Minimal graded free resolutions of three fat points ideals in $\mathbf{P}^n$

楫研究室所属　修士２年
5110A024-8　菅井　謙
指導教員　楫　元

目 次

1　概要

G.Fatabbi や A.Lorenzini による，fat points ideals の minimal graded free resolution に関する論文 (［F］［FL］) を読んだ．ここで言う fat points ideal I は，多項式環 $k[X_0, X_1, \cdots, X_n]$(k:field) 上の ideal で，

$$I = p_0^{a_0} \cap p_1^{a_1} \cap \cdots p_r^{a_r} \quad (r < n, a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_r)$$

のことである．($p_i = \langle X_0, X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_n \rangle$) また，ここで言う ideal I の *minimal graded free resolution* $F.$ とは，
$F. : \cdots \longrightarrow F_q \xrightarrow{\varphi_q} F_{q-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_0 \longrightarrow I \longrightarrow 0$
が free resolution で，$\varphi_q(F_q) \subset \mathbf{m}F_{q-1}$ ($\mathbf{m}$: R の maximal ideal) を満たし，各 F_q が，$F_q = \oplus_j R(-j)^{\beta_{q,j}(I)}$ の free modules の形で書けていることである．このとき，$\beta_{q,j}(I)$ のことを *graded betti numbers* という．また，$\beta_q(I) = \sum_j \beta q, j(I)$ を *total betti numbers* という．この fat points ideals は，minimal graded free resolutions や，Hilbert functions $H_I(d)(= dim_k I_d)$ はあまり知られていない．実際，G.Fatabbi や A.Lorenzini(［FL］) の論文中でも，two fat points ideals

$$I = p_0^a \cap p_1^b \quad (a > b)$$

や，条件付きの $r(< n)$ 個の fat points ideals

$$I = p_0^a \cap p_1^b \cap \cdots p_r^b \quad (r < n, a \geq 2b)$$

しか，扱われていない．

本論文では，G.Fatabbi や A.Lorenzini の論文 (［FL］) でも用いられている，S.Eliahou や，M.Kervaire(see［EK］3 章) で扱われている splittable ideals を用いた graded betti numbers の計算法を用いて，three fat points ideals

$$I = p_0^a \cap p_1^b \cap p_2^c \quad (a > b > c)$$

の graded betti numbers を計算することを目的とする．以下にその定義と graded betti numbers に関する命題を記す．以下，$G(I)$ を I の minimal generator set とする．

Definition
R の monomial ideal I が *splittable* とは，$G(I) = G(U) \sqcup G(V)$ を満たす零でない２つの monomial ideals U，V が存在し，次の２条件を満たす *splitting function* が存在するときをいう．
$\Phi = (\phi, \psi) : G(U \cap V) \to G(U) \times G(V); w \mapsto (\phi(w), \psi(w))$
(S1) $w = l.c.m.(\phi(w), \psi(w)) \quad for \forall w \in G(U \cap V)$
(S2) 全ての部分集合 $G' \subset G(U \cap V)$ に対して，$l.c.m.(\phi(G'))$ と $l.c.m.(\psi(G'))$ は共に，$l.c.m.(G')$ を真に割り切る．

Fact1(［EK］Proposition3.1)
I が U，V で R の splittable ideal のとき，次が成り立つ．

$$\beta_{q,j}(I) = \beta_{q,j}(U) + \beta_{q,j}(V) + \beta_{q-1,j}(U \cap V)$$

こうすることによって，比較的簡単な ideal に置き換えて，graded betti numbers を計算することが可能になる．さらにここから，D.Eisenbud(see［E］Corollary1.10) によれば，graded betti numbers から，Hilbert function が得られる．次に，graded betti numbers を計算し，できた graded free resolution の一例を挙げる．

Example
$(a, b, c) = (6, 5, 4)$ の場合，

$$\begin{aligned} 0 \quad & \longrightarrow R(-8)^2 \oplus R(-9)^5 \oplus R(-10)^8 \oplus R(-11)^6 \oplus R(-12)^3 \oplus R(-13) \\ & \longrightarrow R(-7)^7 \oplus R(-8)^{12} \oplus R(-9)^{17} \oplus R(-10)^{12} \oplus R(-11)^6 \oplus R(-12)^2 \\ & \longrightarrow R(-6)^6 \oplus R(-7)^7 \oplus R(-8)^9 \oplus R(-9)^6 \oplus R(-10)^3 \oplus R(-11) \\ & \longrightarrow I \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

2 splitting of three fat points ideals

k を field とし，$R = k[X_0, X_1, \cdots, X_n]$ $(n > 2)$ を polynomial ring とする．このとき，次の fat points ideal I を考える．

$$I = p_0^a \cap p_1^b \cap p_2^c \quad (a > b > c)$$

一般に，R の fat points ideal I を

$$I = p_0^{a_0} \cap p_1^{a_1} \cap \cdots p_r^{a_r} \quad (r < n, a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_r)$$

とするとき，G_t を次で定義すると，［F］の **Theorem2.4** から **Fact2** が成り立つことが分かっている．
$G_0 = \{X_1^{m_1}, X_2^{m_2}, \cdots, X_n^{m_n} : m_i \leq a_0 - a_i \;\; 1 \leq \forall i \leq r, \sum_{i=1}^n m_i = a_0\}$
また，$t \geq 1$ のとき，

$$\begin{aligned} G_t = \quad & \{X_0^{m_0}, X_1^{m_1}, \cdots, X_n^{m_n} : m_i \leq a_0 - a_i + t \;\; 0 \leq \forall i \leq r, \textstyle\sum_{i=1}^n m_i = a_0 + t, \\ & \exists k \neq l \in \{0, 1, \cdots, r\} \; s.t. \; m_k = a_0 - a_k + t, m_l = a_0 - a_l + t\} \end{aligned}$$

