Resultant of composed polynomialのchain ruleの計算効率と幾何学的な意味

早稲田大学　基幹理工学研究科　応用数理専攻

5111A009-4　猪野夏美

概要と目的

Resultant of composed polynomial の chain rule について書かれている論文 [2] を読んだ。
この論文 [2] の主定理の条件を変えても定理は成り立つだろうかと疑問に思ったことが本論文作成のきっかけである。
本論文で扱う主定理は既存のもの（[1] に載っている）であるが、その既存の定理に対して、別の初等的な証明を与え、主定理を使う場合と使わない場合の計算量の違い、定理を使うことで共通零点を持つ図形について考察する、というのが本論文作成の目的である。

定理1 (MainTheoram)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{d_1 m, d_2 m, \ldots, d_n m}\left(F_1(h_1, h_2, \ldots, h_n)^h, F_2(h_1, h_2, \ldots, h_n)^h, \ldots., F_n(h_1, h_2, \ldots, h_n)^h\right) \\
&= \left(\mathrm{Res}_{d_1, d_2, \ldots, d_n}\left(F_1, F_2, \ldots, F_n\right)\right)^{m^{n-1}} \times \left(\mathrm{Res}_{m, m, \ldots, m}\left(x_n^{m-m_1} H_1, H_2, \ldots, H_n\right)\right)^{d_1 d_2 \ldots d_n} \\
&= \left(\mathrm{Res}_{d_1, d_2, \ldots, d_n}\left(F_1, F_2, \ldots, F_n\right)^{m^{n-1}} \times \left(\mathrm{Res}_{m_1, m, \ldots, m}\left(H_1, H_2, \ldots, H_n\right)\right)^{d_1 d_2 \ldots d_n} \times \right. \\
&\left(\mathrm{Res}_{m, \ldots, m}\left(\overline{H_2}, \ldots, \overline{H_n}\right)\right)^{(m-m_1) d_1 d_2 \ldots d_n}
\end{aligned}
$$

ここで$F_1,F_2,...,F_n$は次数$d_1,d_2,....,d_n$の体k係数n変数斉次多項式、$H_1,H_2,....,H_n$は次数$m_1,m,...,m$の体k係数n変数斉次多項式$(m_1 < m)$とし、

$h_i := H_i(x_1,x_2,....,x_{n-1},1),\overline{H_i} := H_i(x_1,x_2,...,x_{n-1},0),F_i(h_1,h_2,....,h_n)^h$

は$F_i(H_1,h_2,....,h_n)$を斉次化させた多項式とする。$(i = 1,2,....,n)$

定理 2

$$\mathrm{Res}_{d_1,d_2,\ldots,d_n}(F_1,F_2,\ldots,F_n)=0$$

$\Longleftrightarrow F_1=F_2=\ldots=F_n=0$ は $\mathbf{P}^{n-1}(\overline{k})$ に解を持つ。

ここで $F_1,F_2,\ldots,F_n$ は次数 $d_1,d_2,\ldots,d_n$ の体 k 係数 n 変数斉次多項式とし、$\overline{k}$ は k の代数的閉体とする。

証明は [3] を参照。

定理 3

$$\mathrm{Res}_{d_1 m, d_2 m, \ldots, d_n m}\left(F_1(H_1, H_2, \ldots, H_n), F_2(H_1, H_2, \ldots, H_n), \ldots, F_n(H_1, H_2, \ldots, H_n)\right)$$
$$= \left(\mathrm{Res}_{d_1, d_2, \ldots, d_n}(F_1, F_2, \ldots, F_n)\right)^{m^{n-1}} \times \left(\mathrm{Res}_{m, m, \ldots, m}(H_1, H_2, \ldots, H_n)\right)^{d_1 d_2 \ldots d_n}$$

証明は [2] を参照。

定理 4

$$\mathrm{Res}_{d_1,d_2,\ldots,d_n}(F_1,F_2,\ldots,F_n)$$
$$=(\mathrm{Res}_{d_1,d_2,\ldots,d_{n-1}}(\overline{F_1},\overline{F_2},\ldots,\overline{F_{n-1}}))^{d_n}\times\det(m_{f_n}:A\longrightarrow A)$$

ここで、$\overline{F_i}:=F_i(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},0), f_i:=F_i(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},1)\ (i=1,2,\ldots,n)$,
$A:=\overline{k}[x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}])/<f_1,f_2,\ldots,f_{n-1}>$とする。

証明は [4] を参照。

定理1（MainThoram）の証明

$$\mathrm{Res}_{d_1 m, d_2 m, \ldots, d_n m}(F_1(h_1, h_2, \ldots, h_n)^h, F_2(h_1, h_2, \ldots, h_n)^h, \ldots, F_n(h_1, h_2, \ldots, h_n)^h)$$

$$= \mathrm{Res}_{d_1 m, d_2 m, \ldots, d_n m}(F_1(x_n^{m-m_1} H_1, H_2, \ldots, H_n), F_2(x_n^{m-m_1} H_1, H_2, \ldots, H_n), \ldots$$

