射影線織面のイデアル自由分解について

基幹理工学研究科 数学応用数理専攻
5109A003-1
石井 晋平
指導教員名 楫 元

2011/02/08

1 Introduction

基礎体は複素数体 $\mathbb{C}$ とし, 曲線はすべて非特異かつ射影的なものとする.

Ruled surface を適当な very ample divisor によって射影空間に埋め込み, ideal sheaf を考える. Alzati, Tonoli [AT] はこの ideal sheaf の free resolution を構成するアルゴリズムを示した. 例として以下のような ruled surface について構成している.

Example 1.1 C を種数 $g=1$ の楕円曲線, $\mathscr{E}$ を rank 2 次数 0 の normalized locally free sheaf とする. このとき, $\mathscr{E}$ は以下のうちのいずれかである.

1. $\mathscr{E}=\mathscr{O}_C\oplus\mathscr{O}_C$ i.e. $\mathbb{P}(\mathscr{E})=C\times\mathbb{P}^1$
2. $\mathscr{E}=\mathscr{O}_C\oplus\mathscr{L}$, where $\mathscr{L}\neq\mathscr{O}_C$ and $\deg\mathscr{L}=0$
3. non-trivial extention $0\longrightarrow\mathscr{O}_C\longrightarrow\mathscr{E}\longrightarrow\mathscr{O}_C\longrightarrow 0$

それぞれに対応する ruled surface $\mathbb{P}(\mathscr{E})$ を X_i $(i=1,2,3)$ と表すことにする. 各 X_i は very ample divisor $A=C_0+3f$ によって, scroll として $\mathbb{P}^5$ に埋め込まれる. このとき, アルゴリズムを利用して各 X_i の free resolution を計算すると

$$0\longrightarrow\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-6)\longrightarrow 6\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-5)\longrightarrow 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-3)\oplus 9\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-4)\longrightarrow 3\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-2)\oplus 4\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-3)\longrightarrow\mathscr{I}_{X_1}\longrightarrow 0$$
$$0\longrightarrow\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-6)\longrightarrow 6\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-5)\longrightarrow 9\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-4)\longrightarrow 3\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-2)\oplus 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-3)\longrightarrow\mathscr{I}_{X_2}\longrightarrow 0$$
$$0\longrightarrow\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-6)\longrightarrow 6\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-5)\longrightarrow 9\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-4)\longrightarrow 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-3)\longrightarrow 3\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}(-2)\longrightarrow\mathscr{I}_{X_3}\longrightarrow 0$$

となる. □

Goal 本論文では計算機を使わない, 手計算による手法で ruled surface の free resolution を与えたい. Eisenbud, Floystad, Schreyer [EFS] の Beilinson monad を利用する.

Theorem 1.2 $\mathbb{P}^n$ 上の coherent sheaf $\mathscr{F}$ に対して,

$$B^e=\bigoplus_j H^j(\mathbb{P}^n,\mathscr{F}(e-j))\otimes\Omega_{\mathbb{P}^n}^{j-e}(j-e)$$

となるような complex

$$\mathscr{B}:\cdots\longrightarrow B^{-1}\longrightarrow B^0\longrightarrow B^1\longrightarrow\cdots$$

が存在し, $\mathscr{B}$ は B^0 を除いて exact であり, B^0 での homology は $\mathscr{F}$ である.

2 Example

Main result C を種数 $g=1$ の曲線, $\mathscr{E}$ を C 上の rank 2, 次数 0 の normalized locally free sheaf とする. $X=\mathbb{P}(\mathscr{E})$ を very ample divisor $A=C_0+3f$ によって $\mathbb{P}^5$ に scroll として埋め込み, ideal sheaf $\mathscr{I}_X$ を考える. (C_0 を tautological section, f を fibre とする.)

このとき, 上記の手順によって

$$0 \to \mathscr{O}(-6) \to 6\mathscr{O}(-5) \oplus 6\mathscr{O}(-4) \to 15\mathscr{O}(-4) \oplus 18\mathscr{O}(-3) \to 20\mathscr{O}(-3) \oplus 3\mathscr{O}(-2) \to \mathscr{I}_{X_i} \to 0 \quad (1)$$

という free resolution が成り立つ.

Proof. Theorem 1.2 を用いた計算法を Example 1.1 と同じ ruled surface に対して適用する.
(手順 1) 各 X_i を very ample divisor $A=C_0+3f$ によって $\mathbb{P}^5$ に埋め込む.
(手順 2) $h^q(\mathbb{P}^5, \mathscr{I}_{X_i}(2+p))$ を計算し, $H^q(\mathbb{P}^5, \mathscr{I}_{X_i}(2+p)) \otimes \Omega_{\mathbb{P}^5}^{-p}(-p)$ を表にすると次のようになる. (縦軸に $0 \leq q \leq 5$, 横軸に $-5 \leq p \leq 0$. また, 以下 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^5}$ を $\mathscr{O}$, $\Omega_{\mathbb{P}^5}$ を Ω と省略.)

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
$18\Omega^5(5)$	$6\Omega^4(4)$	0	0	0	0
0	0	0	$\Omega^2(2)$	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$3\mathscr{O}$

(手順 3) Theorem 1.2 を適用すると, 次の exact sequence が得られる.

$$0 \longrightarrow 18\Omega^5(5) \longrightarrow 6\Omega^4(4) \longrightarrow \Omega^2(2) \oplus 3\mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{I}_{X_i}(2) \longrightarrow 0 \quad (2)$$

(手順 4) Differential sheaf の free resolution から ideal sheaf の free resolution を求める.

$$\mathscr{O}(-1) \cong \Omega^5(5) \quad (3)$$

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(-2) \longrightarrow 6\mathscr{O}(-1) \longrightarrow \Omega^4(4) \longrightarrow 0 \quad (4)$$

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}(-4) \longrightarrow 6\mathscr{O}(-3) \longrightarrow 15\mathscr{O}(-2) \longrightarrow 20\mathscr{O}(-1) \longrightarrow \Omega^2(2) \longrightarrow 0 \quad (5)$$

が成り立つ. (2)(3)(4)(5) を mapping cone などで整理すると, 本論文の主結果が得られる. □

Problems Differential sheaves 間の写像

$$\begin{aligned} 6\Omega^4(4) &\quad \to \quad \Omega^2(2) \oplus 3\mathscr{O} \\ \text{i.e. } H^3(\mathscr{I}_{X_i}(-2)) \otimes \Omega^4(4) &\quad \to \quad (H^2(\mathscr{I}_{X_i}) \otimes \Omega^2(2)) \oplus (H^0(\mathscr{I}_{X_i}(2)) \otimes \mathscr{O}) \end{aligned}$$

は各 X_i $(i=1,2,3)$ により変化する. その変化が Example 1.1 のような free resolution の変化につながっている. また, この写像の対応を具体的に調べられれば, free resolution (1) を各 $i=1,2,3$ で Example 1.1 のように無駄のない形に出来るが, わからなかった.

References

[AT] A. Alzati, F. Tonoli, An explicit construction of ruled surfaces, J. Pure Appl. Algebra (2009), 329-348.

[EFS] D. Eisenbud, G. Floystad, F.-O. Schreyer, Sheaf cohomology and free resolutions over exterior algebras , Trans. Am. Math. Soc. (2003), 4397-4426.