Fact2(［F］Theorem2.4)

$$G(I) = \cup_{t=0}^{a_1} G_t$$

ここで，M，N，W_i を次で定義する．
$M = \langle X_3, X_4, \cdots, X_n \rangle$
$N = \langle X_1, X_2 \rangle$

$$\begin{aligned} W_i \;\; = \;\; & \langle \{X_0^t X_1^{m_1} X_2^{m_2} : 1 \le t \le i-(a-b), m_1+m_2=i, r,s \in \{1,2\}\ s.t. \\ & m_r = a-a_r+t, m_s < a-a_s+t\} \cup \\ & \{X_1^{m_1} X_2^{m_2} : m_1+m_2=i, m_1 \le a-b, m_2 \le a-c\} \cup \\ & \{X_0^{m_0} X_1^{a-b+t} X_2^{a-c+t} : 1 \le t \le b, t \ge m_0 = b+c-2a+i-t\}\rangle \end{aligned}$$

ただし，$a-b+1 \le i \le a$ で，$a_1 = b, a_2 = c$ である．
ここで，以下，次のように W_i を分けておく．

$$\begin{aligned} G(W_{i,0}) \;\; = \;\; & \{X_0^t X_1^{m_1} X_2^{m_2} : 1 \le t \le i-(a-b), m_1+m_2=i, r,s \in \{1,2\}\ s.t. \\ & m_r = a-a_r+t, m_s < a-a_s+t\} \end{aligned}$$

$G(W_{i,1}) = \{X_1^{m_1} X_2^{m_2} : m_1+m_2=i, m_1 \le a-b, m_2 \le a-c\}$
$G(W_{i,2}) = \{X_0^{m_0} X_1^{a-b+t} X_2^{a-c+t} : 1 \le t \le b, t \ge m_0 = b+c-2a+i-t\}$
このとき，次が成り立っていることに注意する．

$$W_a \subset W_{a-1} \subset \cdots \subset W_{a-b+1} \subset N^{a-b} \subset \cdots N$$

この ideals によって，$G(I)$ は，次のように書きかえられる．
Proposition3

$$G(I) = (\cup_{i=0}^{a-b} G(N^i M^{a-i})) \cup (\cup_{i=a-b+1}^{a} G(W_i M^{a-i}))$$

Proof
$m_0 = 0$ で，

$$X_1^{m_1} X_2^{m_2} \cdots X_n^{m_n} \in (\cup_{t=0}^{a-b} G(N^i M^{a-i})) \cup (\cup_{a-b+1}^{a} G(W_i M^{a-i}))$$

ならば，$a-b < a-c$ や，G_0 の定義から明らかに，

$$X_1^{m_1} X_2^{m_2} \cdots X_n^{m_n} \in G_0$$

となり，$m_0 > 0$ で，

$$X_0^{m_0} X_1^{m_1} X_2^{m_2} \cdots X_n^{m_n} \in G(W_i M^{a-i}) \;\; (a-b+1 \le i \le a)$$

のとき，次の 2 通りが考えられる．

- $m_0 = t,\ r,s \in \{1,2\}\ s.t. m_r = a-a_r+t, m_s < a-a_s+t$
- $m_0 = b+c-2a+i-t, m_1 = a-b+t, m_2 = a-c+t$

前者ならば，$m_1 + m_2 = i$ なので，明らかに，$\sum_{i=0}^n m_i = a+t$ となり，$X_0^{m_0} X_1^{m_1} X_2^{m_2} \cdots X_n^{m_n} \in G_t$ したがって，**Fact2** から，$X_0^{m_0} X_1^{m_1} X_2^{m_2} \cdots X_n^{m_n} \in G(I)$ 同様に，後者ならば，$\sum_{i=0}^2 m_i = i+t$ で，$\sum_{i=0}^n m_i = a+t$ となり，$X_0^{m_0} X_1^{m_1} X_2^{m_2} \cdots X_n^{m_n} \in G(I)$ また逆に，$G_0 \subset (\cup_{t=0}^{a-b} G(N^i M^{a-i})) \cup (\cup_{a-b+1}^{a} G(W_i M^{a-i}))$ は明らか．$t \ge 1$ に対して，$X_0^{m_0} X_1^{m_1} X_2^{m_2}, \cdots X_n^{m_n} \in G_t$ のとき，次の 2 通りが考えられる．

- $m_0 = t,\ r,s \in \{1,2\}\ s.t. m_r = a-a_r+t, m_s < a-a_s+t$

- $m_1 = a - b + t, m_2 = a - c + t$

前者ならば，$m_1 + m_2 = i$ とすると，(つまり，$\sum_{i=0}^{2} m_i = i + t$) $m_1 = a - b + t$ ならば，$i = a - b + t + m_1 \geq a - b + t$ つまり，$t \leq i - (a - b)$ 同様に，$m_2 = a - c + t$ ならば，$t \leq i - (a - c) \leq i - (a - b)$

後者ならば，$\sum_{i=0}^{2} m_i = i + t$ とすると，$m_0 = b + c - 2a + i - t$ となる．ゆえに，いずれの場合も，$X_0^{m_0} X_1^{m_1} X_2^{m_2} \in G(W_i)$ このとき，$X_3^{m_3} \cdots X_n^{m_n} \in G(M^{a-i})$ よって，逆も言えた．

■

ここで，［FL］**Theorem3.1** より，次が分かっている．

Fact4(［FL］Theorem3.1)

I は，$(V = \langle G(I) \setminus G(U) \rangle, U = M^{a_0})$ により，splittable.

これより，I は，$(V = \langle G(I) \setminus G(U) \rangle, U = M^{a})$ によって，splittable.

ここで，U_i，V_i を，次で定義する．

$$U_i = \begin{cases} N^i M^{a-i} & i = 0, 1, \cdots, a - b \\ W_i M^{a-i} & i = a - b + 1, a - b + 2, \cdots, a \end{cases}$$

$$V_i = \begin{cases} \langle G(I) \setminus G(U_0) \rangle & i = 0 \\ \langle G(V_{i-1}) \setminus G(U_i) \rangle & i = 1, 2, \cdots, a - 1 \end{cases}$$

このとき，$(U, V) = (U_0, V_0)$ で，明らかに $V_{a-1} = U_a$.