$$, F_n(x_n^{m-m_1} H_1, H_2, \ldots, H_n)) =$$

$$(\mathrm{Res}_{d_1, d_2, \ldots, d_n}(F_1, F_2, \ldots, F_n))^{m^{n-1}} \times (\mathrm{Res}_{m, m, \ldots, m}(x_n^{m-m_1} H_1, H_2, \ldots, H_n))^{d_1 d_2 \ldots d_n}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{m,m,...,m}(x_n^{m-m_1}H_1, H_2, ..., H_n) \\
&= \mathrm{Res}_{m,...,m}(\overline{H_2}, ..., \overline{H_n})^m \times \det(m_{h_1} : A \longrightarrow A) \\
&= \mathrm{Res}_{m,...,m}(\overline{H_2}, ..., \overline{H_n})^{(m-m_1)+m_1} \times \det(m_{h_1} : A \longrightarrow A) \\
&= \mathrm{Res}_{m,...,m}(\overline{H_2}, ..., \overline{H_n})^{(m-m_1)} \times \mathrm{Res}_{m,m,...,m}(\overline{H_2}, ..., \overline{H_n})^{m_1} \\
&\times \det(m_{h_1} : A \longrightarrow A)
\end{aligned}
$$

$$
= \mathrm{Res}_{m,...,m}(\overline{H_2}, ..., \overline{H_n})^{(m-m_1)} \times \mathrm{Res}_{m_1,m,...,m}(H_1, H_2, ..., H_n)
$$

定理１を使う場合と使わない場合の計算量および計算の早さの違いについて

(１)$n=2$のとき

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{d_1,d_2m}(F_1(h_1,h_2)^h,F_2(h_1,h_2)^h)\\
&=\mathrm{Res}_{d_1,d_2}(F_1,F_2))^m\times(\mathrm{Res}_{m,m}(x_2^{m-m_1}H_1,H_2)^{d_1d_2}\\
&=\mathrm{Res}_{d_1,d_2}(F_1,F_2)^m\times(\mathrm{Res}_{m_1,m}(H_1,H_2))^{d_1d_2}\times(\mathrm{Res}_m(\overline{H_2}))^{d_1d_2(m-m_1)}\\
&\quad(m_1<m)
\end{aligned}
$$

考えなければならない行列式の大きさはd_1m+d_2m

からd_1+d_2とm_1+mまで小さくなる。

具体例

$m_1 = 1, m = d_1 + d_2 = 20$ のとき、

考えなければならない行列式の大きさは、400 から 20 まで減る。

大きさ 400 の行列式を計算機で計算するには、

3.00 秒から 4.00 秒かかる一方で、

大きさが 20 の行列式を計算機で計算するには

0.01 秒で済む。

また、大きさが 400 の行列式の計算には、

58,053,434 回の乗算・加減算・除算が必要な一方で、

大きさが 20 の行列式の計算には、

7,960 回の乗算・加減算・除算しか必要でない。

(2) $n=3$ のとき

$$\mathrm{Res}_{d_1m,d_2m,d_3m}(F_1(h_1,h_2,h_3)^h,F_2(h_1,h_2,h_3)^h,F_3(h_1,h_2,h_3)^h)$$
$$=\mathrm{Res}_{d_1,d_2,d_3}(F_1,F_2,F_3)^{m^2}\times \mathrm{Res}_{m,m,m}(x_3^{m-m_1}H_1,H_2,H_3)$$
$$=\mathrm{Res}_{d_1,d_2,d_3}(F_1,F_2,F_3)^{m^2}\times \mathrm{Res}_{m_1,m,m}(H_1,H_2,H_3)^{m^2}\times \mathrm{Res}_{m,m}(\overline{H}_2,\overline{H}_3)$$

考えなければならない行列式の大きさは、${}_{d_1m+d_2m+d_3m}C_2$

から ${}_{d_1+d_2+d_3}C_2$、${}_{m_1+m+m}C_2$ と ${}_{m+m}C_1=m+m$ まで小さくなる。

具体例

$m_1 = 1, m = 5, d_1 + d_2 + d_3 = 9$ のとき、

考えなければならない行列式の大きさは、990 から 45、55 まで減る。

大きさ 990 の行列式を計算機で計算するには、

100 秒以上かかる一方で、

大きさが 55 の行列式を計算機で計算すると、

約 0.03 秒しかかからない。

d_1, d_2, d_3, m_1, m の値がさらに大きくなると、定理を使うことにより計算時間を短縮することができると考えられる。

参考文献

[1] Manfred Minimair.(2002)."Dense Resultant of composed polynomial Mixed-mixed case. "J. Symb. Comput. 36, 825-834

[2] Manfred Minimair.(2005). "Resultant of partially composed polynomials. "J. Symb. Comput. 41, 591-602

[3] I. Gelfand, M. Kapranov and A. Zelevinsky. (1994). "Discriminants, Resultants and Multidimensional determinants. ", Boston, Birkhauser

[4] CHARLES CHING-AN CHENG, JAMES H. MCKAY, AND STUART SUI-SHENG WANG. (1992). "A CHAIN RULE FOR MULTIVARIABLE ResULTANTS. "

[5] J. Jouanolou. (1991). "Le formalisme du Resultant. "Advances in Math. 90, 117-263

[6] Cox,D., Little, J., O'Shea, D. (1998). "Using Algebraic Geometry. "New York, Springer