

Border Bases による代数曲線回帰について

基幹理工学研究科 数学応用数理専攻

5110A030-8

手島 悠人

指導教員名 楢 元

1 Introduction

統計学における重要なテーマの一つに曲線回帰がある．ここでは代数曲線のみを扱う．代数曲線回帰の最も良く用いられる手法の一つに最小二乗法がある．この方法では，回帰すべき代数曲線の次数を決めなくてはならないが，それを決定する明確な方法がない，という欠点がある．[2] は，Border Bases を用いて代数曲線回帰を行うアイデアを述べている．これは，上記の欠点を補うものであるが，[2] では例示があるのみで詳細に考察されていない．本研究はこの「Border Bases 法」の性質と課題を考察したものである．

2 Border Bases

以下， $P = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ ， $\mathbb{T}^n = \{x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \mid a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ とする．

Definition 2.1 $\mathcal{O} = \{t_1, \dots, t_\mu\}$: order ideal ,

$\partial\mathcal{O} = \{b_1, \dots, b_\nu\}$: border of $\mathcal{O}$,

$g_i = b_j - \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_{ij} t_i$ とし， $\mathcal{B} = \{g_1, \dots, g_\nu\}$ とおく．

$\mathcal{I} \subset P$: zero dimensional ideal , $\mathcal{B} \subset \mathcal{I}$ とする．

このとき， $\mathcal{O}$ が quotient basis for $\mathcal{I}$ ならば $\mathcal{B}$ を $\mathcal{O}$ -border basis of $\mathcal{I}$ という．

zero-dimensional ideal は零点集合が有限個な ideal の事とする．

Definition 2.2 $\mathbb{X} = \{p_1, \dots, p_s\} \subset \mathbb{R}^n$ ， $\mathcal{O} = \{t_1, \dots, t_\mu\}$: order ideal とする．

このとき， $\mathcal{O}$ が stable with respect to $\mathbb{X}^\varepsilon$

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \tilde{\mathbb{X}} : \text{admissible perturbation of } \mathbb{X}^\varepsilon \text{ において}$

$$M_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathbb{X}}) = \begin{bmatrix} t_1(\tilde{p}_1) & \cdots & t_\mu(\tilde{p}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1(\tilde{p}_s) & \cdots & t_\mu(\tilde{p}_s) \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{s,\mu}(\mathbb{R})$$

が full rank である．

$\mathbb{X}^\varepsilon$ は $\mathbb{X}$ を微小変化させたもの全体， $\tilde{\mathbb{X}}$ はその元，と考えて良い．

Proposition 2.3 $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O} = (t_1, \dots, t_s)$ quotient basis for $\mathcal{I}(\mathbb{X})$

$\mathcal{O}$: stable with respect to $\mathbb{X}^\varepsilon$, $\partial\mathcal{O} = \{b_1, \dots, b_\nu\}$ とする.

- (a) $\forall \tilde{\mathbb{X}}$: admissible perturbation of $\mathbb{X}^\varepsilon$ について,
 $\mathcal{I}(\tilde{\mathbb{X}})$ は $\mathcal{O}$ -Border Basis を持つ.
- (b) $\tilde{\mathcal{B}}$: $\mathcal{O}$ -Border Basis of $\mathcal{I}(\tilde{\mathbb{X}})$ は $\tilde{\mathcal{B}} = \{g_1, \dots, g_\nu\}$
ただし, $g_i = b_j - \sum_{i=1}^s \alpha_{ij} t_i$

$\mathcal{I}(\mathbb{X})$ の Stable Border Basis と $\mathcal{I}(\tilde{\mathbb{X}})$ の Stable Border Basis は係数部分のみ, 微小に異なる.

$\rightarrow \therefore \tilde{\mathbb{X}}$ から $\mathcal{I}(\mathbb{X})$ を推定 (近似) できる.

3 考察・課題

- データの量が十分多ければ, 任意の次数の代数曲線で近似できる.
- 何次の代数曲線で近似する事が適当であるか調べる事が出来る.
- $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ 上でも近似可能. (理論上)
- 得られる代数曲線が, 既約で無い多項式の因数として現れる事がある.
- 検定統計量が不明.
- 「データが少ない, サンプルにばらつきがない, 異常なデータの存在」等により, 推定が困難になる.

References

- [1] Kreuzer, M., Robbiano, L. (2005). *Computational Commutative Algebra 2*. Springer, Berlin.
- [2] J. Abbott, M. Fassino, and M. Torrente, (2007). *Stable Border Bases for Ideals of Points*. arXiv:0706.2316v2.
- [3] CoCoA Team. CoCoA: a system for doing computations in Commutative Algebra. Available at <http://cocoa.dima.unige.it/>