そして，$U_i \cap V_i$ は次のようになる．

Lemma5

$$U_i \cap V_i = \begin{cases} N^{i+1} M^{a-i} & i = 0, 1, \cdots, a - b - 1 \\ W_{i+1} M^{a-i} & i = a - b, a - b + 1, \cdots, a - 1 \end{cases}$$

Proof

Proposition3 から，

$I = \sum_{j=0}^{a-b} N^j M^{a-j} + \sum_{j=a-b+1}^{a} W_j M^{a-j}$ なので，$G(U_i) \cap G(U_j) = \emptyset$ $(i \neq j)$ だから，

$$V_i = \begin{cases} \sum_{j=i+1}^{a-b} N^j M^{a-j} + \sum_{j=a-b+1}^{a} W_j M^{a-j} & i = 0, 1, \cdots, a - b - 1 \\ \sum_{j=i+1}^{a} W_j M^{a-j} & i = a - b, a - b + 1, \cdots, a - 1 \end{cases}$$

したがって，

$$\begin{cases} N^{i+1} M^{a-i} \subset N^{i+1} M^{a-(i+1)} \subset V_i & (i = 0, 1, \cdots, a - b - 1) \\ W_{i+1} M^{a-i} \subset W_{i+1} M^{a-(i+1)} \subset V_i & (i = a - b, a - b + 1, \cdots, a - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N^{i+1} M^{a-i} \subset N^i M^{a-i} = U_i & (i = 0, 1, \cdots, a - b - 1) \\ W_{a-b+1} M^b \subset N^{a-b} M^b = U_{a-b} & \\ W_{i+1} M^{a-i} \subset W_i M^{a-i} = U_i & (i = a - b + 1, a - b + 2, \cdots, a - 1) \end{cases}$$

から，

$$\begin{cases} N^{i+1} M^{a-i} \subset U_i \cap V_i & (i = 0, 1, \cdots, a - b - 1) \\ W_{i+1} M^{a-i} \subset U_i \cap V_i & (i = a - b, a - b + 1, \cdots, a - 1) \end{cases}$$

また，逆に，

$f \in U_i \cap V_i$ を取ると，$f \in V_i$ より，$n|f$ を満たす
$n \in G(M^{i+1}) \quad (i = 0, 1, \cdots, a-b-1)$
$n \in G(W_{i+1}) \quad (i = a-b, a-b+1, \cdots, a-1)$
が存在する．
また，$f \in U_i$ より，$m|f$ を満たす $m \in G(M^{a-i})$ が存在する．
このとき，$l.c.m.(n, m) = nm$ より，$nm|f$ となる．さらに，
$nm \in M^{i+1}M^{a-i} \quad (i = 0, 1, \cdots, a-b-1)$
$nm \in W_{i+1}M^{a-i} \quad (i = a-b, a-b+1, \cdots, a-1)$
であるから，
$f \in M^{i+1}M^{a-i} \quad (i = 0, 1, \cdots, a-b-1)$
$f \in W_{i+1}M^{a-i} \quad (i = a-b, a-b+1, \cdots, a-1)$

■

この U_i，V_i には，V_{i-1} の splittable ideal になっている．
Proposition6
各 $i = 1, 2, \cdots, a-1$ に対して，V_{i-1} は，(U_i, V_i) によって，splittable ideal.
Proof
splitting function $\Phi_i = (\phi_i, \psi_i) : G(U_i \cap V_i) \to G(U_i) \times G(V_i)$
を次で定義する．

$$\psi_i(fg) = f\frac{g}{X_{min(g)}}$$

$$\phi_i(fg) = \begin{cases} \frac{f}{X_{min(f)}}g & (f \in G(N^{i+1}) or G(W_{i+1,1})) \\ \frac{f}{X_0X_h}g & (f \in W_{i+1,0}) \\ \frac{f}{X_0}g & (f \in W_{i+1,2}, X_0 \mid f) \\ \frac{f}{X_1X_2}g & (f \in W_{i+1,2}, X_0 \not| f) \end{cases}$$

（但し，$f \in \begin{cases} G(N^{i+1}) & (i = 0, 1, \cdots, a-b-1) \\ G(W_{i+1}) & (i = a-b, a-b+1, \cdots, a-1) \end{cases}, g \in G(M^{a-i})$
また，$min(f) = min\{j | m_j > 0\}$ とする．）
このとき，$(S1)$ は満たすことは明らか．
$(S2)$ に関しては，$G(U_i \cap V_i) \supset G'$ を取る．$l.c.m.(G') = fg$ とすると，$min(g) \leq min(g')$ を満たす $g' \in G(M^{a-i})$ で，$l.c.m.(\phi_i(G'))$ は，$l.c.m.(\phi_i(G')) = fg'$ と書ける．このとき，$g = X_{min(g)}^{a_{min(g)}} \cdots X_n^{a_n}$，$g' = X_{min(g')}^{b_{min(g')}} \cdots X_n^{b_n}$ とすると，
$a_j \geq b_j \quad (j \geq min(g))$ が成り立つ．したがって，$l.c.m.(\phi_i(G')) \mid l.c.m.(G')$
また同様に，$l.c.m.(\psi_i(G')) \mid l.c.m.(G')$ も成り立つ．従って，$(S2)$ も満たす．

■

ここで，M^d，N^d は［EK］の **Example3.1** より，

$$\beta_q(M^d) = \begin{pmatrix} d + (n-2) - 1 \\ d + q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d + q - 1 \\ q \end{pmatrix}$$

$$\beta_q(N^d) = \begin{pmatrix} d + 2 - 1 \\ d + q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d + q - 1 \\ q \end{pmatrix}$$

が分かる.

