# Minimal graded free resolutions of three fat points ideals in $\mathbb{P}^n$

楫研究室所属　修士2年
5110A024-8　菅井 謙

# 1. 概要

**Definition**

$k$: field　　$R = k[X_0, X_1, \cdots, X_n]$ : polynomial ring

$R$ の ideal $I$ の free resolution $F_\cdot : \cdots \to F_q \xrightarrow{\varphi_q} F_{q-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \to 0$

が minimal とは、$\varphi_q(F_q) \subset \mathfrak{m} F_{q-1}$ ($\mathfrak{m}$ : $R$ の maximal ideal)

を満たすことであり、$F_\cdot$ が graded とは、各 $F_q$ が $F_q = \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{q,j}}$

と書けることである。

このときの $\beta_{q,j}$ を graded betti numbers という。

この graded betti numbers からは、

- 定義に基づき minimal graded free resolution
- D. Eisenbud ([Eis] Cor. 1.10) によると Hilbert function

が計算でき、特に Hilbert function からは fat points がどのような曲線や曲面上にあるかを知ることができる量として重要である。

# 1. 概要

G. Fatabbi, A. Lorenzini が扱っていた fat points は

$$I = \mathfrak{p}_0^a \cap \mathfrak{p}_1^b \quad (a \geq b)$$

$$I = \mathfrak{p}_0^a \cap \mathfrak{p}_1^b \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r^b \quad (r < n,\ a \geqq 2b)$$

$$(\mathfrak{p}_i = \langle X_0, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_n \rangle)$$

のみであったことからも一般的には graded betti numbers はほとんど知られていない。

したがって本論文では、three fat points ideals

$$I = \mathfrak{p}_0^a \cap \mathfrak{p}_1^b \cap \mathfrak{p}_2^c \quad (a > b > c)$$

の graded betti numbers を計算することを目的とし、得られた結果をもとに算出した free resolution の一例が以下の通り。

Example : $(a, b, c) = (6, 5, 4)$ の場合 $(n = 3)$

$$0 \to R(-8)^2 \oplus R(-9)^5 \oplus R(-10)^8 \oplus R(-11)^6 \oplus R(-12)^3 \oplus R(-13)$$
$$\to R(-7)^7 \oplus R(-8)^{12} \oplus R(-9)^{17} \oplus R(-10)^{12} \oplus R(-11)^6 \oplus R(-12)^2$$
$$\to R(-6)^6 \oplus R(-7)^7 \oplus R(-8)^9 \oplus R(-9)^6 \oplus R(-10)^3 \oplus R(-11)$$
$$\to I \to 0$$

## 2. 計算手法

Definition

Rのmonomial ideal $I$ が splittable とは、$G(I) = G(U) \sqcup G(V)$ を満たす零でない2つのmonomial ideals $U, V$ が存在し、次の2条件を満たす splitting function $\Phi$ が存在するときをいう。(但し、$G(I)$ は $I$ の minimal generator set とする。)

$\Phi = (\varphi, \psi) : G(U \cap V) \to G(U) \times G(V)\,;\ w \mapsto (\varphi(w), \psi(w))$

(S1) $w = \mathrm{l.c.m.}(\varphi(w), \psi(w))$

(S2) 全ての部分集合 $G' \subset G(U \cap V)$ に対して、$\mathrm{l.c.m}(\varphi(G'))$ と $\mathrm{l.c.m.}(\psi(G'))$ は共に $\mathrm{l.c.m.}(G')$ を真に割り切る

Fact ([EK] Proposition 3.1)

$I$ が $U, V$ で R の splittable ideal のとき、次が成り立つ

$$\beta_{q,j}(I) = \beta_{q,j}(U) + \beta_{q,j}(V) + \beta_{q-1,j}(U \cap V)$$

この事実を用いて、fat points ideal $I$ を少しずつ分かりやすく計算が容易なidealに分割させていく。

$$\overbrace{M^a,\ NM^{a-1},\ N^2M^{a-2},\ \cdots,\ N^{a-b}M^b,\ W_{a-b+1}M^{b-1},\ W_{a-b+2}M^{b-2},\ \cdots,\ W_a}^{I}$$

↓ 分割

Fact ( [FL] Proposition 8.2 )

$$\beta_{q,j}(JM^d) = \sum_{p=0}^{q} \beta_{p,\,j-q+p-d}(J)\,\beta_{q-p}(M^d)$$

( J に該当する ideal が $N^i$ か $W_i$ )

$$N = \langle X_1, X_2 \rangle$$

$$W_i = \langle \{ X_0^t X_1^{m_1} X_2^{m_2} \mid 1 \leqq t \leqq i-(a-b),\ m_1+m_2 = i,\ h \in \{1,2\} \text{ s.t. } m_h = a - a_h + t$$

$$h' \neq h \text{ に対して } m_{h'} < a - a_{h'} + t \} \qquad (a_1 = b,\ a_2 = c)$$

$$\cup \{ X_1^{m_1} X_2^{m_2} \mid m_1 + m_2 = i,\ m_1 \leqq a-b,\ m_2 \leqq a-c \}$$

$$\cup \{ X_0^{m_0} X_1^{a-b+t} X_2^{a-c+t} \mid 1 \leqq t \leqq b,\ t \geqq m_0 = b+c-2a+i-t \} \rangle$$

$$M = \langle X_3, \cdots, X_n \rangle$$

Fig

## 2. 計算手法

$I$ の betti numbers を計算する上で、やや複雑な ideal $W_i$ の graded betti numbers を計算しなければならない。先程の splitting を用いるのだが、

