_1 - s_2s_1 + c_1 - a, \\ & c_2s_1 + s_2c_1 + s_1 - b, \\ & c_2 - ac_1 - bs_1 + 1, \\ & s_2^2 - bs_2c_1 + as_2s_1 - (2a)c_1 - (2b)s_1 + (a^2 + b^2), \\ & s_2c_1 + ac_1s_1 + bs_1^2 - b, \\ & s_2s_1 - bc_1s_1 + as_1^2, \\ & (4a^3)s_2 + (4a^4 + 8a^2b^2 + 4b^4)s_1^3 - (4a^4b + 8a^2b^3 + 4b^5)s_1^2 + (a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6)s_1 - (2a^4b + 2a^2b^3), \\ & c_1^2 + s_1^2 - 1, \\ & (2a)c_1s_1 + (2b)s_1^2 - (a^2 + b^2)s_1, \\ & (a^3 + ab^2)c_1 + (2a^2 + 2b^2)s_1^2 - (a^2b + b^3)s_1 - 2a^2, \\ & (4a^4b + 8a^2b^3 + 4b^5)s_1^3 - (4a^4b^2 + 8a^4 + 8a^2b^4 + 8a^2b^2 + 4b^6)s_1^2 + (a^6b + 3a^4b^3 + 4a^4b + 3a^2b^5 + 4a^2b^3 + b^7)s_1 - (2a^6 + 4a^4b^2 - 8a^4 + 2a^2b^4), \\ & (4a^4 + 4a^2b^2)s_1^2 - (4a^4b + 4a^2b^3)s_1 + (a^6 + 2a^4b^2 - 4a^4 + a^2b^4)\} \end{aligned}$$

となる. 最後の式を見れば s_1 は 2 つの解をもつことが分かる. さらに上から 4, 7, 10 番目の式より, s_1 の 2 つの解それぞれについて c_1, c_2, s_2 が一つに定まることが分かり, それがこの場合の解となる.

次に $a^2 + b^2 \neq 0 \wedge a \neq 0 \wedge a^2b + b^3 = 0$ すなわち $a \neq 0 \wedge b = 0$ の場合についてだが, この場合も $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ の場合と同様, 2 つの解があることが分かる.

3 番目の $a \neq 0 \wedge a^3 + ab^2 = 0$ の場合については $\mathbf{R}^2$ 上で条件を満たす (a, b) が存在しないので考えなくてよい.

4 番目の $b \neq 0 \wedge a = 0$ については, c_2 に関して 2 つの解がありそれぞれにたいして c_1, s_1, s_2 が一つに定まることが分かる.

最後の $a = 0 \wedge b = 0$ の場合は c_1, s_1 が一意に定まらず, (a, b) は運動学的特異点 (kinematic singularity) である.

グレブナー基底系を用いて計算した場合は以上ようになるが, 一方でグレブナー基底を用いた計算だとどうなるか考えてみたい. 先ほどと同様, 辞書式順序 $c_2 > s_2 > c_1 > s_1$ について $\mathbf{R}(a, b)[c_1, c_2, s_1, s_2]$ 上のグレブナー基底を計算すると次のようになる.

$$\begin{aligned} &\{4(a^2 + b^2)s_1^2 - 4b(a^2 + b^2)s_1 + (a^4 + 2a^2b^2 - 4a^2 + b^4), \\ &2ac_1 + 2bs_1 - (a^2 + b^2), \\ &s_2 - bc_1 + as_1, \\ &c_2 + c_1^2 - ac_1 + s_1^2 - bs_1\}. \end{aligned}$$

リストの1番目の式と2番目の式から分かる通り, $a^2 + b^2 \neq 0$ かつ $b \neq 0$ のとき, s_1 は2つの解を持ち, それに応じて c_1, c_2, s_2 がそれぞれ一つの解を持つ. $a^2 + b^2 = 0$ または $b = 0$ の場合についてはもとのイデアル I に戻り, その値を代入したイデアルを新たに考えてグレブナー基底を計算し直すことになる. たとえば $a^2 + b^2 \neq 0$ かつ $b = 0$ の場合, イデアル I の生成元それぞれに $b = 0$ を代入したイデアル $I' = \langle c_1c_2 - s_1s_2 + c_1 - a, s_1c_2 + c_1s_2 + s_1, c_1^2 + s_1^2 - 1, c_2^2 + s_2^2 - 1 \rangle$ を考えて I' のグレブナー基底を計算すればよい. このような工夫をすることでグレブナー基底の計算のみで解を求めることは可能ではあるが, グレブナー基底系はアルゴリズムにより自動的に解を求めることができる点で優れている.

3 包括的グレブナー基底と グレブナー基底の関係

この章では $k(u)[x]$ および $(k[u])[x]$ 上の包括的グレブナー基底とグレブナー基底の関係について考察する.

$k(u)[x]$ 上の包括的グレブナー基底に関しては次の定理が成り立つ.

定理

k を無限体, I を $k(u)[x]$ のイデアル, $G = \{g_1, \dots, g_r\}$ を I の包括的グレブナー基底とする. このとき G は I のグレブナー基底である.

定理の証明

任意に $f \in I$ をとる. ある $g_i \in G$ が存在して $\text{LT}(g_i) | \text{LT}(f)$ となることを示せばよい.

$$\text{LT}(f) = \frac{p}{q} x^\alpha \quad (p, q \in k[u], q \in k[u] \setminus \{0\}, \alpha \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^n)$$

とおき,

$$g_i = \sum_{j=1}^{s_i} \frac{p_{i,j}}{q_{i,j}} x^{\alpha_{i,j}} \quad (p_{i,j}, q_{i,j} \in k[u], q_{i,j} \in k[u] \setminus \{0\}, \alpha_{i,j} \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^n)$$

とする.

$$\Sigma_{\neq 0} = \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma(p), \sigma(q), \sigma(p_{i,j}), \sigma(q_{i,j}) \neq 0 \ (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s_i)\}$$

とおけば, k が無限体であるから $\Sigma_{\neq 0}$ は空集合でない. したがって, ある $\rho \in \Sigma_{\neq 0}$ が存在する.

仮定より G は I の包括的グレブナー基底であるから, ある $g_i \in G$ が存在して, $\text{LT}(\rho(g_i)) | \text{LT}(\rho(f))$ となる. ここで $\rho \in \Sigma_{\neq 0}$ なので $\text{LM}(\rho(g_i)) = \text{LM}(g_i)$, $\text{LM}(\rho(f)) = \text{LM}(f)$ が成立する. よって $\text{LT}(g_i) | \text{LT}(f)$ となり示せた. $\square$

$(k[u])[x]$ においては定理は成り立たない. 実際, $I = \langle ux, y \rangle \subseteq (k[u])[x, y]$ に対して, $G = \{u^2x, y\}$ を考えれば, G は I の包括的グレブナー基底になっているが, グレブナー基底ではない.

謝辞

この論文を執筆するにあたって, たくさんの指導をいただいた楫先生, 楫研究室の皆様にご心より感謝いたします.

参考文献

- [1] V.Weispfenning. Comprehensive Grobner Bases. *Journal of Symbolic Computation*, 14:1-29pp, 1992.
- [2] W.Dunn. Algorithms and applications of comprehensive Groebner bases. Thesis(Ph.D.)-The University of Arizona, 1995.
- [3] D.Cox, J.Little, D.O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Springer-Verlag, New York, 1996.