Fact7(［FL］Proposition8.2)

$$\beta_{q,j}(JM^d) = \sum_{p=0}^{q} \beta_{q,j-q+p-d}(J)\beta_{q-p}(M^d)$$

が分かっているので，W_i の graded betti numbers が分かれば，I の graded betti numbers が分かる.

3　W_i の graded betti numbers の計算

次に W_i の graded betti numbers を計算する.

［FL］と同様に,

$U'_l = \langle \{ m \in G(W_i) : X_1^l \mid m, X_1^{l+1} \nmid m \} \rangle \quad l = 0, 1, \cdots, i$

$V'_l = \langle \{ m \in G(W_i) : X_1^{l+1} \mid m \} \rangle \quad l = 0, 1, \cdots, i-1$

と定義すると，$i > 2a - b - c$ のとき，上手く splittable ideal を構成できない.

Example

$(a, b, c) = (6, 5, 4)$ のとき,

$G(W_5) = \{ X_0^2 X_1^3 X_2^2, X_0^2 X_1 X_2^4, X_1^3 X_2^4, X_0^3 X_1^4 X_2, X_0^3 X_2^5, X_0^4 X_1^5, X_0 X_1^2 X_2^3 \}$

このとき,

$G(U'_0) = \{ X_0^3 X_2^5 \}$

$G(U'_1) = \{ X_0^2 X_1 X_2^4 \}$

$G(U'_2) = \{ X_0 X_1^2 X_2^3 \}$

$G(U'_3) = \{ X_0^2 X_1^3 X_2^2, X_1^3 X_2^4 \}$

$G(U'_4) = \{ X_0^3 X_1^4 X_2 \}$

$G(U'_5) = \{ X_0^4 X_1^5 \}$

で,

$G(U'_0 \cap V'_0) = \{ X_0^3 X_1 X_2^5 \}$

$G(U'_1 \cap V'_1) = \{ X_0^2 X_1^2 X_2^4 \}$

$G(U'_2 \cap V'_2) = \{ X_0^2 X_1^3 X_2^3, X_0 X_1^3 X_2^4 \}$

$G(U'_3 \cap V'_3) = \{ X_0^3 X_1^4 X_2^2 \}$

$G(U'_4 \cap V'_4) = \{ X_0^4 X_1^5 X_2 \}$

となるが，$\Phi_i = (\phi_i, \psi_i) : G(U'_2 \cap V'_2) \to G(U'_2) \times G(V'_2)$ を,

$\phi_i(X_0^2 X_1^3 X_2^3) = X_0 X_1^2 X_2^3$

$\phi_i(X_0 X_1^3 X_2^4) = X_0 X_1^2 X_2^3$

$\psi_i(X_0^2 X_1^3 X_2^3) = X_0^2 X_1^3 X_2^2$

$\psi_i(X_0 X_1^3 X_2^4) = X_1^3 X_2^4$

とすると，$l.c.m.(U'_2 \cap V'_2) = l.c.m.(\psi_i(U'_2 \cap V'_2))$ となり，$(S2)$ を満たさない.

そこで，途中から，以下のように分け方を変えた.

$k = a - b + \frac{b+c-2a+i}{2} (b+c-2a+i : even), k = a - b + \frac{b+c-2a+i+1}{2} (b+c-2a+i :$

$odd)$ とすると,
$l=0,1,\cdots,k-1$ のとき,
$U'_l=\langle\{m\in G(W_i):X_1^l\mid m, X_1^{l+1}\not| m\}\rangle$
$V'_l=\langle\{m\in G(W_i):X_1^{l+1}\mid m\}\rangle$
$l=k,k+1,\cdots i-(a-b)+k$ のとき,
$U'_l=\langle\{m\in G(W_i):X_0^{l-k}\mid m, X_0^{l-k+1}\not| m\}\rangle$
$V'_l=\langle\{m\in G(W_i):X_0^{l-k+1}\mid m\}\rangle$
すると，以下のことが成り立つ.

Lemma8

各 $l=0,1,\cdots,i-(a-b)+k$ に対して,

$$U'_l=\begin{cases}\langle X_0^{i-(a-c)-l}X_1^lX_2^{i-l}\rangle & l=0,1,\cdots,k-1\\ \langle X_0^{l-k}X_1^{i-(a-c)-l+k}X_2^{i-(a-b)-l+k}\rangle & l=k,k+1,\cdots,2k-(a-b)-1\\ \langle X_0^{l-k}X_1^{a-b+l-k}X_2^{i-(a-b)-l+k}\rangle & l=2k-(a-b),2k-(a-b)+1,\cdots,i-(a-b)+k\end{cases}$$

また，各 $l=0,1,\cdots,i-1$ に対して,

$$U'_l\cap V'_l=\begin{cases}\langle X_0^{i-(a-c)-l}X_1^{l+1}X_2^{i-l}\rangle & l=0,1,\cdots,k-1\\ \langle X_0^{l-k+1}X_1^{i-(a-c)-l+k}X_2^{i-(a-b)-l+k}\rangle & l=k,k+1,\cdots,2k-(a-b)-1\\ \langle X_0^{l-k+1}X_1^{a-b+l-k+1}X_2^{i-(a-b)-l+k}\rangle & l=2k-(a-b),\cdots,i-(a-b)+k-1\end{cases}$$

が成り立つ.

