Minimal graded free resolutions of three fat points ideals in $\mathbf{P}^n$

楫研究室所属　修士２年

5110A024-8　菅井　謙

担当教員　楫　元

1　概要

G.Fatabbi，A.Lorenzini による論文（［FL］）において，$\mathbf{P}^n$ 上の fat points ideals の minimal graded free resolutions について書かれていた．

Definition

k:field $R = k[X_0, X_1, \cdots, X_n]$ を polynomial ring とする．R の ideal I の free resolution $F.$

$F. : \cdots \longrightarrow F_q \xrightarrow{\varphi_q} F_{q-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \longrightarrow I \longrightarrow 0$

が *minimal* とは，$\varphi_q(F_q) \subset \mathbf{m}F_{q-1}$　($\mathbf{m} : R$ の maximal ideal) であること．また，*graded* とは，各 F_q が，$F_q = \oplus_j R(-j)^{\beta_{q,j}(I)}$ の free modules の形で書けていることである．このとき，$\beta_{q,j}(I)$ のことを *graded betti numbers* という．

この graded betti numbers からは，D.Eisenbud（［Eis］**Corollary1.10**）によれば，Hilbert function を計算でき，そこから，どのような曲線や曲面に乗っているのかなどを知ることができる代数幾何にとって重要な量となる．

しかしながら，G.Fatabbi，A.Lorenzini が扱っていた（［FL］において）のは，two fat points ideals $I = p_0^a \cap p_1^b$　$(a > b)$ や，条件付き r fat points ideals $I = p_0^a \cap p_1^b \cap \cdots p_r^b$　$(r < n, a \geq 2b)$（但し，$p_i = \langle X_0, X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_n \rangle$）のみであったことからも分かる通り，一般的には graded betti numbers はほとんど知られていない．

したがって，本論文では，three fat points ideals $I = p_0^a \cap p_1^b \cap p_2^c$　$(a > b > c)$ の graded betti numbers を計算することを目的とする．

そして，得られた結果により算出された例が以下である．

Example:$(a, b, c) = (6, 5, 4), n = 3$ のとき

$$
\begin{aligned}
0 \quad &\longrightarrow R(-8)^2 \oplus R(-9)^5 \oplus R(-10)^8 \oplus R(-11)^6 \oplus R(-12)^3 \oplus R(-13) \\
&\longrightarrow R(-7)^7 \oplus R(-8)^{12} \oplus R(-9)^{17} \oplus R(-10)^{12} \oplus R(-11)^6 \oplus R(-12)^2 \\
&\longrightarrow R(-6)^6 \oplus R(-7)^7 \oplus R(-8)^9 \oplus R(-9)^6 \oplus R(-10)^3 \oplus R(-11) \\
&\longrightarrow I \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

2　計算手法

G.Fatabbi，A.Lorenzini の論文 (［FL］) で用いられた，S.Eliahou，M.Kervaire(see［EK］3 章) による splittable ideals を用いた graded betti numbers の計算法を用いて，ideal を graded betti numbers を計算しやすい ideals に分解させる方法を用いた．

Definition

R の monomial ideal I が *splittable* とは，$G(I) = G(U) \sqcup G(V)$ を満たす零でない２つの monomial ideals U，V が存在し，次の２条件を満たす *splitting function*Φ が存在するときをいう．(但し，$G(I)$ を I の minimal generator set とする.)

$\Phi = (\phi, \psi) : G(U \cap V) \to G(U) \times G(V); w \mapsto (\phi(w), \psi(w))$

(S1) $w = l.c.m.(\phi(w), \psi(w))$　$for \forall w \in G(U \cap V)$

(S2) 全ての部分集合 $G' \subset G(U \cap V)$ に対して，$l.c.m.(\phi(G'))$ と $l.c.m.(\psi(G'))$ は共に，$l.c.m.(G')$ を真に割り切る．

Fact(［EK］Proposition3.1)

I が U，V で R の splittable ideal のとき，$\beta_{q,j}(I) = \beta_{q,j}(U) + \beta_{q,j}(V) + \beta_{q-1,j}(U \cap V)$

このとき，V をさらに分解して，一つ一つ計算しやすい ideals に分割させていく．

しかし，I の graded betti numbers を計算する上で，やや複雑な ideals W_i の graded betti numbers を計算しなければならない．そこで，先程と同様に W_i を分割する．

（1）G.Fatabbi，A.Lorenzini による方法：X_1 の次数によって分割.

しかしながら,（1）だけでは，全ての W_i を計算することができない．そこで,

（2）新たな方法：$(a-b)+t$ 回目までは X_1 の次数で分割するが，それ以降は X_0 の次数で分割.

