

Resultant of composed polynomial の chain rule の計算効率と幾何学的な意味

早稲田大学 基幹理工学研究科 応用数理専攻

5111A009-4 猪野夏美

概要と目的

Resultant of composed polynomial の chain rule について書かれている論文 [2] を読んだ。
この論文 [2] の主定理の条件を変えても定理は成り立つだろうか疑問に思ったことが本論文作成のきっかけである。
本論文で扱う主定理は既存のもの ([1] に載っている) であるが、その既存の定理に対して、別の初等的な証明を与え、主定理を使う場合と使わない場合の計算量の違い、定理を使うことで共通零点を持つ図形について考察する、というのが本論文作成の目的である。

諸定理の紹介

定理 1

$$\begin{aligned} & \text{Res}_{d_1 m, d_2 m, \dots, d_n m}(F_1(h_1, h_2, \dots, h_n)^h, F_2(h_1, h_2, \dots, h_n)^h, \dots, F_n(h_1, h_2, \dots, h_n)^h) \\ &= (\text{Res}_{d_1, d_2, \dots, d_n}(F_1, F_2, \dots, F_n))^{m^{n-1}} \times (\text{Res}_{m_1, m, \dots, m}(H_1, H_2, \dots, H_n))^{d_1 d_2 \dots d_n} \times (\text{Res}_{m, \dots, m}(\overline{H_2}, \dots, \overline{H_n}))^{(m-m_1)d_1 d_2 \dots d_n} \end{aligned}$$

ここで $F_1, F_2, \dots, F_n$ は次数 $d_1, d_2, \dots, d_n$ の体 k 係数 n 変数斉次多項式、 $H_1, H_2, \dots, H_n$ は次数 $m_1, m, \dots, m$ の体 k 係数 n 変数斉次多項式 ($m_1 < m$) とし、
 $h_i := H_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1), \overline{H_i} := H_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0), F_i(h_1, h_2, \dots, h_n)^h$ は $F_i(h_1, h_2, \dots, h_n)$ を斉次化させた多項式とする。 ($i = 1, 2, \dots, n$)

定理 2 ([3] から引用)

$\text{Res}_{d_1, d_2, \dots, d_n}(F_1, F_2, \dots, F_n) = 0$
 $\iff F_1 = F_2 = \dots = F_n = 0$ は $\mathbf{P}^{n-1}(\overline{k})$ に解を持つ。
ここで $F_1, F_2, \dots, F_n$ は次数 $d_1, d_2, \dots, d_n$ の体 k 係数 n 変数斉次多項式とし、 $\overline{k}$ は k の代数的閉体とする。

定理 3 ([2] から引用)

$$\begin{aligned} & \text{Res}_{d_1 m, d_2 m, \dots, d_n m}(F_1(H_1, H_2, \dots, H_n), F_2(H_1, H_2, \dots, H_n), \dots, F_n(H_1, H_2, \dots, H_n)) \\ &= (\text{Res}_{d_1, d_2, \dots, d_n}(F_1, F_2, \dots, F_n))^{m^{n-1}} \times (\text{Res}_{m, m, \dots, m}(H_1, H_2, \dots, H_n))^{d_1 d_2 \dots d_n} \end{aligned}$$

定理 4 ([5] から引用)

$\text{Res}_{d_1, d_2, \dots, d_n}(F_1, F_2, \dots, F_n)$
 $= (\text{Res}_{d_1, d_2, \dots, d_{n-1}}(\overline{F_1}, \overline{F_2}, \dots, \overline{F_{n-1}}))^{d_n} \times \det(m_{f_n} : A \longrightarrow A)$
ここで、 $\overline{F_i} := F_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0), f_i := F_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ,
 $A := \overline{k}[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]/<f_1, f_2, \dots, f_{n-1}>、\overline{k}$ は k の代数閉体 とする。

定理 1 を使うこと場合と使わない場合の計算量の違い

$n = 2, 3$ のときについて、定理を使う場合と使わない場合でどれくらい計算量に違いが出てくるだろうか。

[5] によると、Resultant は必ず 2 つの行列式の商の形として書けるので、考えなければいけない分子の行列式の大きさをもとに、計算量・計算時間を比べる。

(1) $n = 2$ のとき

例えば、 $m_1 = 1, m = d_1 + d_2 = 20$ のとき、考えなければならない行列式の大きさは 400 から 20 まで小さくなる。mathematica 8 による計算時間も 6.02 秒から 0.01 秒にまで短縮できる。

(2) $n = 3$ のとき

例えば、 $m_1 = 1, m = 5, d_1 + d_2 + d_3 = 9$ のとき、考えなければならない行列式の大きさは 990 から 45、55 まで小さくなる。

参考文献

- [1] Manfred Minimair.(2002). "Dense Resultant of composed polynomial Mixed-mixed case. " J. Symb. Comput. 36, 825-834
- [2] CHARLES CHING-AN CHENG, JAMES H. MCKAY, AND STUART SUI-SHENG WANG. (1992). "A CHAIN RULE FOR MULTIVARIABLE RESULTANTS. "
- [3] I. Gelfand, M. Kapranov and A. Zelevinsky. (1994). "Discriminants, Resultants and Multidimensional determinants. ", Boston, Birkhauser
- [4] J. Jouanolou. (1991). "Le formalisme du Resultant. " Advances in Math. 90, 117-263
- [5] Cox,D., Little, J., O'Shea, D. (1998). "Using Algebraic Geometry. " New York, Springer