Proof

U'_l について証明する.
(右辺) $\subset$ (左辺) は明らか.
$i>2a-b-c$ のとき，$W_{i,1}=\emptyset$ であることに注意する.
先ず，$0\le l\le k-1$ のとき，$G(U'_l)\ni X_0^{m_0}X_1^lX_2^{m_2}$ を任意に取ると,
$m_0\ge b+c-2a+i-(\frac{b+c-2a+i}{2}-1)=\frac{b+c-2a+i}{2}+1(b+c-2a+i:even)$
$m_0\ge b+c-2a+i-\frac{b+c-2a+i-1}{2}=\frac{b+c-2a+i+1}{2}(b+c-2a+i:odd)$
となり，$X_0^{m_0}X_1^lX_2^{m_2}\in G(W_{i,0})$ となる.
ゆえに，$m_2=a-c+k=i-l, m_0=i-(a-c)-l$ となる.
ここで，V_{k-1} について，$k\le m_1$ のとき，$m_2=i-m_1, m_0=t, m_2=a-c+t$ とすると，$t\le\frac{b+c-2a+i}{2}(b+c-2a+i:even), t\le\frac{b+c-2a+i-1}{2}(b+c-2a+i:odd)$ なので，$a-b+t\le m_1$ ゆえに，V_{k-1} には，$W_{i,0}$ の部分における，$X_0^tX_1^{m_1}X_2^{a-c+t}$ の形は存在しない．したがって，V_{k-1} には，$W_{i,0}$ の部分においては，$X_0^tX_1^{a-b+t}X_2^{m_2}$ の形しかない.（但し，$t\ge\frac{b+c-2a+i}{2}(b+c-2a+i:even), t\ge\frac{b+c-2a+i+1}{2}(b+c-2a+i:odd)$）
以上を踏まえて，$k\le l\le 2k-(a-b)-1$ のとき，$G(U'_l)\ni X_0^{l-k}X_1^{m_1}X_2^{m_2}$ を任意に取ると,
$m_0\le b+c-2a+i-(\frac{b+c-2a+i}{2})=\frac{b+c-2a+i}{2}(b+c-2a+i:even)$
$m_0\le b+c-2a+i-\frac{b+c-2a+i-1}{2}=\frac{b+c-2a+i-1}{2}(b+c-2a+i:odd)$
となり，$X_0^{l-k}X_1^{m_1}X_2^{m_2}\in G(W_{i,2})$ となる．したがって，$m_1=i-(a-c)-l+k, m_2=i-(a-b)-l+k$ となる.
また，$2k-(a-b)\le l\le i-(a-b)+k$ のとき，$G(U'_l)\ni X_0^{l-k}X_1^{m_1}X_2^{m_2}$ を任

意に取ると，$X_0^{l-k}X_1^{m_1}X_2^{m_2} \in W_{i,0}$ 先程のことより，$m_1 = a-b+l-k, m_2 = i-(a-b)-l+k$ 以上より，U'_l に関しては示せた.
また，$U'_l \cap V'_l$ に関しては，U'_l から，簡単に示せる.

■

このとき，次が成り立つ.
Proposition9
W_i は，(U'_0, V'_0) によって，splittable ideal.
各 $l = 1, 2, \cdots, i-(a-b)-1$ に対して，
V'_{l-1} は，(U'_l, V'_l) によって，splittable ideal.
Proof
splitting function $\Phi_l = (\phi_l, \psi_l) : G(U'_l \cap V'_l) \to G(U'_l) \times G(V'_l)$
を次で定義する.

$$\Phi_l(m) = \begin{cases} (\frac{m}{X_1}, \frac{m}{X_0X_2}) & (l = 0, 1, \cdots, k-1) \\ (\frac{m}{X_0}, \frac{m}{X_1X_2}) & (l = k, k+1, \cdots, 2k-(a-b)-1) \\ (\frac{m}{X_0}, \frac{m}{X_2}) & (l = 2k-(a-b)(b+c-2a+i : odd)) \\ (\frac{m}{X_0X_1}, \frac{m}{X_2}) & (l = 2k-(a-b)(b+c-2a+i : even), 2k-(a-b)+1, \cdots, i-(a-b)+k-1) \end{cases}$$

これが，$(S1), (S2)$ を満たすことは明らか.

■

ちなみに，$i \le 2a-b-c$ のときは,［FL］と同様にできた.

$$U'_l = \langle \{m \in G(W_i) | X_1^l \mid m, X_1^{l+1} \nmid m\} \rangle \quad l = 0, 1, \cdots, i$$
$$V'_l = \langle \{m \in G(W_i) | X_1^{l+1} \mid m\} \rangle \quad l = 0, 1, \cdots, i-1$$

と定義すると，
Lemma8'
各 $l = 0, 1, \cdots, i$ に対して，

$$U'_l = \begin{cases} \langle X_0^{i-(a-c)-l} X_1^l X_2^{i-l} \rangle & l = 0, 1, \cdots, i-(a-c)-1 \\ \langle X_1^l X_2^{i-l} \rangle & l = i-(a-c), i-(a-c)+1, \cdots, a-b \\ \langle X_0^{i-(a-b)} X_1^l X_2^{i-l} \rangle & l = a-b+1, a-b+2, \cdots, i \end{cases}$$

また，各 $l = 0, 1, \cdots, i-1$ に対して，

$$U'_l \cap V'_l = \begin{cases} \langle X_0^{i-(a-c)-l} X_1^{l+1} X_2^{i-l} \rangle & l = 0, 1, \cdots, i-(a-c)-1 \\ \langle X_1^{l+1} X_2^{i-l} \rangle & l = i-(a-c), i-(a-c)+1, \cdots, a-b-1 \\ \langle X_0^{i-(a-b)+1} X_1^{l+1} X_2^{i-l} \rangle & l = a-b, a-b+1, \cdots, i-1 \end{cases}$$

が成り立ち，
Proposition9'
W_i は，(U'_0, V'_0) によって，splittable ideal.
各 $l = 1, 2, \cdots, i-1$ に対して，
V'_{l-1} は，(U'_l, V'_l) によって，splittable ideal.
となる．このとき，
splitting function $\Phi_l = (\phi_l, \psi_l) : G(U'_l \cap V'_l) \to G(U'_l) \times G(V'_l)$
は，以下のようになる.

$$\Phi_l(m) = \begin{cases} (\frac{m}{X_1}, \frac{m}{X_0X_2}) & (l = 0, 1, \cdots, i-(a-c)-1) \\ (\frac{m}{X_1}, \frac{m}{X_2}) & (l = i-(a-c), i-(a-c)+1, \cdots, a-b-1) \\ (\frac{m}{X_0X_1}, \frac{m}{X_2}) & (l = a-b, a-b+1, \cdots, i-1) \end{cases}$$

