

Characterizations of projective spaces and hyperquadrics for varieties with Picard number one

楫研究室 鈴木 拓

Introduction

Question. Variety が projective space $\mathbb{P}^n$ や hyperquadric Q_n (単純な varieties) になるための条件は？

Theorem 1 ([Mor79]). X を代数閉体上の n -dim smooth projective variety とするとき, tangent bundle T_X が ample ならば $X \cong \mathbb{P}^n$.

Theorem 2 ([AW01]). X を n -dim smooth complex projective variety とするとき, T_X が ample vector bundle $\mathcal{E}$ を含むならば $X \cong \mathbb{P}^n$.

Conjecture 3 (Kovács). X を n -dim smooth complex projective variety とする. ある ample vector bundle $\mathcal{E}$ of rank r on X が存在し, ある自然数 $p \leq r$ に対して $\wedge^p \mathcal{E}$ が $\wedge^p T_X$ に含まれるならば, $X \cong \mathbb{P}^n$ または $X \cong Q_p$.

Theorem 4 ([ADK08]). X を n -dim smooth complex projective variety とする. ある ample line bundle $\mathcal{L}$ on X が存在し, ある自然数 p に対して $H^0(X, \wedge^p T_X \otimes \mathcal{L}^{-p}) \neq 0$ ならば, $X \cong \mathbb{P}^n$ または $X \cong Q_p$. すなわち, $\mathcal{E} = \mathcal{L}^{\oplus r}$ ($\mathcal{L}$: line bundle) の場合, Kovács 予想は肯定的である.

Main Theorem. X を Picard number 1 の n -dim smooth complex projective variety とする. ある ample vector bundle $\mathcal{E}$ of rank r on X が存在し, ある自然数 $p \leq r$ に対して $\wedge^p \mathcal{E}$ が $\wedge^p T_X$ に含まれるならば, $X \cong \mathbb{P}^n$ または $X \cong Q_p$. すなわち, X の Picard number が 1 の場合, Kovács 予想は肯定的である.

Remark. 2010 年に Ross が同じ主張の論文を出している ([Ros10]). しかし [Ros10] の証明には仮定されていない条件 (射 $\mathcal{E} \rightarrow T_X$ の存在) が仮定されているように思える. そこで本論文では sheaf stability の理論を用いた別の証明を与えている. これは [ADK08] で与えられた手法を応用したものである.

Sheaf stability

Definition 5. X を n -dim projective variety, $\mathcal{H}$ を fixed ample line bundle とする. Torsion-free sheaf $\mathcal{F}$ の slope とは,

$$\mu(\mathcal{F}) = \frac{c_1(\mathcal{F}) \cdot c_1(\mathcal{H})^{n-1}}{\mathrm{rk}(\mathcal{F})}.$$

Torsion-free sheaf $\mathcal{F}$ が semistable であるとは, 任意の $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ に対して $\mu(\mathcal{E}) \leq \mu(\mathcal{F})$ となることをいう.

Fact 6 ([HN75]). Torsion-free sheaf $\mathcal{F}$ に対して, filtration

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \supsetneq \mathcal{F}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{F}_{k+1} = 0,$$

で $\mathcal{Q}_i = \mathcal{F}_i / \mathcal{F}_{i+1}$ が semistable かつ $\mu(\mathcal{Q}_0) < \cdots < \mu(\mathcal{Q}_k)$ を満たすものが存在する. これを $\mathcal{F}$ の Harder-Narasimhan filtration という.

Outline of Proof

$\wedge^p \mathcal{E} \hookrightarrow \wedge^p T_X$ より X 上の rational curves の minimal dominating family H が存在する ([Miy87]).

Definition 7. Irreducible component $H \subset \mathrm{RatCurves}^n(X)$ が次を満たすとき, minimal dominating family であるという:

- H -curves は X を支配し,
- 一般的な点 $x \in X$ を通る H -curves から成る subvariety は proper.

Case 1. $\deg f^* \mathcal{E} = r$ ($[f] \in H$) の場合

[Ros10] で証明されている. r に関する帰納法により [ADK08] に帰着される.

Case 2. $\deg f^* \mathcal{E} = r + 1$ ($[f] \in H$) の場合

[Ros10] の証明に欠陥がある部分. Projective space になることを示す.

Key Lemma ([Ara06], [Kol96] 及び簡単な slope の計算). X の Picard number が 1, H が Case 2 の minimal dominating family とする. ある $\mathcal{D} \subseteq T_X$ で $\mu(\mathcal{E}) \leq \mu(\mathcal{D})$ なるものが存在するならば, $X \cong \mathbb{P}^n$.

T_X の Harder-Narasimhan filtration

$$T_X = \mathcal{F}_0 \supsetneq \mathcal{F}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{F}_k \supsetneq \mathcal{F}_{k+1} = 0$$

をとり, $\mathcal{D} = \mathcal{F}_k = \mathcal{Q}_k$ が条件を満たすことを示す.

$q = \operatorname{rk} \wedge^p \mathcal{E}$ とすれば $\wedge^q \wedge^p \mathcal{E} \hookrightarrow \wedge^q \wedge^p T_X$. うまく curve $C \subset X$ をとって C に制限して考えると,

$$\wedge^q \wedge^p \mathcal{E}|_C \hookrightarrow \bigotimes_{\alpha_0 + \cdots + \alpha_k = q} \wedge^{\alpha_0 \cdots \alpha_k} (\wedge^{\alpha_0} \mathcal{Q}_0 \otimes \cdots \otimes \wedge^{\alpha_k} \mathcal{Q}_k)|_C$$

さらに右辺は semistable となるようにできる.

Fact 8. $\mu(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) = \mu(\mathcal{F}) + \mu(\mathcal{G})$. $\mu(\wedge^a \mathcal{F}) = a\mu(\mathcal{F})$.

そこで slope の大小を比較すれば, $\mu(\mathcal{E}) \leq \mu(\mathcal{Q}_k)$. したがって $X \cong \mathbb{P}^n$.

References

- [AW01] Andreatta, M., Wiśniewski, J.A.: On manifolds whose tangent bundle contains an ample subbundle. Invent. Math. **146**(1), 209-217 (2001)
- [Ara06] Araujo, C: Rational curves of minimal degree and characterizations of projective spaces. Math. Ann. **335**(4), 937-951 (2006)
- [ADK08] Araujo, C., Druel, S., Kovács, S.J.: Cohomological characterizations of projective spaces and hyperquadrics, Invent. Math. **174**, 233-253 (2008)
- [HN75] Harder, G., Narasimhan, M.S.: On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves. Math. Ann. **212**, 215-248 (1975)
- [Kol96] Kollár, J.: Rational Curves on Algebraic Varieties. Ergeb. Math. Grenzgeb., vol. 32. Springer, Berlin (1996)
- [Miy87] Miyaoka, Y.: Deformations of a morphism along a foliation and applications. Algebraic geometry, Bowdoin (1985), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, 245-268. Amer. Math. Soci., Providence (1987)
- [Mor79] Mori, S.: Projective manifolds with ample tangent bundles. Ann. Math. (2) **110**(3), 593-606 (1979)
- [Ros10] K. Ross: Characterizations of projective spaces and hyperquadrics via positivity properties of the tangent bundle, Preprint arXiv:1012.2043v1 (2010)