方法(1) G. Fatabbi, A. Lorenzini による：$X_1$ の次数によって分割

では全ての $W_i$ は分割できない。(特に、$i > 2a-b-c$ のとき)

方法(2) 新たな方法：途中までは $X_1$ の次数で分割するが、それ以降は $X_0$ の次数で分割.

Example：$(a, b, c) = (6, 5, 4)$

$$G(W_5) = \{X_0^2X_1^3X_2^2,\ X_0^2X_1X_2^4,\ X_1^3X_2^4,\ X_0^3X_1^4X_2,\ X_0^3X_2^5,\ X_0^4X_1^5,\ X_0X_1^2X_2^3\}$$

方法(1)

$\overset{X_1^0}{G(U_0)=\{X_0^3X_2^5\}}$ $\overset{X_1^1}{G(U_1)=\{X_0^2X_1X_2^4\}}$ $\overset{X_1^2}{G(U_2)=\{X_0X_1^2X_2^3\}}$ $\overset{X_1^3}{G(U_3)=\{X_0^2X_1^3X_2^2,\ X_1^3X_2^4\}}$

$\overset{X_1^4}{G(U_4)=\{X_0^3X_1^4X_2\}}$ $\overset{X_1^5}{G(U_5)=\{X_0^4X_1^5\}}$

◎ $G(U_2 \cap V_2) = \{X_0^2X_1^3X_2^3,\ X_0X_1^3X_2^4\} \to G(U_2) \times G(V_2)$ で(S2)を満たせるものが作れない。

方法(2)

$\overset{X_1^0}{G(U_0')=\{X_0^3X_2^5\}}$ $\overset{X_1^1}{G(U_1')=\{X_0^2X_1X_2^4\}}$ $\overset{X_0^0}{G(U_2')=\{X_1^3X_2^4\}}$ $\overset{X_0^1}{G(U_3')=\{X_0X_1^2X_2^3\}}$

$\overset{X_0^2}{G(U_4')=\{X_0^2X_1^3X_2^2\}}$ $\overset{X_0^3}{G(U_5')=\{X_0^3X_1^4X_2\}}$ $\overset{X_0^4}{G(U_6')=\{X_0^4X_1^5\}}$

◎ $G(U_i' \cap V_i')$ が全て1つの単項式なので splitting function は容易に作れる。

# 3. 例と考察

## Examples

1. $(a.b.c)=(4.3.2)$ $n=3$ のとき（今回の結果による計算）

$$0 \to R(-6)^2 \oplus R(-7)^5 \oplus R(-8)^3 \oplus R(-9)$$
$$\to R(-5)^7 \oplus R(-6)^{11} \oplus R(-7)^6 \oplus R(-8)^2$$
$$\to R(-4)^6 \oplus R(-5)^6 \oplus R(-6)^3 \oplus R(-7) \to I \to 0$$

2. $(a.b.c)=(4.3.1)$ $n=3$ のとき（$W_i$ が(1)の方法のみで計算可）

$$0 \to R(-6)^3 \oplus R(-7)^4 \oplus R(-8)^2 \oplus R(-9)$$
$$\to R(-5)^{10} \oplus R(-6)^8 \oplus R(-7)^4 \oplus R(-8)^2$$
$$\to R(-4)^8 \oplus R(-5)^4 \oplus R(-6)^2 \oplus R(-7) \to I \to 0$$

3. $(a.b.c)=(4.3.0)$ $n=3$ のとき（two fat points の場合）

$$0 \to R(-6)^4 \oplus R(-7)^3 \oplus R(-8)^2 \oplus R(-9)$$
$$\to R(-5)^{12} \oplus R(-6)^6 \oplus R(-7)^6 \oplus R(-8)^3$$
$$\to R(-4)^9 \oplus R(-5)^3 \oplus R(-6) \oplus R(-7) \to I \to 0$$

## 考察と課題

- 1〜3 全てに対し、$F_g$ の振れの範囲が全て同じである。

→ これは $(a,b)$, $n$ に起因するものか。

- 1, 2 を比較すると、総じて total betti numbers が大きい。

→ 一般に、これが最大になるのは $b=a-1$, $c=b-1$ のときか。

などが今後の研究課題として考えられる。