以上のことから，W_i の graded betti numbers は以下のようになる．
U'_l や，$U'_l \cap V'_l$ が，単項生成なので，$q \geq 2$ のとき，$\beta_{q,j}(W_i) = 0$ に注意する．

$i \leq 2a-b-c$ のとき，

$a-b+1 \leq i \leq a-c$ のとき，

$$\begin{aligned} \beta_{0,j}(W_i) &= \textstyle\sum_{l=0}^{i} \beta_{0,j}(U'_l) \\ &= \begin{cases} a-b+1 & j = i \\ 1 & 2i-(a-c)+1 \leq j \leq 2i-(a-b) \end{cases} \\ \beta_{1,j}(W_i) &= \textstyle\sum_{l=0}^{i-1} \beta_{0,j}(U'_l \cap V'_l) \\ &= \begin{cases} a-b & j = i+1 \\ 1 & 2i-(a-c)+2 \leq j \leq 2i-(a-b)+1 \end{cases} \end{aligned}$$

$a-c+1 \leq i \leq a$ のとき，

$$\begin{aligned} \beta_{0,j}(W_i) &= \textstyle\sum_{l=0}^{i} \beta_{0,j}(U'_l) \\ &= \begin{cases} a-b-i+(a-c)+1 & j = i \\ 2 & i+1 \leq j \leq 2i-(a-c) \\ 1 & 2i-(a-c)+1 \leq j \leq 2i-(a-b) \end{cases} \\ \beta_{1,j}(W_i) &= \textstyle\sum_{l=0}^{i-1} \beta_{0,j}(U'_l \cap V'_l) \\ &= \begin{cases} a-b-i+(a-c) & j = i+1 \\ 2 & i+2 \leq j \leq 2i-(a-c)+1 \\ 1 & 2i-(a-c)+2 \leq j \leq 2i-(a-b)+1 \end{cases} \end{aligned}$$

$i > 2a-b-c$ のとき，

$b+c-2a+i : even$ ならば，

$$\begin{aligned} \beta_{0,j}(W_i) &= \textstyle\sum_{l=0}^{i-(a-b)+k} \beta_{0,j}(U'_l) \\ &= \begin{cases} 1 & j = \frac{3i+b+c-2a}{2} \\ 3 & \frac{3i+b+c-2a}{2} < j \leq 2i-2a+b+c \\ 2 & 2i-2a+b+c < j \leq 2i-(a-c) \\ 1 & 2i-(a-c) < j \leq 2i-(a-b) \end{cases} \\ \beta_{1,j}(W_i) &= \textstyle\sum_{l=0}^{i-(a-b)+k-1} \beta_{0,j}(U'_l \cap V'_l) \\ &= \begin{cases} 3 & \frac{3i+b+c-2a}{2}+2 \leq j \leq 2i-2a+b+c+1 \\ 2 & 2i-2a+b+c+1 < j \leq 2i-(a-c)+1 \\ 1 & 2i-(a-c)+2 \leq j \leq 2i-(a-b)+1 \end{cases} \end{aligned}$$

$b+c-2a+i : odd$ ならば，

$$\begin{aligned} \beta_{0,j}(W_i) &= \textstyle\sum_{l=0}^{i-(a-b)+k} \beta_{0,j}(U'_l) \\ &= \begin{cases} 3 & \frac{3i+b+c-2a+1}{2} \leq j \leq 2i-2a+b+c \\ 2 & 2i-2a+b+c < j \leq 2i-(a-c) \\ 1 & 2i-(a-c) < j \leq 2i-(a-b) \end{cases} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta_{1,j}(W_i) &= \sum_{l=0}^{i-(a-b)+k-1} \beta_{0,j}(U'_l \cap V'_l) \\
&= \begin{cases} 2 & j = \frac{3i+b+c-2a+1}{2}+1 \\ 3 & \frac{3i+b+c-2a+1}{2}+1 < j \leq 2i-2a+b+c+1 \\ 2 & 2i-2a+b+c+1 < j \leq 2i-(a-c)+1 \\ 1 & 2i-(a-c)+2 \leq j \leq 2i-(a-b)+1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

4 graded betti numbers of three fat points ideals

以上のことから,

$$
I = p_0^a \cap p_1^b \cap p_2^c \quad (a > b > c)
$$

の graded betti numbers は以下のような和で書けている.