$(t = \frac{b+c-2a+i}{2}(b+c-2a+i : even), t = \frac{b+c-2a+i+1}{2}(b+c-2a+i : odd))$ を用いる．具体例を以下に記す.

Example:$(a,b,c) = (6,5,4)$ のとき

$G(W_5) = \{X_0^2X_1^3X_2^2, X_0^2X_1X_2^4, X_1^3X_2^4, X_0^3X_1^4X_2, X_0^3X_2^5, X_0^4X_1^5, X_0X_1^2X_2^3\}$

方法	$X_1^0(G(U_0))$	$X_1^1(G(U_1))$	$X_1^2(G(U_2))$	$X_1^3(G(U_3))$	$X_1^4(G(U_4))$	$X_1^5(G(U_5))$
（1）	$X_0^3X_2^5$	$X_0^2X_1X_2^4$	$X_0X_1^2X_2^3$	$X_0^2X_1^3X_2^2, X_1^3X_2^4$	$X_0^3X_1^4X_2$	$X_0^4X_1^5$

方法	$X_1^0(G(U'_0))$	$X_1^1(G(U'_1))$	$X_0^0(G(U'_2))$	$X_0^1(G(U'_3))$	$X_0^2(G(U'_4))$	$X_0^3(G(U'_5))$	$X_0^4(G(U'_6))$
（2）	$X_0^3X_2^5$	$X_0^2X_1X_2^4$	$X_1^3X_2^4$	$X_0X_1^2X_2^3$	$X_0^2X_1^3X_2^2$	$X_0^3X_1^4X_2$	$X_0^4X_1^5$

（1）のとき，$G(U_2 \cap V_2) = \{X_0^2X_1^3X_2^3, X_0X_1^3X_2^4\}$ となり，このとき，$(S2)$ を満たす splitting function が作れない．一方,（2）のときは，$G(U'_i \cap V'_i)$ が全て１つの単項式なので，splitting function は容易に作れる.

最後に，いくつか考察として，minimal graded free resolution を計算し，比較を試みる.

Example

1.$(a,b,c) = (4,3,2), n = 3$ のとき (W_i が（2）の方法で計算可）

$$
\begin{aligned}
0 &\longrightarrow R(-6)^2 \oplus R(-7)^5 \oplus R(-8)^3 \oplus R(-9) \\
&\longrightarrow R(-5)^7 \oplus R(-6)^{11} \oplus R(-7)^6 \oplus R(-8)^2 \\
&\longrightarrow R(-4)^6 \oplus R(-5)^6 \oplus R(-6)^3 \oplus R(-7) \\
&\longrightarrow I \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

2.$(a,b,c) = (4,3,1), n = 3$ のとき (W_i が（1）の方法で計算可)

$$
\begin{aligned}
0 &\longrightarrow R(-6)^3 \oplus R(-7)^4 \oplus R(-8)^2 \oplus R(-9) \\
&\longrightarrow R(-5)^{10} \oplus R(-6)^8 \oplus R(-7)^4 \oplus R(-8)^2 \\
&\longrightarrow R(-4)^8 \oplus R(-5)^4 \oplus R(-6)^2 \oplus R(-7) \\
&\longrightarrow I \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

3.$(a,b,c) = (4,3,0), n = 3$ のとき (two fat points の場合)

$$
\begin{aligned}
0 &\longrightarrow R(-6)^4 \oplus R(-7)^3 \oplus R(-8)^2 \oplus R(-9) \\
&\longrightarrow R(-5)^{12} \oplus R(-6)^6 \oplus R(-7)^6 \oplus R(-8)^3 \\
&\longrightarrow R(-4)^9 \oplus R(-5)^3 \oplus R(-6) \oplus R(-7) \\
&\longrightarrow I \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

・考察

1〜3 全てに対し，F_q の振れの範囲が全て同じになっている．これは，$(a,b), n$ に起因しているのか. また，1 と 2 を比較すると，総じて total betti numbers が大きくなっている．一般にこれが最大になるのは，$b = a-1, c = b-1$ のときなのかなどが今後の研究課題として考えられる.

3　参考文献

［Eis］:　D.Eisenbud *The Geometry of Syzygies*
Graduate Text in Mathematics 229 Springer-Verlag (2005)

［EK］:　S.Eliahou M.Kervaire *Minimal Resolutions of Some Monomial Ideals*
Journal of Algebra 129,1-25 (1990)

［FL］:　G.Fatabbi A.Lorenzini
On the graded resolutions of ideals of a few general fat points in $\mathbf{P}^n$
Journal of Pure and Applied Algebra 198,123-150 (2005)