$$
\begin{aligned}
\beta_{q,j}(I) &= \sum_{i=0}^{a-b} \sum_{p=0}^{q} \beta_{p,j-q+p-a+i}(N^i)\beta_{q-p}(M^{a-i}) \\
&+ \sum_{i=a-b+1}^{a} \sum_{p=0}^{q} \beta_{p,j-q+p-a+i}(W_i)\beta_{q-p}(M^{a-i}) \\
&+ \sum_{i=0}^{a-b-1} \sum_{p=0}^{q-1} \beta_{p,j-q+p-a+i+1}(N^{i+1})\beta_{q-p-1}(M^{a-i}) \\
&+ \sum_{i=a-b}^{a-1} \sum_{p=0}^{q-1} \beta_{p,j-q+p-a+i+1}(W_{i+1})\beta_{q-p-1}(M^{a-i})
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
\beta_{q,q+a}(I) \quad &= \textstyle\sum_{i=0}^{a-b}(i+1)\begin{pmatrix} a-i+n-3 \\ a-i+q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-i+q-1 \\ q \end{pmatrix} \\
&+i\begin{pmatrix} a-i+n-3 \\ a-i+q-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-i+q-2 \\ q-1 \end{pmatrix} \\
&+\textstyle\sum_{i=a-b+1}^{a-c}(a-b+1)\begin{pmatrix} a-i+n-3 \\ a-i+q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-i+q-1 \\ q \end{pmatrix} \\
&+(a-b)\begin{pmatrix} a-i+n-3 \\ a-i+q-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-i+q-2 \\ q-1 \end{pmatrix} \\
&+\textstyle\sum_{i=a-c+1}^{a}(2a-b-c-i+1)\begin{pmatrix} a-i+n-3 \\ a-i+q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-i+q-1 \\ q \end{pmatrix} \\
&+(2a-b-c-i)\begin{pmatrix} a-i+n-3 \\ a-i+q-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-i+q-2 \\ q-1 \end{pmatrix} \\
&+\textstyle\sum_{i=0}^{a-b-1}(i+2)\begin{pmatrix} a-i+n-3 \\ a-i+q-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-i+q-2 \\ q-1 \end{pmatrix} \\
&+(i+1)\begin{pmatrix} a-i+n-3 \\ a-i+q-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-i+q-3 \\ q-2 \end{pmatrix} \\
&+\textstyle\sum_{i=a-b}^{a-c-1}(a-b+1)\begin{pmatrix} a-i+n-3 \\ a-i+q-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-i+q-2 \\ q-1 \end{pmatrix} \\
&+(a-b)\begin{pmatrix} a-i+n-3 \\ a-i+q-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-i+q-3 \\ q-2 \end{pmatrix} \\
&+\textstyle\sum_{i=a-c}^{a-1}(2a-b-c-i)\begin{pmatrix} a-i+n-3 \\ a-i+q-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-i+q-2 \\ q-1 \end{pmatrix} \\
&+(2a-b-c-i-1)\begin{pmatrix} a-i+n-3 \\ a-i+q-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-i+q-3 \\ q-2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$j \geq q+a+1$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\beta_{q,j}(I) \quad &= \textstyle\sum_{i=a-b+1}^{a}\sum_{p=0}^{q}\beta_{p,j-q+p-a+i}(W_i)\begin{pmatrix} a-i+(n-2)-1 \\ a-i+q-p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-i+q-p-1 \\ q-p \end{pmatrix} \\
&+\textstyle\sum_{i=a-b}^{a-1}\sum_{p=0}^{q-1}\beta_{p,j-q+p-a+i+1}(W_{i+1})\begin{pmatrix} a-i+(n-2)-1 \\ a-i+q-p-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-i+q-p-2 \\ q-p-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

但し，$\beta_{p,j-q+p-a+i}(W_i)$ は以下のようになる.

$b+c-2a+i : even$ のとき,

$q+a+1 \leq j < q+a+\frac{i-2a+b+c}{2}$ のとき,

$$
\beta_{0,j-q-a+i}(W_i) = \begin{cases} 1 & (a-b+1 \leq i \leq a-c) \\ 2 & (a-c+1 \leq i \leq 2a-b-c) \\ 0 & (2a-b-c+1 \leq i \leq a) \end{cases}
$$

$j = q+a+\frac{i-2a+b+c}{2}$ のとき,

$$
\beta_{0,j-q-a+i}(W_i) = \begin{cases} 1 & (a-b+1 \leq i \leq a-c) \\ 2 & (a-c+1 \leq i \leq 2a-b-c) \\ 1 & (2a-b-c+1 \leq i \leq a) \end{cases}
$$

$q+a+\frac{i-2a+b+c}{2} < j \leq q-a+b+c+i$ のとき,

$$\beta_{0,j-q-a+i}(W_i) = \begin{cases} 1 & (a-b+1 \le i \le a-c) \\ 2 & (a-c+1 \le i \le 2a-b-c) \\ 3 & (2a-b-c+1 \le i \le a) \end{cases}$$

$q-a+b+c+i < j \le q+c+i$ のとき,

$$\beta_{0,j-q-a+i}(W_i) = \begin{cases} 1 & (a-b+1 \le i \le a-c) \\ 2 & (a-c+1 \le i \le 2a-b-c) \\ 2 & (2a-b-c+1 \le i \le a) \end{cases}$$

$q+c+i < j \le q+b+i$ のとき,

$$\beta_{0,j-q-a+i}(W_i) = \begin{cases} 1 & (a-b+1 \le i \le a-c) \\ 1 & (a-c+1 \le i \le 2a-b-c) \\ 1 & (2a-b-c+1 \le i \le a) \end{cases}$$

$q+a+1 \le j < q+a+\frac{i-2a+b+c}{2}+1$ のとき,

$$\beta_{1,j-q-a+i+1}(W_i) = \begin{cases} 1 & (a-b+1 \le i \le a-c) \\ 2 & (a-c+1 \le i \le 2a-b-c) \\ 0 & (2a-b-c+1 \le i \le a) \end{cases}$$

$q+a+\frac{i-2a+b+c}{2}+1 \le j \le q-a+b+c+i$ のとき,

$$\beta_{1,j-q-a+i+1}(W_i) = \begin{cases} 1 & (a-b+1 \le i \le a-c) \\ 2 & (a-c+1 \le i \le 2a-b-c) \\ 3 & (2a-b-c+1 \le i \le a) \end{cases}$$

$q-a+b+c+i < j \le q+c+i$ のとき,

$$\beta_{1,j-q-a+i+1}(W_i) = \begin{cases} 1 & (a-b+1 \le i \le a-c) \\ 2 & (a-c+1 \le i \le 2a-b-c) \\ 2 & (2a-b-c+1 \le i \le a) \end{cases}$$

$q+c+i < j \le q+b+i$ のとき,

$$\beta_{1,j-q-a+i+1}(W_i) = \begin{cases} 1 & (a-b+1 \le i \le a-c) \\ 1 & (a-c+1 \le i \le 2a-b-c) \\ 1 & (2a-b-c+1 \le i \le a) \end{cases}$$

$b+c-2a+i : odd$ のとき,

$q+a+1 \le j < q+a+\frac{i-2a+b+c+1}{2}$ のとき,

$$\beta_{0,j-q-a+i}(W_i) = \begin{cases} 1 & (a-b+1 \le i \le a-c) \\ 2 & (a-c+1 \le i \le 2a-b-c) \\ 0 & (2a-b-c+1 \le i \le a) \end{cases}$$

$q+a+\frac{i-2a+b+c+1}{2} \le j \le q-a+b+c+i$ のとき,

$$\beta_{0,j-q-a+i}(W_i) = \begin{cases} 1 & (a-b+1 \le i \le a-c) \\ 2 & (a-c+1 \le i \le 2a-b-c) \\ 3 & (2a-b-c+1 \le i \le a) \end{cases}$$

$q-a+b+c+i < j \le q+c+i$ のとき,

$$\beta_{0,j-q-a+i}(W_i) = \begin{cases} 1 & (a-b+1 \le i \le a-c) \\ 2 & (a-c+1 \le i \le 2a-b-c) \\ 2 & (2a-b-c+1 \le i \le a) \end{cases}$$

$q+c+i < j \le q+b+i$ のとき,

$$\beta_{0,j-q-a+i}(W_i) = \begin{cases} 1 & (a-b+1 \le i \le a-c) \\ 1 & (a-c+1 \le i \le 2a-b-c) \\ 1 & (2a-b-c+1 \le i \le a) \end{cases}$$

$q+a+1 \le j < q+a+\frac{i-2a+b+c+1}{2}$ のとき,

$$\beta_{1,j-q-a+i+1}(W_i) = \begin{cases} 1 & (a-b+1 \le i \le a-c) \\ 2 & (a-c+1 \le i \le 2a-b-c) \\ 0 & (2a-b-c+1 \le i \le a) \end{cases}$$

$j = q+a+\frac{i-2a+b+c+1}{2}$ のとき,

$$\beta_{1,j-q-a+i+1}(W_i) = \begin{cases} 1 & (a-b+1 \le i \le a-c) \\ 2 & (a-c+1 \le i \le 2a-b-c) \\ 2 & (2a-b-c+1 \le i \le a) \end{cases}$$

$q+a+\frac{i-2a+b+c+1}{2} < j \le q-a+b+c+i$ のとき,

$$\beta_{1,j-q-a+i+1}(W_i) = \begin{cases} 1 & (a-b+1 \le i \le a-c) \\ 2 & (a-c+1 \le i \le 2a-b-c) \\ 3 & (2a-b-c+1 \le i \le a) \end{cases}$$

$q-a+b+c+i < j \le q+c+i$ のとき,

$$\beta_{1,j-q-a+i+1}(W_i) = \begin{cases} 1 & (a-b+1 \le i \le a-c) \\ 2 & (a-c+1 \le i \le 2a-b-c) \\ 2 & (2a-b-c+1 \le i \le a) \end{cases}$$

$q+c+i < j \le q+b+i$ のとき,

$$\beta_{1,j-q-a+i+1}(W_i) = \begin{cases} 1 & (a-b+1 \le i \le a-c) \\ 1 & (a-c+1 \le i \le 2a-b-c) \\ 1 & (2a-b-c+1 \le i \le a) \end{cases}$$

Example

いくつか，minimal graded free resolution を計算し，比較を試みる．

$(a,b,c)=(4,3,2), n=3$ の場合 (今回の結果による計算)

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow R(-6)^2 \oplus R(-7)^5 \oplus R(-8)^3 \oplus R(-9) \\ &\longrightarrow R(-5)^7 \oplus R(-6)^{11} \oplus R(-7)^6 \oplus R(-8)^2 \\ &\longrightarrow R(-4)^6 \oplus R(-5)^6 \oplus R(-6)^3 \oplus R(-7) \\ &\longrightarrow I \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

$(a,b,c)=(4,3,1), n=3$ の場合 ($W_{i,2}=\emptyset$ で G.Fatabbi の方法に帰着可)

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow R(-6)^3 \oplus R(-7)^4 \oplus R(-8)^2 \oplus R(-9) \\ &\longrightarrow R(-5)^{10} \oplus R(-6)^8 \oplus R(-7)^4 \oplus R(-8)^2 \\ &\longrightarrow R(-4)^8 \oplus R(-5)^4 \oplus R(-6)^2 \oplus R(-7) \\ &\longrightarrow I \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

$(a,b,c)=(4,3,0), n=3$ の場合 (two fat points の場合)

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow R(-6)^4 \oplus R(-7)^3 \oplus R(-8)^2 \oplus R(-9) \\ &\longrightarrow R(-5)^{12} \oplus R(-6)^6 \oplus R(-7)^6 \oplus R(-8)^3 \\ &\longrightarrow R(-4)^9 \oplus R(-5)^3 \oplus R(-6) \oplus R(-7) \\ &\longrightarrow I \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

ここから考察できること,

- いずれの場合も各 F_q の成分の振れの範囲は同じであること．
- W_i が $(a,b,c)=(4,3,2)$ の方が複雑になるので，total betti number は，大きくなること．

さらに予測できること，

- 各 F_q の成分の振れは，(a,b,n) に起因しているか．
- a を固定したとき，total betti number が最大になるのは，$b=a-1, c=b-1$ のときか．
- (a,b) を固定したとき，total betti number が最大になるのは，$c=b-1$ のときか．

これらが今後の研究課題として考えられる．

5　謝辞

修士論文作成にあたり，お忙しい中，たくさんの指導，指摘，意見をいただいた，梋先生や，梋研究室の皆様に，この場を借りて，お礼申し上げます．

6　参考文献

［Eis］：　D.Eisenbud *The Geometry of Syzygies*
Graduate Text in Mathematics 229 Springer-Verlag (2005)

［EK］：　S.Eliahou M.Kervaire *Minimal Resolutions of Some Monomial Ideals*
Journal of Algebra 129,1-25 (1990)

［F］：　G.Fatabbi *On the Resolutions of Ideals of Fat Points*
Journal of Algebra 242,92-108 (2001)

［FL］：　G.Fatabbi A.Lorenzini
On the graded resolutions of ideals of a few general fat points in $\mathbf{P}^n$
Journal of Pure and Applied Algebra 198,123-150 (2005)